MECCANICA

ARCHITETTONICA E INDUSTRIALE

CON

REGOLE PRATICHE

PER LE COSTRUZIONI, E PER L'USO DELLE MACCHINE

DI

LUIGI PACINOTTI

PROF. DI FISICA TECNOLOGICA E DI MECCANICA SPERIMENTALE

NELL'I. R. UNIVERSITA' DI PISA

PISA

TIPOGRAFIA PIERACCINI

1845

MECCANICA

ARCHITETTONICA E INDUSTRIALE

CAPITOLO I.

Della resistenza dei Solidi.

1. *Bisogno di conoscere i materiali.* — La meccanica che io prendo ad esporre deve quanto mi è possibile esser d' ajuto agli ingegneri, ed ai fabbricanti in genere, e quasi come Ajuta-*memoria servir* loro nell' esercizio della professione. Onde procurerò che sia corredata di tutte quelle formule che possono occorrere, e delle avvertenze le più adattate alla pratica. E per non trattenermi punto in cose astratte premetto ciò che stabilisce la cognizione dei materiali, i quali o compongono gli strumenti e le macchine, o formano il soggetto stesso dell' operazione. Certo è che le regole astratte della meccanica vogliono essere adattate ai solidi o materiali su' quali si hanno da applicare, e devono a seconda della particolarità del caso esser limitate; ed a ciò si giunge soltanto con uno studio fatto sovra i materiali stessi. Quando si usa una stanga di legno per fare uno sforzo, vuolsi sapere se quella resisterà all' operazione: quando si trascina una pietra lungo un piano, domandasi quanto sforzo occorre a vincer l' attrito che si eccita tra quella pietra, e quel dato piano sottoposto: quando un solido ha da stare esposto all' effetto di più forze, cercasi se per l' azione di esse verrà quello a deformarsi. Come potrebbe sodisfarsi a tali ricerche senza conoscere le proprietà meccaniche dei solidi particolari? nè basterebbe conoscerle, come l' abbiamo nell' introduzione trattate, in un modo generale, convien saperle valutare in numeri, e questo formerà il nostro primo soggetto.

2. *Struttura particolare di alcuni solidi.* — Pochi sono i corpi che presentano in tutte le direzioni uniformità di struttura. I corpi organici mostrano una tendenza a disporre le loro parti in fibre, o filetti paralleli e collocati l' uno accanto all' altro, ovvero in tessuti a maglie più o meno serrati. Devesi in essi distinguere il periodo della vita da quello in cui essa è estinta, e nel primo il periodo di maturità dall' altro d' incremento, perchè in tutti

questi periodi variano notabilmente le resistenze che tali solidi possono presentare. Anche nel periodo di cessata vita, sebbene il corpo sia sotto le leggi puramente fisiche, persiste l'effetto della disposizione organica delle particelle. Un legno si rompe più facilmente lasciando staccar le sue fibre fra di loro, che permettendo la lacerazione o strappamento di quelle. Spesso le fibre sono rivestite di una sostanza eterogenea: si trova essa molto solida nell' abeto, e granellosa nel castagno. Quindi molto interessa attendere alla direzione delle fibre, alla lor regolarità, ai nodi dei legni, o ad altre imperfezioni di tessuto. Il nodo, che è detto cipolla, forma un corpo separato, e stabilisce un' interruzione della materia spesso nociva. Nei legni è notabile che vi ha azione l'umidità, non meno che il caldo e il freddo.

I minerali cristallizzati sono friabili a cagione delle faccie che separano i cristalli. Una struttura regolare di un corpo cristallizzato è ordinariamente il resultamento dell'agglomerazione di piccole lamine a facce parallele, e suole essere carattere di poca resistenza in tutte le direzioni. Vi sono anche nei minerali delle strutture che imitano quelle dei corpi organici come aggruppamenti fibrosi, gruppi cellulari, ec.; ma spesso i cristalli sono infinitamente piccoli; e lamellari, granulari, e fibrosi si trovano mescolati alla rinfusa, senza presentare alcuna struttura speciale riconoscibile, e costituiscono le masse compatte. Queste si distinguono in masse di splendor metallico, di frattura a splendor vitreo, e di aspetto pietroso, le quali son forse altri gradi di cristallizzazione. Per altro il meccanico avrà allora riscontri migliori dei precedenti, per argomentare sulla resistenza, come la grana più o meno serrata delle pietre, più o meno fine dell' acciajo, granulosa ed oncinata con nerbo nel ferro o nel rame; come il peso specifico per alcuni corpi, l'uniformità del colore per altri, ec.

3. *Forze dalle quali proviene la resistenza.* — Son cose forse troppo elementari il ricordar qui che se trattasi della resistenza presentata dal corpo a rompersi deve essa attribuirsi alla coesione, e all'adesione, e quando si nota la deformazione del corpo agiscono la mollezza o duttilità, e la elasticità. Pure non le taccio giacchè queste forze sono le vere molle della meccanica, non potendosi dirigere alcuna operazione senza che debba considerarsi la coesione la qual collega le particelle del corpo che adoprasi, la duttilità o mollezza che permette al corpo di prendere permanentemente differenti forme, e la elasticità per la quale si estinguono le mutazioni di posto che avevan subito le particelle, appenachè cessa la forza dalla quale erano state prodotte. Vi è un' intimo legame fra queste tre forze: la coesione è il valore stesso che l' elasticità acquista nell'atto della rottura, e la mollezza proviene dal grado più o meno perfetto di elasticità. Non consiglierei però il meccanico a confonderle, perchè diversi troppo sono i resultati che se ne ottengono; piuttosto ad aver sempre presente l'influenza che il modo d' aggregazione delle particelle esercita sulla mollezza e sull'elasticità, come anche quella che ha il calorico, e spesso l'acqua o altri dissolventi hanno sulla coesione.

4. *Leggi fondamentali dell' elasticità*. — È la forza d' elasticità una reazione che si oppone con energia sempre costante alle forze che agiscono sopra i corpi. Che se cessa coll'andare del tempo in un corpo questa costante reazione, e si fa più piccola, o per mantenersi essa eguale assume il corpo altra figura, convien dire che l'elasticità si è alterata, ed ha ceduto il suo posto alla *mollezza*. Per apprezzare questo valore della reazione elastica nei differenti corpi si è cercato di ridurlo in numeri, e si è chiamato coefficiente d' elasticità, del quale noi parleremo in seguito.

Qui rammenterò che uno dei modi capaci a darci la misura dell' elasticità vien tratto dalle vibrazioni sonore che da essa vengono cagionate (*Int.* 85.) tanto longitudinali quanto trasversali. Per determinare il numero delle vibrazioni trasversali che si producono in una verga fissata ad un estremo Duhamel insegnò farle disegnare sovra una lastra di vetro coperta di nero fumo. Un disco di vetro destinato a ricevere i disegni può esser messo in moto da una macchinetta analoga ai comuni gira-arrosti, il moto della quale sia reso uniforme da un regolatore ad alette. Ed affinchè non si abbia inesattezza per la poca uniformità di moto, contemporaneamente alla verga si può far vibrare un diapason del quale si conosca il numero delle vibrazioni che si fanno in 1″. Tanto la verga quanto il diapason con una punta unita alla loro estremità disegneranno sul disco con piccole sfregature le respettive vibrazioni trasversali in due cerchi differenti. Conviene perciò porre in vibrazione nello stesso tempo la verga, ed il diapason, far cadere le punte di ambedue sovra un medesimo raggio del disco, e fare che questo mentre ruota si appoggi leggermente alle punte, e se ne allontani dopo avere compito un giro; e tutto ciò si otterrà facilmente con adattati congegni. Lo strato di nero fumo mostrerà in due anelli concentrici i disegni delle vibrazioni; in uno quelle della verga e nell'altro quelle del diapason. Nè sarà difficile contarvele facendo uso di un microscopio. Sia n il numero delle vibrazioni che in 1″ fa il diapason, n' quello delle vibrazioni fatte dalla verga; a, a' i numeri delle vibrazioni che questi due strumenti han fatto in una rivoluzione del disco avremo

$$n' = n \frac{a'}{a}.$$

Questo metodo ha il vantaggio di essere applicabile a tutti i corpi sieno o no sonori.

Il numero delle vibrazioni longitudinali si può trovare determinando il suono più grave che è dato dalla verga, allorchè tenuta ferma al suo mezzo vien fregata ad un estremità. Che se trattasi di fili metallici potranno fissarsi ai due estremi, e fregarsi nel loro mezzo. Si può anche in questo caso far disegnare sul disco girante le vibrazioni con qualchè avvertenza. Chi contasse direttamente le vibrazioni longitudinali disegnate potrebbe cadere in errore, perchè vi sono sempre miste delle vibrazioni trasversali. Si troverebbe per uno stesso numero di vibrazioni del diapason, un numero più grande di vibrazioni longitudinali quando si contano nella direzione in cui la verga si muove trasversalmente, che quando si muove nel piano in cui gira il disco. Ma questa coesistenza di vibrazioni longitudinali, e trasversali dà il modo di evitare l'inconveniente: non si farà che deter-

minare il numero delle vibrazioni trasversali per 1″, e quindi il numero delle vibrazioni longitudinali che han luogo tra una trasversale e l'altra. Il prodotto di questi due numeri assegna le vibrazioni fatte in 1″. Il primo di questi numeri si troverà nel modo che ho insegnato di sopra, e per il secondo si faranno disegnare i due generi di vibrazioni sovra una piccola lastra di vetro da presentarsi colla mano sotto l'inclinazione di 45° rapporto all'asse della verga, e leggerissimamente appoggiandola contro la punta. Ciò fa che le vibrazioni longitudinali si disegnano per tutto distintamente anche sulle sommità delle vibrazioni trasversali.

La legge colla quale al variare delle forze che agiscono sovra i corpi varia la loro reazione elastica e la posizione delle loro parti, non meno semplice che generale, può enunciarsi: Le mutazioni di posto delle parti di un qualsivoglia corpo solido dalla loro posizione naturale si fanno per spazj che sono proporzionali alle forze che le producono. A concepir bene questa legge fa duopo comprendere quali sono i diversi casi nei quali si avranno mutazioni di posto nelle parti di un solido e quando quelle mutazioni potranno dirsi semplici o composte.

I.° Un solido tenuto fermo ad un estremo venga stirato all'altra estremità da una forza che agisca nella direzione della lunghezza, e tenda ad allungarlo; di qualunque natura e di qualunque forma sia il solido resulta l'allungamento proporzionale alla forza che lo produce. Se non che deve porsi differenza tra l'allungamento che proviene dall'elasticità, ed è temporario cioè svanisce quando la forza cessa d'agire, e quello che proviene dalla mollezza o duttilità del corpo, il quale rimane permanente; la legge ha luogo solamente per il primo, cioè dall'allungamento totale deve sottrarsi l'allungamento permanente. Si conosce bene quale è l'allungamento permanente sia che tolgasi la forza, e si noti di quanto accorcia il solido; sia che si faccia stirare il corpo da una forza molto grande, la quale poi a gradi si diminuisca, e si noti se gli accorciamenti sono proporzionali ai gradi per i quali si è diminuita la forza. In fare esperienze di questo genere convien tenere la sezione trasversale assai piccola onde possa rendersi sensibile l'allungamento anche a pesi moderati.

II.° Quando un solido puntato con un'estremo ad un ritegno fisso, all'altra estremità è premuto da una forza nella direzione della lunghezza, si accorcia di una quantità sebben piccola pure proporzionale alla forza premente. Ho detto che si accorcia di quantità piccole non potendosi sperimentare che sopra pezzi di una notabile sezione, giacché sovra quelli di piccola sezione si ha facilmente nell'atto della compressione un'incurvamento, ed allora può dirsi composta la mutazione di posto che soffrono le parti del corpo, e non può osservarsi la legge. Anche nel precedente, ma più in questo genere d'esperienze conviene prendere le misure delle lunghezze indirettamente, cioè facendo aumentare le indicazioni delle variazioni da congegni che le moltiplichino, dei quali avremo occasione in seguito di descriverne alcuni.

III.° Nella flessione egualmente si verifica la legge; e questa può ottenersi incastrando un'estremo di u-

na verga solida in un muro per una certa estensione, ed in situazione per es. orizzontale, ed all'altra estremità applicando un peso. Se al variare il peso si misurano gli abbassamenti che va soffrendo il punto al quale è attaccato, si trova esser questi proporzionali ai pesi stessi. Sempre intendesi di non valutare l'effetto permanente; e qui anche più *sensibile* si renderà la quantità di *flessione* permanente, la quale cresce col tempo che si tengono i pesi in azione. Fatta la detrazione della flessione permanente, seguita la proporzionalità colle forze a verificarsi anche per i pesi molto grandi e poco discosti da quelli chè producono la rottura, purchè si valuti solo quella lor componente che rimarrebbe normale alla curva. Ma volendo la legge più netta, o meno influenzata dalle flessioni permanenti, conviene non estendersi che a pochi gradi di flessione.

IV.° *Egualmente una* verga solida *sostenuta alle due* estremità, supporrò orizzontalmente, e caricata di pesi ad un qualche punto intermedio si inflette, e l'abbassamento che si fa nel punto caricato è proporzionale al peso che lo produce. Non ripeterò qui la precedente osservazione sulla porzione permanente della flessione, la quale ben si sottintende; e piuttosto avvertirò che il peso può esserè applicato ad un qualunque punto, e nulla preme che la *verga sia* ovunque di egual sezione, potendo esser di figura anche irregolare. Si deve quanto è possibile evitare l'attrito sui punti d'appoggio, come anche ogni resistenza che ne impedisca il libero scorrimento: quindi sarà utile appoggiare la verga sulla circonferenze di due ruote, o infilarla con due assi, i quali con adattate staffe, ritenuti pendenti da funi, possano avvicinarsi fra loro a misura che la verga s' inflette. Che se questi assi fosser fissi il fenomeno dell'inflessione sarebbe di altro genere, e potrebbe dirsi, che sono composte le mutazioni di posto delle diverse parti del solido. Infatti avrebbe allora luogo la flessione e l' allungamento della verga, ed effetto consimile tendono a produrre l'attrito, e le altre resistenze negli appoggi. L'apparato col quale S' Gravesande verificava la legge dell'elasticità nei fili metallici potrà farci comprendere la differenza fra le due rammentate disposizioni, le diligenze che sono da usarsi in queste esperienze, e un modo col quale si possono avere ingrandite le indicazioni. Ad un banco è teso tra morse di metallo ben stabili il filo metallico (fig. 1.) FF', sul quale si sperimenta: si attacca al mezzo con un gancio un piatto da bilancia ove si pongono i pesi: e al gancio stesso si unisce un sottil filo il quale passa sopra una rotella p e vi è fermato: la rotella porta una lancetta assai lunga la quale può percorrere la divisione circolare DGD', ed un piccol contrappeso tende il filo e dà stabilità alla lancetta. prima che venga attaccato il peso la corda ha la direzione rettilinea FHF', e per l'effetto del peso si abbassa al mezzo e prende la posizione FH'F': corrispondentemente all'abbassamento gira la rotella e la lancetta, onde misuransi colla divisione circolare anche i minimi abbassamenti. Conosciuti i due cateti FH, HH' si ha la lunghezza del filo metallico stirato

$$= 2\,FH' = 2\sqrt{\left(\overline{FH}^2 + \overline{HH'}^2\right)}$$

dunque

$$2\sqrt{\left(\overline{FH}^2 + \overline{HH'}^2\right)} - FF'$$

è l'allungamento prodotto dal peso applicato che rappresenterò con P. Per ottenere la forza che stira il filo metallico convien ricorrere alla dottrina del parallelogrammo (*Int.* 120) delle forze, e perciò rappresentando con 2 HH' il peso P sarà FH' la tensione della corda cioè

$$\frac{P \cdot FH'}{2 \cdot HH'}$$

In questo apparato non si valuta la flessione, ma l' allungamento, e si trova che è proporzionale alla tensione che il filo metallico riceve dai pesi che lo inflettono. È facile comprendere che quanto utile è il meccanismo qui usato per aumentare le indicazioni, altrettanto poco adattata sarebbe la disposizione della verga solida quando essa avesse dimensioni assai grandi. Ed anche le staffe, delle quali in *c* si vede il disegno in facciata, sebbene ingegnosamente studiate difficilmente potranno dar punti fissi quando si tratti di tensioni forti.

V.° Aggiungerò ancora un'altro caso nel quale si riscontra la rammentata legge, ed è quello della torsione, e descriverò anche l'apparato che io soglio usare in questa esperienza (fig. 2.). Un circolo orizzontale MM' è retto da una solida base, ed è munito delle sue divisioni; la traversa CC' può girare concentrica a quello, e può fissarvisi con due viti a pressione, essa porta due puleggie mobilissime sulle quali passano le corde che sostengono i pesi P,P': in S vedesi una porzione del regolo sottoposto alla torsione, ed AA' è la leva con la quale vi si agisce legandovi alle estremità le due rammentate corde che devono sempre rimanerle perpendicolari: una lancetta B indica la torsione che va acquistando il regolo al crescere dei pesi: siccome il circolo MM' e la traversa CC' sono verso il mezzo traforati si può tenere in centro il regolo: allorchè questo è grosso e vi si agisce con forze assai grandi, ho trovato utile porre un'altro circolo con divisioni in alto ove è l'attacco del regolo, perchè se un poco si movesse quell'attacco, sia ciò indicato da un'altra lancetta che ivi è infissa nel regolo istesso. Fatto l'esperimento con diligenza si trova che l'angolo di torsione è proporzionale alla forza cioè alla somma de' pesi che lo producono, purchè si detragga qui pure dall'indicazione della lancetta quella torsione che il regolo acquista permanentemente, la quale è sempre insensibile per i primi gradi di torsione.

5. *Leggi della mollezza e duttilità dei corpi*. — Le particelle dei corpi possono acquistare diverse posizioni stabili di equilibrio, ma le leggi colle quali si van variando queste posizioni sono più complicate che quelle dell'elasticità, e non ben conosciute fino al presente. Si può dire che le alterazioni permanenti crescono al crescere dei pesi o forze che le producono; e le esperienze fatte da molti, ma più particolarmente da Ardant su'fili metallici mostrano che il rapporto tra le alterazioni e i pesi è semplice e diretto fino ad un certo limite assai prossimo a quello della rottura. Si raggiunge questo limite non tardi per i legni, e al di là di quello le alterazioni crescono in una progressione più rapida dei pesi, la quale assai più si accelera nei metalli che hanno maggior mollezza, e par difficile determinare con precisione la legge. È da avvertirsi: il peso che dà una più grande alterazione permanen-

te si allontana generalmente poco da un terzo di quello chè produrrebbe la rottura. In tutti i solidi le alterazioni permanenti prodotte da piccole forze sono insensibili, e come tali si riguardano finchè non giungono a $0,^{m}00005$; e questo suol considerarsi come il limite dell'elasticità perfetta. Ho creduto che spargerà molta luce il seguente esempio degli allungamenti dati da un filo di piombo.

Peso in Kil. per un mm. quad. di sezione	*allungam. in mm. per ogni m. di lunghez.*
0,10	0,17
0,30	0,41
0,43	0,62
0,50	0,81
0,70	31,60
0,90	70,20
1.10	127,20
1,30	324,60
1,36	rottura

Il tempo è il secondo elemento dal quale dipende l'alterazione del corpo. Nei primi tempi per i quali agisce la forza si ha un effetto assai maggiore che nei successivi, per cui va decrescendo l'azione del tempo con gran rapidità, sebbene ridotta piccolissima dopo poche ore persista anche quando il tempo è di più mesi. Questo tempo non si allunga molto per i metalli duri, ma assaissimo per quelli molli, i quali par che non si stabiliscano in equilibrio che dopo un gran numero di oscillazioni. Dalle esperienze che io ho fatte sovra diversi legni mi è resultato potersi l'affetto del peso e del tempo esprimere prossimamente colla seguente formula empirica.

$$a\,\mathrm{P}+b\,\mathrm{P}\sqrt[3]{(\text{arc. tang. T})}$$

ove a, b sono due coefficenti costanti, P indica il peso, e T il tempo.

Può dirsi che col tempo diminuisce la mollezza dei corpi, o piuttosto si vanno le particelle ad avvicinare ad una posizione stabile di equilibrio, e perciò l'elasticità si fa più grande, giacchè non crescono le alterazioni in proporzione dei tempi. Che anzi un filo metallico stirato da un peso si allungherà tanto più quanto con maggior sollecitudine si va aumentando il peso: lasciando tra un'accrescimento di peso e l'altro correre un tempo assai lungo il metallo avrà ripreso un grado di elasticità più grande, di quello che avrebbe avuto senza quel riposo.

Al di là di un certo limite, il quale è assai vicino a quello della rottura l'alterazione non si reparte uniformemente su tutta la lunghezza del solido, e si fa massimamente a spese della parte più debole. Posto che il solido fosse perfettamente di egual resistenza in ogni punto, dovrebbe la rottura contemporaneamente accadere su tutte le sezioni. Esistendo una sezione più debole, in quella si riducono negli istanti che precedono la rottura tutte le alterazioni e la rottura istessa. Del resto può ritenersi che il fenomeno proprio della rottura si produce a gradi, e per mezzo di alterazioni simili a quelle che si erano fatte negli istanti precedenti. Nè il carico che produce la rottura dovrà aversi come una quantità assoluta ed invariabile, potendosi alterare col modo dell'operazione: cioè potendosi diminuire col lasciare permanente il carico che è prossimo alla rottura, aumentare col lasciare un intervallo di tempo sufficientemente grande tra le addizioni del carico, come col procedere per

addizioni piccolissime, e coll' impedire tutte le oscillazioni o scosse.

Finalmente delle cagioni estrinseche, come gli sbalzi della temperatura possono far variare le alterazioni permanenti nei solidi; e nei legni anche lo stato igrometrico dell' ambiente. E qui parmi luogo di avvertire che nei metalli prodotta da una forza un' alterazione, per esempio un' allungamento, se tolgasi la forza, in parte quell' allungamento per effetto dell' elasticità sparirà subito, e nel rimanente resterà permanentemente come effetto della mollezza. Non così avviene nei legni perchè in questi quella porzione di allungamento, o altra alterazione, che tolta la forza non si estingue subito, può almeno in parte estinguersi coll' andar del tempo. E presso a poco il tempo agisce nei legni per farli riprendere la forma primitiva con quella legge colla quale aveva agito per fargliela perdere, cioè più ne' primi istanti che in quelli successivi. Questa specie d' elasticità che nei legni agisce a poco alla volta crederei che si dovesse attribuire ai liquidi che essi hanno nell'interno, perchè meno si riscontra nei legni ben seccati, vecchi, e stagionati.

6. *Diversi generi della resistenza, che può aversi dai solidi* — Per quanto dai medesimi principj di scienza si deduca sempre la resistenza che i solidi appongono alle forze che sovra essi agiscono, pure torna conto distinguere le differenze che si presentano in diversi casi particolari facendo uso di nomi differenti. Si dicono duri quei corpi che presentano molta *resistenza all' intaccamento*, cioè resistono molto alla lima, alla mola, e in generale non si lasciano intaccare dalle scabrezze degli altri corpi. I mineralogisti distinguono e classano i corpi secondo questa resistenza, e per provare se uno sia più resistente di un altro provano se può da quest' ultimo essere intaccato, o quale dei due è più facilmente dalla lima intaccato. Di questa resistenza non voglio qui parlar avendo detto nell' introduzione quanto ne può occorrere. Secondo il modo che si tiene nel fare agire la forza che ha da cimentare i corpi si ha la resistenza alla distensione o alla compressione, la prima delle quali suole anche appellarsi resistenza assoluta positiva, e l' altra assoluta negativa; ovvero si ha la resistenza alla flessione, che indicasi col nome di rispettiva, tanto nel caso che il solido sia ritenuto in una sola estremità quanto come se fosse sostenuto in due estremi; si ha pure la resistenza alla torsione, e quella alla percussione e quest' ultima si dice comunemente resistenza viva. Ciascuna delle rammentate resistenze distinguesi in elastica, se osservasi solo la deformazione del corpo, ed in resistenza alla rottura; come anche in resistenza istantanea, e permanente a seconda che brevissimo o lungo tempo avrà agito la forza sopra il solido.

Resistenza alla distensione e alla compressione

7. *Resistenza elastica.* Prendasi a considerare la resistenza elastica, e la rigidità di una sbarra prismatica o cilindrica che abbia A per sezione, ed L per lunghezza: sia P la forza che la distende o comprime, l l' allungamento ovvero l' accorciamento che si ottiene in tutta la sbarra, ed i ovvero l/L sia questo allungamento o accorciamento per una sola unità di lunghezza . È manifesto che

I. La resistenza della sbarra è indipendente dalla sua lunghezza assoluta, ed è proporzionale alla sezione A; *all' incontro* la rigidità è inversamente proporzionale alla lunghezza L.

II. Gli allungamenti o accorciamenti prodotti nelle diverse parti della sbarra sono proporzionali alla loro lunghezza, e lo è pure l' allungamento totale l.

III. Gli allungamenti o accorciamenti sotto un medesimo carico sono in ragione inversa della sezione A.

IV. I medesimi sono, coerentemente alla legge generale dell' elasticità, proporzionali alle forze che li producono dentro ai limiti della perfetta elasticità.

V. La resistenza o la reazione elastica deve esser misurata dal rapporto tra i pesi P e gli allungamenti i piccolissimi che si fanno in un unità di lunghezza, cioè in un metro.

Rappresentando con E la resistenza elastica per ogni unità di superficie avranno E×A per la resistenza elastica totale che per una delle leggi precedenti può esprimersi con

$\frac{P}{i}$ onde avremo $\frac{P}{i} = EA$, e $P = EAi$

La rigidità cresce al diminuire l'allungamento che soffre la verga, perciò dovrà rappresentarsi con

$$\frac{P}{l} = \frac{E.Ai}{l} = \frac{EA}{L}$$

Onde vedesi che la resistenza elastica non è che la rigidità presa per l' unità di lunghezza.

Il numero E che entra nelle formule precedenti, e che indica la reazione elastica come ho detto è stato da alcuni chiamato coefficente, da altri modulo d' elasticità. Nella precedente formula della resistenza elastica pongasi $A = 1$, $l = L$ e perciò $i = 1$, si avrà $P' = E$; resultato il quale mostra coerentemente a ciò che i matematici ammettono, essere il coefficente d' elasticità di una sostanza omogenea qualunque, il peso che sarebbe capace di allungare una sbarra prismatica di una quantità eguale alla sua lunghezza primitiva, posto che abbia per sezione l' unità di superficie.

8. *Determinazione del coefficente d' elasticità per mezzo della resistenza elastica all'allungamento.*— Ammesso come han trovato i Sigg. Colladon e Sturm che una verga di vetro di un metro si allunghi di 11. millionesimi per ogni sforzo di 1,k033 quando ha una sezione di un centimetro quadrato; ridotto ad un millimetro quadrato la sezione, lo sforzo per produrre il detto allungamento sarebbe 0k,01033 e perciò si avrà

$$E = \frac{P}{A.i} = \frac{0,01033}{0,0000011} = 9390\,k$$

Mentre questo sembra il valore più esatto, stando alle esperienze dei medesimi autori, il Poncelet deduce altri due valori 10000k, 8200k per lo stesso coefficente d' elasticità. Dalle esperienze di Savart ne è resultato per valore medio 5900, e da quelle che ho fatte io, come anche da quelle del Wertheim 7270. Parimente per la quercia il Poncelet deduce il coefficente d'elasticità dall' esperienze dei Sigg. Minard e Desormes in 1340k, e da quelle del Sig. Ardant in 1178. E per l' abete l' ottiene seguendo l' esperienze dell' Ardant in 1615k, e 1188,k. I limiti nei quali rimangon compresi questi coefficenti ottenuti col mezzo dell' allungamento per quanto non così distanti come quelli che con altri metodi resultano lasciano troppa indecisione, e fan conoscere il bisogno di migliorare le formule. Per l' esperienze che io ho fatte su questo soggetto mi è re-

sultato che notabil vantaggio si abbia in questa determinazione se introduciamo nelle formule la gravità specifica del corpo di cui si vuole il coefficente d'elasticità. Indichi E' la resistenza elastica di ogni fibra o di ogni molecola, sara E'.G.A la resistenza elastica di tutta la sezione A, quando G rappresenti la densità, o anche la gravità specifica che è a quella proporzionale; per conseguenza avremo

$$E' \times G = E = \frac{P}{A l}$$

cioè il coefficente d'elasticità sopra rammentato dovrà dividersi per la gravità specifica, quando si voglia il vero coefficente d'elasticità di un corpo da confrontarsi con quello di altri corpi della stessa natura. Il resultato a cui io son giunto sperimentando su' legni combina con quello che ha ottenuto il Wertheim su' metalli.

Per eseguir l'esperienze sull'allungamento de' legni ho ad un forte arpione attaccato il regolo di legno AA' (fig. 3), il quale era stato lavorato con un' ingrossatura alle due estremità ove rimaneva fissato alle staffe di ferro BB' mediante tre pernj passanti: tanto in A quanto in A' tirate due linee traverse sul regolo, ivi ho fissato con due punte metalliche un sottil filo il quale si avvolge ad una rotella mobilissima, munita di una lancetta assai lunga: quando il filo viene stirato all'allungarsi del regolo per l'azione del peso P, gira la rotella e la lancetta, percorre le divisioni di un quadrante corrispondente, e mostra molto ingranditi gli allungamenti del legno. Con questa disposizione non solo si possono misurare i più piccoli allungamenti, ma anche ci si pone al coperto degli errori che potesser cagionarsi dai cedimenti dei punti d'attacco, giacchè la differenza dei movimenti notati sulle due lancette mostra l'allungamento seguito soltanto tra la sezione in A e quella in A'. Ecco il resultato d'esperienza sovra due qualità d'albero gattice. Il primo legno aveva 0,5566 per gravità specifica e ridotto in un regolo lungo $1,^{m}962$ largo 11^{mm} e grosso $13,^{mm}$ ha preso le seguenti lunghezze sotto ai corrispondenti pesi.

0k	$1,^{m}962000$
10	1, 962139
20	1, 962279
30	1, 962418
40	2, 962575
50	1, 962732
0	1, 960000
80	1, 963611
110	1, 965925
140	1, 964343
0	1, 962209

Possiamo ritenere adunque che essendo P = 10 si ha $l = 0,^{m}00014$, mentre è $L = 1,^{m}962$, e A = 143 millim. quadrati. Avremo perciò

$$E = \frac{P}{A} \frac{L}{l} = \frac{10 \times 1,962}{143 \times 0,00014} = \frac{19,62}{0,02} = 981 \text{ k}$$

$$\text{ed } E' = \frac{E}{G} = \frac{981}{0,5566} = 1762$$

Del secondo gattice che aveva per gravità specifica 0,5339, fatto un regolo lungo $1,^{m}620$ di sezione quadrata con lato 13^{mm} si sono ottenute le seguenti lunghezze sotto ai corrispondenti pesi

0k	1,620000
10	1,620209
20	1,620348
30	1,620487
40	1,620626
50	1 620731
60	1 620836
0	1 620000
80	1 621250
110	1 621464
150	1 621778
0	1 620209

Qui vedesi che trascurata la indicazione del primo peso come eccedente, forse perchè il regolo era naturalmente curvo, si potrà prendere per P=10k la media tra 40k, e 60k: che è l=0,000125, ma L=1,^{m}62, A=169 perciò avremo

$$E=\frac{PL}{Al}=\frac{10\times1,62}{169\times0,000105}=\frac{16,2}{0,0173}=936,4.k$$

$$\text{ed } E'=\frac{E}{G}=\frac{956,4}{0,5339}=1754$$

Questo esempio farà conoscere come più convenga ad E′ che ad E il nome di coefficente d'elasticità.

9. *Resultati d' esperienze*. — Oltre al precedente metodo molti altri se ne possono tenere per determinare il coefficente d'elasticità, de quali parleremo in appresso. Ora riporteremo le seguenti conclusioni tratte dalle esperienze fatte da diversi autori, e principalmente dal Wertheim, alle quali ho aggiunte le mie completando la tavola dei coeficienti d'elasticità anche per rapporto ai legni, e per la determinazione del vero coefficente E′.

I. Il coefficente d' clasticità non è costante per un medesimo metallo, nè per un medesimo legno, e tutte le circostanze che aumentano la densità lo fanno aggrandire e viceversa. Ed anche fatta la correzione che ho sopra indicata rimane, sebbene in più piccola parte, questo resultato.

II. Gli allungamenti permanenti non si fanno per salti, ma con legge continua. Onde un vero limite d'elasticità non esiste, e diviene difficile separare l' effetto dall'elasticità da quello della mollezza, e determinare con precisione il coefficente di elasticità.

III. L' allungamento delle verghe e de' fili metallici non cangia la loro densità che pochissimo. Il coefficiente d'elasticità non deve del pari variare che poco nelle diverse posizioni d' equilibrio.

IV. Il coefficente d' elasticità di una lega metallica è presso a poco la media de' coefficenti de' matelli costituenti la lega.

V. Il passaggio della corrente elettrica nei metalli porta una diminuzione d' elasticità, la quale cessa al cessare della corrente.

VI. L' elasticità non resulta precisamente del medesimo valore quando si eccita con diverso metodo per es.° coll' allungamento o colla flessione. Dalla tavola seguente si avrà il valore del coefficente d' elasticità.

TAVOLA

DEI COEFFICENTI D' ELASTICITA'

SOSTANZE	VALORE	
Metalli	*di E*	*di E′*
Piombo colato	1775	158,27
„ stirato. . . .	1803	161,45
„ ricotto . . .	1727,5	153,81
Bismuto.	1727,5*	251,78
Antimonio	3144*	463,58
Stagno stirato	3839,7	525,05
„ ricotto	3703,4*	508,01
Cadmio stirato. . . .	5424*	625,97
„ ricotto. . . .	5313*	623,60
Oro stirato	8131,5	552,93
„ ricotto	5584,6	310,37
Argento stirato . . .	7357,7	709,59
„ ricotto . . .	7140,5	694,58
Zinco colato	9021	1262,4
„ stirato	8734,5	1246,4
Palladio tirato	11759	1036,04
„ ricotto . . .	9789	872,07
Rame tirato	12449	1395,5
„ ricotto.	10519	1197
Platino tirato.	17044	801,13
„ ricotto	15518	736,05
Ferro tirato	20869	2693,4
„ ricotto.	20794	2680,7

Filo di f. del d.° 1,mm20	18300	
„ ricotto	17000	
Acciajo tirato	19549	2527,4
„ ricotto	19561	2534
„ in sbarre . .	20400	
„ in lastre . . .	30000	
„ ingl. in filo tirato	18809	2437
„ ricotto	17278	2267
Ghisa grigia	9029	
„ dolce.	1653	

Leghe.

Stagno 1. zinco 3. .	6976*	1034
Stagno 1. rame 7, metallo dei tam-tam	9784*	1110
„ temperato	7716	889,3
Argento 2. palladio 3. lega us. dai dentisti	10003*	917,5
Argento 10. rame 1: lega delle monete di francia.	7913	880,7
Zinco 1. rame 2. ott.	10163*	1181
idem Tombac . . .	11218*	1296
Zinco 5. rame 17. ott.	9823*	1166
Zin.° 1. rame 6. simil.°	9778*	1132
Piombo 2. bismuto 3. stagno 2. lega di Darcet	2626*	268
Piombo 4. antimonio 2. stagno 5	2735*	372,7
Piombo 14. stagno 2. zinco 3.	2486*	243,4
Stagno 4. antimon. 2. rame 3	5770*	605,1
Zinco 9. rame 13. nikel 2.	9261	1102
Zinco 4. rame 13. nikel 5.	10788	1263
Zin. 6. rame 6. nik. 3.	11500	1363
Zin. 2. rame 5. nikel 2.	10324	1198
Piombo 1. stagno 1. saldatura	2969*	315,6
Piombo 2. antimon. 1. lega de' caratteri da stampa.	2183*	216,1
Piombo 6. zinco 1 . .	2144*	191,9
Piombo 1. zinco 5 . .	6108	727,4
Stagno 3. zinco 1. . .	5336	724,4

Legni.

Gattice	1106,05	2072,2
Castagno	1175,50	2515,8
Abete	940,30	1881,4
Querce	1504,64	2113,3
Ciriegio	1194,15	2140,1
Magogon	1423,60	2338,3
Noce scuro.	1106,35	1816,1
Albero nero	1044,90	2119,5
Ebano.	2090,92	1858,6
Bosso	1313,36	1268,9
Sorbo	1200,67	1784,1
Olivo	835,90	1008,1
Faggio	1067,96	1727,8
Cipresso	1021,31	2033,7
Frassino	1156,28	1521
Pino rosso	1393,16	2121

Altri Corpi.

Cristallo bian. e color.	5477	1649,7
Vetro o crist. da finest.	7917	3143,4
Vetro da specchio . .	7015	2858,6
Vetro da globetteria .	6890	2816,9
Marmo di Carrara . . .	3037	1070,9
Pietra lavagna	8775	3194,5
Pietra della gonfolina molto stagionata . .	4572	1713,7
id. poco stagionata . .	3300	1303,9
Terra cotta da mattoni	1500	848,9

Osservazione. I coefficenti di elasticità che ho contrassegnati col segno * sono stati determinati per mezzo delle vibrazioni trasversali, gli altri de' metalli coll' allungamento, e quelli dei legni e degli altri corpi minerali colla flessione. Onde ai resultati di questi metodi per renderli perfettamente comparabili devono farsi le correzioni che in seguito rammenterò, sebbene le differenze non essendo molto notabili possono spesso trascurarsi.

Mi sembra che per aiutare la memoria si possano i metalli e le loro leghe distinguere in tre classi, denominandoli: poco elastici, come il piombo e il bismuto che hanno un coefficente E′ di circa 200, mediamente elastici il cui coefficente varia da 400 a 1000 circa, e sono in maggior numero, e molto elastici come il ferro e l'acciaio per i quali si può il coefficente valutare 2000. I legni si posson tutti porre in quest'ultima classe giacchè attesa la lor poca gravità specifica danno prossimamente $E' = 2000$. Negli altri corpi non possono i resultati ritenersi che come approssimati perchè li ho dedotti da poche esperienze, pure può ritenersi $E' = 3000$ per il vetro e per la pietra lavagna, e di un valore molto più piccolo per il cristallo e per le pietre friabili.

Per la temperatura varia poco il coefficente di elasticità come si può vedere dalla seguente.

TAVOLA
DE' COEFFICENTI DI ELASTICITA'
A DIFFERENTI TEMPERATURE.

SOSTANZE	VALORI DI E′		
	a 15°	*a* 100°	*a* 200°
Piombo.	1727	1630	——
Oro.	5584	5408	5482
Argento	7140	7274	6374
Rame	10519	9827	7862
Platino.	15518	14178	12964
Ferro.	20794	21877	17700
Acciajo fuso. .	19561	19014	17926

10. *Variazioni di figura prodotte dalla compressione, e dalla distensione.*— Abbiamo implicitamente ammesso nelle cose precedenti che un prisma solido sottoposto ad uno sforzo capace di allungarlo o di accorciarlo, mantenga le sue differenti fibre parallele, e perciò tutte le sezioni della sbarra di eguale ampiezza. Ciò è fisicamente vero per i corpi lunghi e di materia elastica e dura, non però matematicamente, giacchè si vede, i prismi corti e di materia molle assottigliarsi o rigonfiarsi nel mezzo, secondochè sono stirati o compressi, e per analogia questo deve seguire anche nei primi, ma però a sì piccol grado che da non potere riscontrare differenza nelle sezioni alquanto distanti dai punti d'attacco. Può ritenersi che in questi avvenga quello che accaderebbe se a tutte le fibre fossero applicate forze eguali che le facessero avvicinare o allontanare. Adottando queste ipotesi i Geometri della nostra epoca son giunti a determinare col calcolo la legge che lega l'allungamento dei prismi elastici alle contrazioni o espansioni delle loro sezioni, e dei loro volumi. Chiamando a la diminuzione o aumento di sezione è stato trovato

$$\frac{a}{A} = \frac{i}{2} = \frac{l}{2L}$$

Dunque per tutta quell'estensione nella quale gli allungamenti sono proporzionali allo sforzo della contrazione, la distensione nella sezione è precisamente la metà dell'allungamento che ha luogo per ogni unità lineare.

Da questo principio resulta che il volume del prisma aumenta nella distensione ancorchè diminuisca la sezione. Infatti il volume da principio era AL e dopo lo stiramento diviene $(A-a)(L+l) = AL + Al - aL - al$ nella quale espressione può trascurarsi l'ultimo termine come piccolissimo, e l'aumento sarà sensibilmente eguale ad $Al - aL$, lo che porta per accrescimento proporzionale

$$\frac{Al - aL}{AL} = \frac{l}{L} - \frac{a}{A} = \frac{l}{2L} = \frac{i}{2}$$

resultato che stabilito teoricamente da Poisson è stato confermato dall'esperienze di Cagnard De Latour sui fili di ferro sottomessi direttamente alla trazione sempre dentro i limiti nei quali l'elasticità non è alterata in modo sensibile.

Allorchè trattasi di una compressione prodotta da forze le quali agiscano su tutte le parti come sarebbe da un fluido il quale inviluppasse il corpo solido, la diminuzione di una dimensione non potrebbe esser più quella che avevasi quando la forza agiva in una direzione soltanto, ma sarebbe ridotta alla metà. Quindi un prisma premuto su tutte le facce soffre una diminuzione di volume che vien chiamata contrazione cubica, ed è presso a poco tre mezzi della contrazione lineare. Infatti designando con L, L,'L″ i suoi tre lati Primitivi, essi dopo la compressione saranno $L - \frac{1}{2} i L = L(1 - \frac{1}{2} i), L'(1 - \frac{1}{2} i), L''(1 - \frac{1}{2} i)$. I quali valori moltiplicati fra loro col trascurare le potenze superiori della quantità i che è piccolissima daranno $LL'L'' - \frac{3}{2} i LL'L''$. Dunque la contrazione totale cubica è $\frac{3}{2} i LL'L''$. Questa deduzione si applica ai solidi di qualunqne figura sieno, ed anche ai vasi. Per questi ultimi si potrebbe dubitare che non si facesse la contrazione nel modo stesso che avverrebbe se fosser pieni della stessa materia, e perciò invece di diminuire la loro capacità aumentasse assottigliandosi la lor parete, siccome accade in una lastra compressa da tutte le parti. Pure cesserà ogni dubbio se noi avvertiamo che l'esperienza mostra che un vaso si contrae al freddo, e diminuisce di capacità, appunto come farebbe se fosse pieno; e se consideriamo che una verga solida premuta ai due estremi vien contratta in tutte le sue parti proporzionalmente alla loro lunghezza, onde le parti estreme egualmente si contrarrebbèro anche quando fosse levata la parte media, ed in suo luogo venisse sostituito un fluido che per principio di eguaglianza di pressione reagisse nel modo stesso che reagiva la parte media. Si faccia un'applicazione al recipiente del manometro ad acqua (Int. 48). L'esperienze sull'allungamento del vetro danno per media sotto la pressione di un'atmosfera

$$i = \frac{P}{E} = \frac{0,k31033}{7270} = 0,00000142$$

Lo stesso seguirà alla compressione, e chiamando c la capacità primitiva avremo quella dopo la compressione dalla formula $c\ (1 - \frac{3}{2} i)$. Supponendo che la pressione sia uguale ad un numero n di atmosfere avremo $c(1 - 0,00000213\, n)$ purchè sotto tal pressione si mantenga il vetro perfettamente elastico. Questa formula servirà a determinare la diminuzione della capacità del recipiente del manometro ad acqua, ed a dedurre la diminuzione reale del volume dell'acqua da quella apparente.

Non deve confondersi la dilatazione, o compressione cubica di cui si è precedentemente trattato, con quella che ne viene per effetto della temperatura perchè in questa la forza che contrae, o dilata è malecolare, ed agisce sempre in ogni direzione; perciò soppressa la frazione $\frac{1}{2}$ che si era di sopra posta alla i si trova che la dilatazione, o contrazione termometrica lineare è tripla di quella cubica. La formula che darà la capacità di un vaso esposto ad aumenti o diminuzioni di temperature sarà $c(1 \pm 3\, i)$. Questa applicata al vetro, giacchè può ritenersi che un tal corpo per ciascuno dei primi cento gra-

di si dilati di 0,0094 verrà espressa $c(1 \pm 0{,}028\, m)$ essendo m il numero dei gradi. E così ridotta servirà a determinare a qualsivoglia temperatura la capacità dei recipienti, e quindi nei termometri a far dedurre le condensazioni, o dilatazioni reali del liquido termometrico da quelle apparenti, che sono indicate dall'abbassarsi o inalzarsi il livello al crescere o diminuire della temperatura.

Tutto questo è nella supposizione che non si abbia nel corpo un' alterazione permanente come potrebbe provenire per la mollezza o duttilità. Il Wertheim ha sperimentato che molti metalli sottoposti alla trazione aumentano nella loro densità ma però non tutti e più quando sono ricotti che crudi. Eccone i resultati

METALLI LAVOR. e RICOTTI	GRAVITA' SPECIFICA avanti l'allung.	dopo la rottura
Piombo	11,232	11,292
Stagno	7,290	7,292
Cadmio	8,520	8,541
Argento.	10,304	10,193
Oro	18,035	19,186
Platino	20,759	21,029
Rame	8,936	8,890
Ferro di Berry. . .	7,757	7,751
Acciaio fuso	7,719	7,709
Fil d' acciaio ingl.	7,622	7,710

11. ***Resistenza alla rottura per distensione*** — Dalla resistenza elastica, e dalla mollezza forse può dedursi (3) la resistenza alla rottura, ma fino ad ora non essendo assai studiato questo argomento convien ricorrere direttamente ai resultati sperimentali. Chiamato R il coeficiente della resistenza alla distensione, ed A la sezione del solido sarà RA la forza che occorre per produr la rottura in questa sezione. In molti corpi e massimamente nei metalli prima della rottura accade un' assottigliamento notabile nel luogo ove devon rompersi; pure noi supponiamo che sia per A presa la sezione primitiva. Come anche per R intendiamo qui posto lo sforzo necessario a produr la rottura istantanea, o almeno in breve tempo, poichè a tempo lungo son capaci a produr la rottura anche forze molto più piccole di quelle che la producono istantaneamente. Anche questa istantaneità non deve intendersi a rigore; uno o due minuti di tempo non toglierà il carattere della rottura istantanea sebbene a questo elemento del tempo deva attribuirsi notabile indecisione sul punto della rottura.

Una bella serie d' esperienze è stata fatta da Musschenbroek, il quale per molti corpi usò ridurli in prismi o cilindri, e legarne un' estremità al braccio più corto di una stadera fermando saldamente l'altra ad un punto situato inferiormente. Andava quindi scostando il romano sul braccio più lungo, fino a che il prisma si strappava, e notato il segno dove ciò seguiva prendeva il numero corrispondente per la misura della tenacità. Quel numero era dato in libbre d'Amsterdam, e le lunghezze in pollici del Reno; ma noi riportiamo le une ridotte in kilogrammi, e gli altri in metri. Facilmente si comprende come in quest'esperienze debbono evitarsi gli urti e le scosse. Perciò alcuni usano di mettere i pesi in una cassa a piccole frazioni, e di fare abbassare la cassa lentamente per mezzo di viti, o altri simili meccanismi. Che se dovrassi agire per mezzo di leve composte, o per mezzo di taglie, sarà utile porre un dinamometro tra la macchina e il pezzo che si cimenta, onde togliere la difficoltà della valutazione degli attriti. Altre

diligenze devono usarsi circa il tempo che si impiega per caricare il peso (5) che trascurate possono rendere indeterminato il peso occorrente alla rottura.

12. ***Resultati d' esperienze sulla resistenza alla distensione.*** — Dalla tavola seguente, e dalle esperienze che sono state eseguite rilevasi

I. Potersi i metalli distinguere in due classi di tenacità molto differente, e le leghe ritenere una tenacità presso a poco proporzionale ai loro componenti. Questa proporzione non può aversi come esatta, che anzi alcune volte non esiste.

II. Sono i metalli puri in generale meno tenaci di quelli composti, particolarmente quando uno dei composti entra in piccola proporzione; talchè sembra formi come un più compatto impasto introducendosi fra le particelle dell' altro metallo.

III. La resistenza alla rottura nei metalli sensibilmente diminuisce nel ricuocerli. Quando sono stati ricotti anche l' elevazione di temperatura non fa scemar molto la coesione. Moltissimo influisce sulla coesione il modo che si è tenuto nel lavorare il metallo

IV. L' allungamento massimo, e la coesione prendono ne' metalli un diverso valore secondo che si caricano con più o meno tempo, e secondochè è più o meno omogeneo il corpo, dovendo nel caso di una perfetta omogeneità affilarsi indefinitamente, e cader tutto contemporaneamente in polvere. Ambedue queste quantità non possono nelle leghe esser determinate dai valori che hanno nei lor metalli costituenti, come accade nel coefficente d' elasticità.

V. A parità di sezione trasversale sono più resistenti i legni che l' hanno circolare, forse per essere in questa reciso un minor numero di fibre. Molte altre circostanze possono influire sulla resistenza de' legni, come la gravità specifica, la natura e l' esposizione del suolo ove hanno vegetato, il tempo per il quale sono stati stagionati, la posizione del pezzo circa al centro e alla scorza dell' albero ec.

VI. Que' corpi d' origine animale che la natura ci presenta in forma di fili hanno a parità di sezione maggior resistenza, quando i loro elementi sono più finamente lavorati. Ciò scorgesi nei capelli, nei crini, e nelle corde di budello. Questa legge verificasi anche nei fili metallici, e nelle corde di canapa perchè gli uni han sofferta una lavorazione più prolungata, e le altre han pure per la lavorazione più avvicinati gli elementi

VII. La tenacità de' cementi cresce al crescer del tempo da che sono stati usati, ma non in tutti colla stessa celerità nel gesso presto si giunge ad un valore prossimo al massimo di tenacità, e lentamente vi si perviene colla calcina.

TAVOLA

DELLA RESISTENZA ALLA ROTTURA PER STIRAMENTO.

SOSTANZE *ridotte alla sezione di un centim. q.°*		PESO *sostenuto in kil.*		
Metalli tenaci e loro leghe.				
Platino	da	3410	a	3945
id. ricotto	,,	2550	,,	2770
id. in filo di diametro 0,^{mm}127 . . .	,,	11600	,,	——
Oro fuso puro . . .	,,	1459	,,	——
id. lavorato	,,	2700	,,	2840
id. ricotto	,,	1008	,,	1110

Arg. di coppel. fuso	da	2872	a	——
id. tirato.	,,	2900	,,	2960
id. ricotto	,,	1602	,,	1650
Rame fuso	,,	1340	,,	2620
id. martellato . . .	,,	2650	,,	2876
id. tir. in filo gros.	,,	4030	,,	5000
id. ricotto	,,	3040	,,	3168
id. in filo di diam. minor di 1.^{mm} .	,,	7000	,,	——
Palladio tirato . . .	,,	——	,,	2720
id. ricotto	,,	2740	,,	——
Ghisa grigia	,,	1250	,,	1350
Ferro di Germ. fuso	,,	4800	,,	6000
id. tirato in sbarre	,,	2500	,,	——
id. nostrale	,,	4100	,,	5000
Ferro battuto. . . .	,,	4314	,,	6545
id. laminato e stir. nel senso del laminag. e perpendicolarm. a quello	,,	4100	,,	3600
Ferro in fili da 1. a 3.^{mm} in diam. . .	,,	5000	,,	6510
id. ricotto	,,	4020	,,	5025
id. in filo di diam. da 1.^{mm} a 0,^{mm}23. .	,,	8000	,,	9000
Fil di ferro in fasci	,,	5000	,,	——
Catene in fer. dolce	,,	2400	,,	3200
Ferro *ruban* dolciss.	,,	4500	,,	——
Acciajo dolce. . . .	,,	7765	,,	8916
,, temperato a diversi gradi	,,	8053	,,	10785
,, in grossi pezzi.	,,	3600	,,	7500
,, tirato e ricotto.	,,	4000	,,	5390
Oro 19. ferro 2. . .	,,	2041	,,	——
Oro 9. rame 1. . .	,,	2440	,,	——
La stessa lega batt.	,,	3807	,,	——
Oro 6. rame 1. fuso.	,,	3954	,,	——
Oro 7. platino 2. .	,,	712	,,	——
Argent. con pochissima lega.	,,	2984	,,	5536
id. 5. rame 1. . .	,,	4405	,,	5824
Argento 2. pallad. 3.	,,	5046	,,	——
id. 4. stagno 1. . .	,,	3394	,,	——
Rame 2. zinco 1. .	,,	5250	,,	6020
Rame 7. zinco 1 dal fuso al molto lav.	,,	1360	,,	4134
Rame 6. zin. 1. simil.	,,	——	,,	5190

Ottone in filo . . .	da	5000	a	8500
Rame 5. stagno 1. bronzo fuso . . .	,,	2735	,,	2969
Rame 100 st. 11,25 *id.*	,,	2500	,,	4135
Rame 3. antim. 2. st. 4,	,,	——	,,	417
Rame, zinco, nikel, panfong	,,	5500	,,	6810

Metalli poco tenaci e loro leghe.

Stagno fuso purissimo di Malacca. .	,,	226	,,	——
Stagno inglese fuso	,,	259	,,	468
id. tirato.	,,	245	,,	468
id. ricotto.	,,	170	,,	362
Zinco distillato fuso	,,	150	,,	——
id. ordin. fuso . .	,,	189	,,	600
id. tirato.	,,	1280	,,	1577
id. ricotto	,,	——	,,	1440
Cadmio tirato . . .	,,	224	,,	——
ricotto	,,	——	,,	481
Piombo fuso	,,	62	,,	221
id. tirato.	,,	199	,,	300
id. ricotto	,,	——	,,	481
in filo di 4^{mm} in diam.	,,	136	,,	——
Bismuto fuso. . . .	,,	97	,,	229
Antimonio	,,	70	,,	74
Stagno 1 piombo 1, 1/2	,,	246	,,	207
Stagno 1. piombo 1/3, 1/4, 1/5	,,	572	,,	597
Stagno 1. bismuto 1/3, 1/4	,,	1025	,,	1050
Stag. 1 bism. 1/3, 1/7	,,	1080	,,	1175
Stag. 1 bism. 4/3, 10/3	,,	663	,,	819
Stag. 1 zin. 1/2 . . 1/10	,,	722	,,	896
Stag. 1 zin. 1/2, 3 . 5	,,	1056	,,	1125
Stag. 1 ant. 1/2 . . . 1/4	,,	801	,,	920
Stag. 1 antim. 2/3 . . 1	,,	782	,,	886
Piomb. 2 bism. 3 st. 2	,,	174	,,	——
Piombo, ant., stagno,	,,	562	,,	780
Piombo 14. stagno 4. zinco 9.	,,	144	,,	——

Altre sostanze d'origine minerale.

Vetro :	,,	168	,,	326
Basalto d'Alvernia	,,	77	,,	——

Pietra calc. di Portland . . . . da	60 a	---
„ bian. di grana fine „	14,4 „	---
„ litografica . . . . „	30,8 „	---
„ sabbiosa e globul. „	22,9 „	13,7
Mattoni deboli e buonissimi . . . . . . „	8 „	19,5
Gesso . . . . „	3 „	11,7
Cem.° in calce grassa e sabbia dopo 14. anni . . . . . „	0,75 „	4,2
„ in calce idraulica e sabbia . . . . . „	9 „	15

Per il composto

Calcina 2. arena fluviale 3. . .	3,54
Calcina 2. pozzolana 3.	6,93
Calcina 2. mattone polverizz. 3.	11,02

Per il tempo

Calcina da 16. a 18. giorni . .	0,53
6. mesi . . .	1,74
14. anni . . .	5,02
gesso 5. minuti . .	1,95
15. minuti . .	2,30
1. giorno . .	2,92
6. mesi . . .	2,97
14. anni . . .	3,00

Legni nella direzione delle fibre.

Acero fico	836
Acero maggiore	1024
Acero rosso	1119
Acero striato	1141
Ailanto glandoloso	642
Albatro corbezzolo	866
Albicocco comune	1090
Alloro comune.	813
Betula bidollo.	1058
Bossolo balearico.	1242
Carpino comune	1170
Castagno salvatico	1059
Castagno d' Indie.	658
Cedro Acido.	780
Cedro arancico	1251
Cipresso piramidale	1005
Cipresso tuja	595
Citiso maggiociondola	1241
Faggio comune.	1320
Frassino comune	962
Gladitiscia spinosa	834
Moro bianco	561
Noce comune	599
Noce nero	545
Olmo nostrale.	1058
Ontano comune	1112
Pero melagnolo.	635
Pero peruggine.	599
Pino abete bianco	609
Pino abete rosso	668
Pino cedro del Libano	930
Pino larice	782
Pioppo piramidale	502
Pioppo tremolo.	691
Platano orientale.	444
Platano occidentale.	551
Pruno ciliegio canino	1192
Pruno ciliegio di monte	845
Pruno susino salvatico.	946
Quercia ischia	973
Robinia falsa gaggia.	957
Salcio bianco	1005
Sambuco maggiore.	802
Siliquastro comune	984
Sorbo ciavardello	1125
Sorbo salvatico	878
Tasso libo.	1222
Tiglio nostrale	752
Tulipifero legno giallo	524

Legni in direzione normale alle fibre.

Quercia.	160
Pioppo	125
Larice	94

Funi e Fili.

Per la fattura — Fune di canapa coll' accorciamento di $^1/_5$	550
id. coll' accorciamento di $^1/_4$	780

Corde di circonf. 175^{mm}, costruite al metodo antico, sostengono per minimo 7588 e per ogni

centimetro quadro 311
Corde di circonf. 175^{mm} costruite al metodo moderno(Int.189) sostengono per minimo 16723 e per quad. 686
Per il composto — Gherlino di canapa di
Strasburgo diametro 13^{mm} a 17 880
Lorena diam. 13^{mm} a 17 650
Dei due luoghi diam. 23 . . . 600
di Strasburgo diam. 40^{mm} a 54 550
Corde secche 500
bagnate 328
incatramate 380
Fili di lino riuniti 1380

Corpi d' origine animale.

Crini di cavallo tolti dalla coda. Uno del diam. $^1/_{1860}$ di centim. quad. 0,495
Un fascio di 1700 per formare un centim. quadrato. 840
Capelli umani, sette de' quali fan la grossezza del crine. Uno 0,0855
Un fascio di 208000 per il centim. quad. 1820
Fili di seta. Uno 0,0053
Un fascio di 750000 per il centim. quad. 3900
Corde d' intest. del diam. 1,^{mm}3 al centim. quad. 1337
id. del diam. 0,^{mm}8 2750
Cuoio di vitello 180
Cuoio di bove. 380
Avorio 1177
Corno di bove 629
Osso di balena 540

13. *Osservazioni*. — Avendo tolti i dati per la tavola precedente da diversi autori, ed essendo da quelli riferiti (particolarmente per i metalli e per i minerali) differenti risultati ho creduto bene di notare il minimo e il massimo in due colonne distinte. Onde negli usi pratici potremo attenerci alla media, o a quello de' due numeri che sia da preferirsi nella particolarità del caso. Nelle leghe metalliche quando ho indicate più proporzioni, con i due numeri ho inteso di notare la resistenza che hanno le leghe delle proporzioni più distanti.

Per aiutar la memoria dedurrei che nei metalli molto tenaci e loro leghe la resistenza può valutarsi 2000 k. circa sebbene possa molto aumentare per la lavorazione, e particolarmente nel platino, nel ferro, nell'acciaio, e nell'ottone ridotti a fili sottili, crescendo allora fin verso 10000 k. I metalli poco tenaci hanno la lor resistenza verso 200 k. e le lor leghe l'han d'assai maggiore e talvolta fino oltre a 1000. Le altre sostanze d' origine minerale han piccola resistenza allo stiramento, eccettuato il vetro che può esser posto al pari dei metalli poco tenaci. I legni hanno resistenza generalmente non molto al di sotto di 1000. k. nella direzione delle fibre e verso il 100 in direzione normale.

Dalla tavola seguente che è data dal Wertheim sarà facile rilevare come l' elevazione della temperatura possa avere effetto sulla coesione de' metalli.

Effetto della temperat. ne' metalli.

	a 15°	*a* 100°	*a* 200°
Piombo ricotto . .	180	54	——
Stagno.	170	85	——
Cadmio	224	260	——
Zinco.	1280	1220	727
Oro.	1008	1260	1206
Argento	1602	1400	1400
Rame	3054	2210	——
Platino.	2350	2260	1970
Ferro	4688	5110	4690
Acciaio in filo . .	4000	5910	5090

14. *Resistenza delle corde*. — Me-

rita un' articolo separato la resistenza delle corde per il frequente uso che se ne fa in meccanica; e si conoscono due formule empiriche che possono assegnarcela. Una stabilita da Duchamel per i resultati delle sue esperienze è kil. $400\,d.^2$ ovvero kilog. $40{,}5\,c.^2$ ove d, c indicano in centim. il diametro e la circonferenza della corda e porta a 510k. la resistenza per ogni centim. q.° di sezione. L' altra è stata stabilita nei seguenti termini dal Guerigny sperimentando sopra gherlini da 36 a 70. centim. di circonferenza della moderna fabbricazione (Int. 189)

kil. $(33{,}53 - 0{,}00264.\,c^2)\,c^2$

ovvero kil. $(33{,}53 - 0{,}00000061\,n^2)\,n$ ove c, n esprimono la circonferenza, e il numero dei fili commettitori che compongono la corda. Il filo commettitore ha circa 8^{mm} di circonferenza ed è fatto colla sola filatura. Anche il Coulomb aveva stabilito un rapporto tra la resistenza e il numero de fili commettitori dicendo che le corde portano da 50 a 60 kil. per ogni filo commettitore, e che non si devono caricare oltre 40k. Secondo Duhamel la forza delle corde aumenterebbe un poco più rapidamente che il lor peso, o che il numero de' fili commettitori, pure più conforme ai resultati dell'esperienza può ritenersi che la resistenza delle funi di diverso diametro sia proporzionale ai pesi che hanno sotto egual lunghezza, anzichè segua la ragione del quadrato del diametro. In Roma si ritiene dai pratici che il canapo il quale per ogni metro pesa k. 1,739 possa sostenere senza pericolo k. 2036. Con la proporzione dei pesi potrà desumersi a qual forza possono esporsi le diverse corde senza alcun pericolo, essendo i numeri che così si ottengono molto al di sotto di quelli che si possono avere per le precedenti formule. In Pisa e in Livorno si ha la regola che ogni filo commettitore del canapo può sostenere lib. 160, e questa regola sembra un poco ardita, giacchè è assai al di sopra anche di quella di Coulomb. Non si potrà dunque estendere alle funi che hanno i fili commettitori più sottili, nè ai canapi che mista alla canapa contenessero della stoppa.

Le corde fatte secondo i principj della moderna costruzione sono più resistenti delle corde lavorate all'antica, ed anche più flessibili. Per far comprendere quanto sia utile nelle corde grosse il processo moderno di fabbricazione avvertirò che in quelle la cui circonferenza è maggiore di 175^{mm} si può ritenere aumentata la resistenza in un rapporto non minore di 21 : 10 in confronto con quelle fabbricate al metodo comune; e nelle corde più sottili, in generale rappresentando con F, f le resistenze delle corde costruite nei metodi antico e moderno, ed m il numero de' fili per ogni funicolo si ha

$$F = f\left(1 + \frac{m}{70}\right)$$

Per la marina si fan delle corde incatramate per difenderle dall'acqua, ma queste si recidono più presto alle piegature, sono più rigide, ed anche un 1/4 circa meno resistenti delle bianche. Anche le corde bagnate resistono meno di quelle asciutte, e circa un terzo di meno. Parimente il grasso, il sapone, gli oli ec. sono più nocivi che utili. Tutte queste circostanze influiscono sulla resistenza moltissimo, ed anche più v' influisce la qualità della canapa che vi si adopra, onde per la marina prescrivesi canapa di prima qualità e senza stoppa, e buona regola è quella di visitare il canapo in un

punto non tanto prossimo all'estremo sfilandolo per giudicare della resistenza dalla natura del composto.

15. ***Resistenza alla rottura per compressione.*** — La formula per questa sarà R' A ove A rappresenta la sezione ed R' il coeficiente determinato dall'esperienza, ovvero la resistenza per ogni unità di sezione. Ed in questa resistenza non possiam dire come di quella allo stiramento, che la lunghezza del solido non influisca; lo che anche quando ciò fosse per teoria, non avviene in pratica giacchè il pezzo compresso se ha notabile altezza si piega, e resiste molto meno di quello che sotto egual sezione ha minore altezza.

Per fare sperienze su questo soggetto si preferisce di dare al solido la forma cubica, come quella che tra i prismi di una data sezione presenta secondo l'esperienza di Rondelet la maggior resistenza, quando la sezione è assai grande; poichè trattandosi di sezione molto piccola si trova crescere la resistenza a misura che scema l'altezza. Conviene agire sovra il solido con una leva resistentissima, o con una qualche pressa potente, onde ottenere forza capace di produr lo schiacciamento, e per questo si interporrà se è possibile tra la macchina e il corpo compresso un qualche dinamometro che faccia apprezzare gli sforzi della compressione, o almeno converrà per mezzo del calcolo dedurli sottraendo l'effetto delle resistenze nocive.

16. ***Resultati d'esperienze sulla resistenza alla rottura per compressione.*** — Le esperienze eseguite da Rendelet, Gauthey, Resnie, e Vicat han mostrato

I. Che le qualità fisiche delle pietre come la durezza all'intaccamento, il peso specifico, il colore non posson servir d'indizio per giudicare con esattezza della lor resistenza. Pur non ostante in un medesimo blocco i pezzi più densi, più compatti, più omogenei, e di grana più fine sono i più resistenti.

II. In prismi simili la resistenza è sensibilmente proporzionale all'area della sezione trasversale. E per quanto possa l'altezza influire sulla resistenza deve ritenersi che essa cresce al crescere della sezione trasversale.

III. Nei prismi d'eguale altezza la resistenza è tanto minore quanto più irregolare e differente dal cerchio è la base. La resistenza di un cubo essendo rappresentata per l'unità, quella del cilindro iscritto posato sulla sua base è 0,80; quella del medesimo cilindro posato sovra una delle sue faccie è 0,32; e quella della sfera iscritta è 0,26

IV. Fra i prismi di egual base la resistenza è maggiore in quelli che hanno minore altezza; seppure non si tratta di una base alquanto ampia, giacchè allora il cubo è la forma di maggior resistenza. E presa per uno la resistenza presentata da un cubo, essa verrà ridotta a $^5/_6$ e ad $^1/_2$ per i pezzi di legno la cui altezza sarà 12 e 24 volte il più piccol lato della base; in questi casi per le sbarre di ferro lavorato si ridurrà $^5/_6$ e $^1/_2$; a $^2/_3$, $^1/_2$, $^1/_3$ per il ferro fuso che abbia un altezza 4, 8, 36 volte il lato più piccolo della base, e a $^1/_6$ tanto per i legni che per il ferro quando hanno in altezza 48 volte il lato più piccolo della base.

V. Le pietre dure cedono pochissimo alla pressione, e si dividono tutte ad un tratto in lame e in aghi senza consistenza, e facilmente riducibili in polvere. Lo pietre tenere

nel primo istante della rottura si dividono in piramidi o in coni che han per base le facce superiori o inferiori.

VI. I legni sottomessi alla compressione che presso a poco son lunghi quanto larghi si rompono facendo un rigonfiamento trasversale e fendendosi per lungo. Quando la lor lunghezza eccede 10, o 12 volte il lato minore della base si piegano e si rompono trasversalmente.

VII. Negli alberi, che non hanno compito il loro incremento verso il centro del tronco il legno è più duro che verso la circonferenza; e negli alberi che l'hanno ultimato, la durezza è quasi eguale dal centro alla cisconferenza; in quelli poi che cominciano a deperire il centro è men duro.

VIII. Nella seguente tavola ho distinto i marmi e le pietre dure che ordinariamente sono le vulcaniche, granitiche, siliciose e argillose, dalle pietre tenere come molte delle calcaree, terre cotte, e cementi, onde meglio si apprezzi la differente resistenza che esse presentano.

TAVOLA

DELLA RESISTENZA ALLA ROTTURA PER COMPRESSIONE.

SOSTANZE	PESO *specifico*	RESISTENZA *in kil. per 1 centim. q.*
Marmi		
Porfido	2875	2470
Basalto di Svezia	3065	1912
Idem d'Alvergna	2884	880
Granito di Normandia	2660	702
Granito verde di Vosges in Francia	2854	619
Granito bigio di Vosges	2640	413
Granito bigio della Brettagna	2737	654
Gr. turch. d'Aberdeen	2625	775
Granito di grana stretta di Peterhead	——	558
Granito di Cornovaglis.	2662	451
Gres durissimo bianco o rossastro	2500	870
Marmo nero di Fiandra	2720	404
Marmo bianco statuar.	2695	327
Marmo bianco italiano venato	2726	687
Marmo rosso inglese	——	527
Pietre dure.		
Arenaria durissima rossigna	2517	813
Arenaria bianca	2476	923
Beola, pietra di Bevera presso il lago Magg.	2551	462
Ceppo pietra presso Milano	2222	99
Lava vesuviana di color cupo	2642	635
Lava vesuviana dura	2600	590
Lava tenera di Napoli	1970	230
Macigno pietra serena di Fiesole	2559	422
Piperino tufo presso Roma	1973	228
Pietra di Caserta presso Napoli	2718	595
Pietra d'Angera presso Milano	2338	321
Pietra di Veggiù presso Milano	2237	209
Travert. di Tivoli presso Roma	2339	298
Vigano pietra di Milano	2203	136
Pietra della Gonfolina presso Firen non stag.	2567	266
La med. stagionata	——	471
Pietra d'Istria	3618	512
Pietra di Portland nell'Inghilterra	2428	323

Pietra silicea di Dundec	2530	471
Piet. di Givri in Francia	2357	193
Roche, pietra conchigliosa presso Parigi.	2094	122
Banc-Franc Pietra di *Mont Rouge* presso Parigi.............	2355	258
Cliquart pietra presso Parigi............,	2439	479
Grit pietra silicea ingl.	2316	223

Pietre tenere.

Scoria vulcan. dei contorni di Roma e di Napoli...............	890	37
Scoria vulcanica di seconda qualità cs....	789	26
Tufo vulcanico di Roma e di Napoli........	1217	58
Pietra da Gesso.......	1906	67
Pietra pomice pr. qual.	675	42
Idem seconda qualità .	605	35
Idem terza qualità....	556	28
Gres tenero..........	2490	4
Pietra tenera di Givri.	2081	88
Lambaurde pietra adoprata a Parigi di qualità inferiore	1561	23
Vergese Pietra di Parigi	1831	00

Terre cotte.

Mattoni duri moltissimo cotti...........	1560	150
Mattoni rossi.........	2170	60
Idem poco cotti......	2090	40
Iedm bruciati o vetrific.	——	100

Cementi.

Gesso spento nell'acqua	——	50
Gesso spento nel latte di calcina..........	——	73
Cemento ordin. di calcina e sabbia	1600	35
Il medesimo battuto ..	1690	42
Cemento in pozzolana di Napoli e di Roma.	1460	37
Il medesimo battuto...	1680	53
Cemento di calce grassa e sabbia ordinaria vecchio da 14. anni..	——	19
Idem in calce idraulica ordinaria..........	——	74
Idem in calce eminentemente idraulica...	——	744

Metalli.

Ferro lavor. il migliore.	7800	6000
Ferro lavorato debole ..	——	2500
Fonte grigia e dolce di prima fusione......	7600	10000
Fonte di sec. fusione.	——	9900
Fonte di ferro per i cannoni	——	2500
Rame fuso...........	8788	4938

Legni.

Acero fico............	674	517
Acero maggiore......	623	444
Acero rosso..........	629	451
Acero striato.........	554	461
Ailanto glandoloso....	820	430
Albatro corbezzolo	—	566
Albicocco comune.....	790	671
Betula bidolla.........	702	460
Bossolo balearico.....	919	771
Bossolo comune......	760	546
Castagno salvatico....	685	508
Cedro acido..........	—	460
Cedro arancico.......	—	452
Cipresso piramidale...	651	463
Cipresso tuia.........	—	396
Citiso maggiociondolo.	973	468
Faggio comune.......	720	527
Frassino comune.....	787	594
Cleditiscia spinosa....	676	656
Castagno d'India.....	657	368
Moro bianco..........	755	551
Noce comune.........	656	403
Noce nero............	827	378

Olmo nostrale........	700	575
Ontano comune.......	655	417
Pero melagnolo	736	383
Pero peruggine.......	708	436
Pino abete bianco.....	498	477
Pino abete rosso......	487	455
Pino cedro del libano.	603	385
Pino larice...........	656	482
Pioppo piramidale	398	364
Pioppo tremolo	527	383
Platano orientale	558	467
Platano occidentale ...	720	503
Pruno ciriegio canino.	865	224
Pruno ciriegio di monte	714	498
Pruno susino salvatico.	762	451
Querce ischia	905	431
Rubinia falsa gaggia...	791	599
Salcio bianco.........	449	431
Sambuco maggiore ...	—	422
Siliquastro comune ...	687	458
Sorbo ciavardello	879	785
Sorbo salvatico	739	524
Tasso libo............	778	735
Tiglio nostrale	549	383
Tulipifero............	477	365

17. *Osservazioni*. – Sebbene non si scorga un rapporto determinato tra il peso specifico e la resistenza allo schiacciamento può ad aiuto della memoria rilevarsi dalla precedente tavola che il numero il quale rappresenta la resistenza allo schiacciamento non supera quello del peso specifico, sebbene alcune volte li si avvicini molto come nel porfido, nel ferro, ed in pochi legni: sola eccezione fa la fonte seppure ha da ritenersi per ben determinata la sua resistenza. Il rapporto di questi numeri varia nelle pietre molto resistenti tra $^1/_8$ $^1/_4$ ed anche fino ad $^1/_{10}$. Nelle pietre tenere, cementi e terre cotte da $^1/_{20}$ ad $^1/_{60}$ circa, non contando il gres tenero che può aversi per una pasta, ed il cemento eminentemente idraulico, o i mattoni moltissimo cotti, che posson riporsi fra i solidi molto resistenti. Nei metalli, e nei legni quel rapporto ben di rado diviene un mezzo.

18. *Resistenza dei massicci di pietra*. — I resultati precedenti sono relativi ai corpi cubici di un sol pezzo, *monoliti:* allorchè si soprapongono più di questi pezzi, la resistenzo sull'unità di superficie diminuisce moltissimo, e forse in gran parte influisce l' imperfetta coincidenza in tutte le parti delle superfici sopraposte. Per i cubi di 5 centim. di lato, tagliati nel modo ordinario e sopraposti in numero di tre Roudelet ha trovato che la resistenza si riduceva a $^2/_5$, e Vicat per pezzi cubici di uno a due centim. di lato tagliati con cura quando erano

2 sopraposti a 0,93
4 . . . . . „ 0,86
8 . . . . . „ 0,83

I cementi interposti fra le congiunture orizzontali devono diminuire la differenza della resistenza, ma pochissimo influiscono nelle congiunture verticali, la multiplicità delle quali produce una più dannosa influenza. Per l'esperienze dello stesso ingegnere un cubo di tre centim. di lato perde $^1/_6$ della sua forza quando si compone di 8 piccoli cubi.

19. *Resistenza permanente*. — Fin da quando abbiam detto (5) che i solidi cedono per la loro mollezza o duttilità ai pesi, e tanto più quanto per maggior tempo rimangono da questi aggravati, siam venuti a distinguere la resistenza temporaria da quella permanente. Abbiamo stabilita una formula per fare apprezzare nei legni e nei metalli l'effetto del tempo sull'alterazione che i corpi risentono dai pesi che li aggravano; che se quella formula fosse stata precisa e non empirica si sarebbe potuto con precisione dedurre

anche quella della resistenza permanente. Valendosi infatti della riflessione fatta dal Gestner, che la forza resistente deve esser nulla quando non si è prodotta alcuna alterazione nel corpo, cioè non è esso sottoposto a sforzo alcuno, e deve parimente ritornar nulla nell'atto della rottura, quando cioè l'alterazione ha toccato un limite, la potremo rappresentare con

$$R = e\,(U - e\,V)$$

ove R è la resistenza, e l'alterazione sofferta dal solido, e U, V sono due coefficenti da determinarsi coll'esperienza, e fatto qui

$$e = P\,(c + a + b\,\sqrt[5]{arc.\,tang\,T})$$

ove c è un coefficente che dipende dall' elasticità, e le altre lettere hanno i valori sopra espressi, si otterrà una formula che per lo meno può approssimativamente farci comprendere come i diversi elementi entrano nella determinazione dalla resistenza alla rottura. I resultati dell'esperienze d' Ardant su' fili metallici mostrano nel filo d'ottone ricotto e del diametro 1.mm la maggior regolarità negli allungamenti, i quali fino alla rottura son tali che possono esser dati dalla seguente formula

$$x = 0{,}1125.\,P + 0{,}00050\,P\,(1{,}6)^{0{,}8}$$

nella quale P rappresenta il carico in kil. ed x gli allungamenti per ogni metro espressi in millimetri, i numeri danno per questo caso particolare i valori delle quantità c, a, e poichè la rottura accadde quando l'allungamento era 115.mm essendo la lunghezza L primitiva un metro avremo a questo limite

$$x = e = \frac{U}{V} = 0{,}115\,L$$

L'esperienze han mostrato al Vicat che un filo di ferro sospeso verticalmente, e tenuto in quiete quando è carico di un peso eguale ad 1/4 o ad 1/8 di quello, che produrrebbe la rottura istantanea, può star degli anni interi prima che le sue particelle abbian prese nuove posizioni d'equilibrio stabile. Ed il Wertheim ha riconosciuto nei metalli che le alterazioni dipendenti dalla permanenza del carico si fan per gradi insensibili, e non vi ha alcun limite della perfetta elasticità. Contuttociò non solo, come anche dalla formula precedente apprendiamo, devesi ammettere che dopo non lungo tempo si fanno estremamente piccole le successive alterazioni nel corpo ma anche dopo un tempo assai grande queste devono cessare, giacchè abbiamo infiniti esempj di costruzioni esistenti da molti secoli, le quali conservano ne' materiali elasticità sufficienti a fare equilibrio alle forze inerenti alla costruzione, ed eziandio a quelle accidentali cui di tanto in tanto vengono esposte.

20. *Limite dell'elasticità naturale, e allungamento maximum dei metalli.*-- Sebbene come ho detto non si possa ritenere che esiste un limite d'elasticità naturale, pure supposto che si abbia a trascurare l'allungamento quando non eccede 0,m00005, alcuni fisici, il Lagerhjelm il Wertheim ed altri, si sono dati cura di determinare il peso che è necessario a produrre la minima alterazione o allungamento permanente nei metalli e principalmente nel ferro al quale è stato dato il nome di limite d'elasticità. Questi resultati sperimentali sono tanto più utili in quantochè possono servire alla determinazione della resistenza permanente. Non vi ha regola per poter col ragionamento dedurre questo limite, e solo può dirsi che più lontano è nei metalli più resistenti, e per i ferri crudi che

per i duttili e teneri, e in generale più per i metalli incruditi che per quelli ricotti. Nelle leghe non segue la proporzione dei componenti, come neppur la seguono la lor coesione, e il limite degli allungamenti che precede la rottura. Anche l'allungamento massimo che possono i metalli subire prima di rompersi per quanto non sia esattamente determinabile è utilissimo conoscersi per essere uno degli indizj assai certi della prossima rottura. Io adunque oltre al riportare una tavola che può indicare quel limite, e l'allungamento *maximum*, osserverò che chiamato i l'allungamento proporzionale d'elasticità del ferro, ed I l'allungamento proporzionale *maximum* all'istante della rottura, si suol porre fra questi la relazione approssimativa

$$i\sqrt{I} = 0,000281$$

la quale può servire a trovare I quando è conosciuto i per mezzo del coefficente d'elasticità (8). Per esempio in un ferro che dà $i = 0,000056$ si avrà

$$\sqrt{I} = \frac{0,000281}{0,000056} = 0,05 \text{ ed } I = 0,0025$$

cioè si allungherà quel ferro al più di $^1/_{400}$ della sua lunghezza primitiva. Non sarà però bene affidarsi del tutto a questa formula perchè a molti resultati d'esperienza non ha corrisposto, come anche potrà vedersi confrontando questa formula colla tavola seguente. Circa ad essa devo avvertire: i numeri che vi sono registrati come limiti d'elasticità, i quali son tratti dall'esperienze del Wertheim, non posson dirsi inerenti alla sola elasticità, ma anche a quel primo grado della mollezza che produce alterazioni proporzionali ai pesi. La distinzione fra l'elasticità e questa mollezza non so che prima di me altri la ponesse, è tanto più trovo motivo d'insistervi per essere il suo effetto ne' resultati sperimentali confuso con quello dell'elasticità.

TAVOLA
DEL LIMITE D'ELASTICITA' E DELL'ALLUNGAMENTO MASSIMO NEI METALLI
alla temperatura ordinaria

METALLI	LIMITE D'ELAST. *in kil. per un centim. quadro*	ALLUNGAMENTO *massimo*
Piombo tirato	25	0,243
ricotto	20	0,614
Stagno tirato	40	0,430
ricotto	20	0,230
Cadmio tirato	12	0,446
Oro tirato	1350	0,0008
ricotto	300	0,046
Argento tirato	1100	0,045
ricotto	250	0,168
Zinco tirato	75	0,505
ricotto	100	0,270
Palladio tirato	1800	0,1002
ricotto	<500	0,205
Rame tirato	1200	0,003
ricotto	<500	0,220
Platino tirato	5250	0,0009
ricotto	<500	0,0025
Ferro Svedese in sbarre	1720	0,026
— Inglese	1330	0,109
— in grosse sbarre .	1800	——
— in filo di diametri 1,mm20.....	1500	0,0031
Acciajo fuso tirato	5560	0,003
ricotto ...	<500	0,011
— in sbarre	2900	——
— in lastre	6600	——
— in filo tirato ...	4250	0,0006
ricotto ...	1500	0,0044

Leghe

Piombo 55 platino 1....	40	0,026
Piombo 4 zinco 1......	10	0,060
Piombo 2 zinco 1	20	0,060
Stagno 2 zinco 1	20	0,346
Stagno 1 zinco 3......	20	0,082
Stagno 1 zinco 5......	40	0,023
Argento 2 palladio 3 ..	2023	0,004
Argento 1 rame 1	2125	0,002
Zinco 1 rame 2........	1500	——
Ottone di Berlino	2500	0,002
Similoro..............	4000	0,001
Pacfong duttilissimo ...	3000	0,001
idem di commercio ..	4500	0,002

21. *Modo di determinare la resistenza permanente.* — Sapendo quale è la resistenza istantanea alla rottura si tratta di dedurre quella permanente almeno con metodi di approssimazione. E questo può ottenersi nei seguenti modi. 1.° Conosciuto per mezzo del calcolo che in una costruzione esistente da lunghissimo tempo le parti di un corpo han sostenuto permanentemente, e senza sensibile alterazione un certo carico, si confronterà questo sforzo con la resistenza istantanea che dall'esperienze dirette resulta per quel dato corpo, ed il rapporto si stabilisce come costante per dedurre dalla resistenza istantanea quella permanente. Questo metodo è quello usato dal Belidor, dal Muschembroek, dal Buffon, dal Duhamel, dal Peronnet, da Rondelet, da Gauthey ec. 2.° Allorquando non si abbia nessuno esempio di una costruzione antica, ove si presuma moltissimo cimentata la resistenza permanente di un corpo e assai prossimamente al limite, ovvero si debba stabilire il rapporto predetto tra sostanze di un genere, per applicarlo a sostanze di genere molto differente, come per esempio sarebbero le pietre e i metalli, tornerà utile desumere la resistenza permanente dal limite dell'elasticità perfetta; cioè il più gran peso che può un corpo sostenere, mantenendo non elasticità perfetta ma proporzionalità tra i pesi e le alterazioni, misurerà la resistenza permanente. E di quest'ultimo metodo han fatto uso i moderni ingegneri Coulomb, Giraud, Duleau, Tredgold, Navier, Lagerhjelm ec. L'uno combinato coll'altro deve più facilitare la ricerca, sebbene alla determinazione della resistenza permanente non si giunga con essi, perchè a parlar propriamente non esiste il limite della perfetta elasticità, non si sa anche se quando il corpo ha acquistato un'alterazione permanente possa col tempo ricevere una posizione d'equilibrio stabile, e neppur può conoscersi se il carico che è sostenuto da un solido in un'antica costruzione esistente sia prossimo a quello che forma il limite della resistenza permanente. Può dirsi anzi che ambedue i precedenti metodi porteranno a dei numeri molto minori di quelli che si hanno da assegnare per valore alla detta resistenza.

D'altronde il Rondelet ha osservato che quando il carico sorpassa la metà di quello che produce la total rottura le pietre si fendono, e dan segni manifesti di disorganizzazione interna, e Vicat sperimentando sull'influenza del tempo ha concluso che il carico permanente delle pietre può esser circa un quinto di quello che produce la rottura istantanea. Si ha da aggiungere che per la stabilità non deve il solido caricarsi mai di tutto il peso che può portare, e che per le ingiurie che possono da cagioni diverse avvenire nel solido alla sua superficie, si ha da suppor fatta una riduzione nella sua sezione.

Quindi gli ingegneri esperti han fissato che un decimo circa del carico che produce la rottura sia il limite *maximum* permanente del quale si hanno a caricare le pietre, e che convien ridurlo ad $^1/_{15}$ o $^1/_{20}$ per i muramenti o riunioni di pezzi e per i piediritti isolati che hanno moltissima altezza in confronto alle altre dimensioni. Parimente il $^1/_{10}$ il $^1/_6$ o il $^1/_4$, della resistenza istantanea, secondo che trattasi di legno, di ferro, o di corde, è lo sforzo *maximum* al quale potranno esporsi permanentemente. In qualche costruzione di durata temporaria si aumenta il carico dei legni anche fino al quinto se la deformazione che soffrono non rechi danno. Le corde per non lungo tempo si possono esporre anche a sforzi che eguagliano la metà della resistenza alla rottura, e tanto più in quanto che si può avere un salutare avviso della rottura nel loro allungamento che suole essere tra $^1/_6$ e $^1/_{10}$ della lunghezza primitiva.

Da queste regole generali convien pur troppo nella pratica spesso discostarsi per le scosse accidentali alle quali può andar sottoposta la costruzione, pure mai dovrà sovrapporsi un peso totale composto di una parte permanente ed una accidentale che ecceda per le pietre, per i legni, e per il ferro $^1/_5$ o $^1/_4$ di quello della rottura. Quest'ultima regola si accorda con un fatto d'esperienza di Mougolfier, ed è che la durata del miglior ferro di Borgogna compiegato per le presse a carta d'Annonay, non ha sorpassato cinque o sei mesi sotto uno sforzo di trazione di 8 kil. per mill. Finalmente gli autori inglesi e Navier stabiliscono che non si deve caricare permanentemente la fonte più di $^1/_4$ del carico della rottura (3 ch. 20 per mill.) e può anche dirsi che un simil carico non presenterebbe sicurezza in costruzioni esposte a forti scosse. Queste regole si applicheranno anche agli altri metalli modificandole secondo l'analogia maggiore o minore che presentano col ferro e colla ghisa, finchè si manca d'esperienze dirette. La regola suggerita da alcuni autori inglesi di caricare il ferro di un peso permanente eguale ad $^1/_5$ (12 a 13 kil.) circa nella costruzione dei ponti, purchè sia ciascuna sbarra stata provata a 16 o a 18 kil. per millim. quad., sottopone al rischio di snervare il metallo nell'atto della prova. Ed in francia nella costruzione de' nuovi ponti si è ridotto il carico di prova a 10 e a 12 kil. e il peso permanente a 6 ovvero 7 kil., al più, mentre per le verghe a soli 2 kil. a motivo delle scosse alle quali sono sottoposte.

L'esame delle costruzioni reputate anche le meno leggeri porta a concludere che solo quando trattasi di piccole moli il carico giunge ad $^1/_8$ della resistenza istantanea, ma quando si hanno grandi fabbriche non suole essere che circa il quindicesimo. Riporteremo qui le pressioni esercitate sopra una superficie di un centim. quadrato in alcune costruzioni che si ritengono come le più ardite.

Pilastro nella Chiesa di S. Pietro in Roma. . . . . kil. 16,4
Pilastro della Chiesa di S. Paolo in Londra . . . . . „ 19,4
Pilastro della Chiesa degli Invalidi a Parigi . . . . . „ 14,8
Pilastro della Chiesa di S. Genevieva a Parigi . . . . „ 29,4
Colonna di S. Paolo di Roma nella costruzione antica . . . . „ 19,8
Pilastri della Torre della Chiesa dei Ss. Martiri a

Parigi. . . . . ,, 29,4
Colonna della Chiesa di
Omnes Sancti d' Angers . ,, 44,3

Queste colonne della Chiesa d'Omnes Sancti d'Angers che soglion darsi per l' esempio il più sorprendente del carico sostenuto sono formate di una pietra calcarea di gres rossastro conchiglioso e durissimo, del quale un cubo che abbia un centimetro per lato avrebbe bisogno per esser rotto di k.437,6 di pressione, onde vedesi che in quell'arditissima costruzione non sostiene la colonna neppure un nono del peso che produce la rottura.

22. *Regole e formule per la pratica sulla resistenza allo stiramento ed alla compressione.* — Non tutti i dati che io riporto come resultamenti d' esperienza possono direttamente prendersi nella pratica, appartenendo quelli a fatti particolari sù quali può avere influito la special natura del solido che ha formato soggetto dell'esperienza. Quindi in aggiunta alle cose premesse richiamando in particolar modo l' attenzione dei pratici al §. 21 stabilirò che

I. Si prenderanno delle medie fra i resultati ritenuti nel caso che si richieda una regola generale, ma se preme assicurare la stabilità converrà far conto soltanto dei resultati più piccoli, ammenochè non si abbian motivi particolari per prescegliern altri.

II. Nelle costruzioni permanenti sarà prudenza non sottomettere i corpi che a sforzi eguali alla metà di quelli che corrispondono al limite d' elasticità.

III. Che se i pezzi non sono esposti a scosse accidentali, e la loro leggerezza, o piccola mole, forma una condizione richiesta si potrà valutare lo sforzo di trazione anche $^5/_4$ di quello che corrisponde al limite d' elasticità.

IV. Non tanto per comodo degli esercenti, quanto per accennar loro il modo di dedur regole, io terrò l' uso di stabilire delle formule di pratica. E questa volta per sempre avviserò che sebbene lo abbia usata ogni cura possibile onde por buone formule, pure consiglio l'abile esercente a tener dietro alle dottrine che avran preceduto la formula stabilita, onde possa decidere se quella proposta sia adattata al suo caso particolare.

V. Per voler l'allungamento o l' accorciamento l che si produce entro i limiti dell' elasticità in un solido prismatico stirato o compresso da un peso P, rappresenteremo con A la sezione con L la lunghezza del prisma, con G la gravità specifica, e riterremo

per il rame $l^m = \dfrac{Pk\ L^m}{1177 . G . A^{mm}}$

per il ferro $l = \dfrac{P . L}{2464 . G . A}$

per i legni $l = \dfrac{P . L}{2000 . G . A}$

VI. Per calcolare il peso che posson sostenere all' allungamento i solidi prismatici riporterò due formule: una pel caso che voglia valutarsi il peso da sostenersi per poco tempo, cimentando fin prossimo al *limite* della rottura il corpo, e l' altra pel caso che vogliasi un peso che non produca con *sicurezza* la rottura anche dopo molto tempo

	al limite	*con sicurezza*
Ferro	. Pk= 40. A^{mm}	. Pk= 7.A^{mm}
Ghisa	. P = 13. A . . .	P =25. A
Legni	. P = 7. A . . .	P =0,7. A
Corde	. P = 5. A . . .	P =2,5. A

VII. Per calcolare il peso che posson sostenere alla compressione i solidi prismatici nei casi precedenti

Ferro	. P = 60. A . . .	P = 10. A
Ghisa	. P =100. A . . .	P = 17. A
Quercia	P = 0,3. A . . .	P =0,03. A
Abeto	. P = 0,4. A . . .	P =0,04. A

Muramento a pietre squadrate, (p rappresenta il peso che produce la rottura in quella determinata pietra che si adopra)

$P = 0,07\, p.\, A^{mm} \ldots P = 0,07.\, p.\, A^{mm}$

Muramento a pezzi informi

$P = 0,05\, p.\, A^{mm} \ldots P = 0,03.\, p.\, A^{mm}$

VIII. I pini che si pongono nei fondamenti delle fabbriche siccome sono sostenuti lateralmente dalla terra possono caricarsi da 30 k, a 35 k per centim.° q.° di sezione trasversale. Onde chiamato d il diametro in centimetri il carico, che può un pino sostenere sarà

$$P = \frac{d^2}{1,273} \times 35$$

23. *Applicazioni.* — I. Qual lato dovrà darsi ad una catena o verga di ferro di sezion quadrata che abbia a sostenere k. 7500?

La formula

$P = 7.\, A^{mm}$ darà $7500 = 7.\, l^2$

ovvero $l = \sqrt{1071,4} = 32,^{mm}7$

II. Qual lunghezza dovrà darsi ad un filo di piombo che ha un diametro di 4.^{mm} acciocchè tenuto pendente da un punto fisso si strappi per il proprio peso? La gravità specifica del piombo è 11,3 e la resistenza per un mill.° q.° è k. 1,36 onde per la formula $P = 1,36\, A$ avremo

$\pi \,.\, 4^2 \,.\, l \,.\, 11,3 \,.\, 0,000001 = \pi \,.\, 4^2 \,.\, 1,36$

ed $l = \dfrac{1,36}{0,000001 \,.\, 11,3} = 120,^{m}4$

III. Di qual diametro si deve scegliere una corda di canapa perchè resista ad uno sforzo di k. 1000? Per la formula $P = 2,5\, A^{mm}$ si porrà

$$1000 = 2,5.\ {}^1/_4\ \pi.\ d^2$$

e perciò

$$d = \sqrt{\frac{4 \,.\, 7 \,.\, 1000}{22 \,.\, 2,5}} = 22^{mm}$$

che se io avessi usata la formula (14) $400\, d^2$ avrei trovato $d = 16^{mm}$ circa ma non con molta sicurezza si sarebbe con una corda sì piccola potuto fare per lungo tempo lo sforzo richiesto: si sarebbe infatti ottenuto il diametro di 16^{mm} anche dalla formula $P = 5.\, A^{mm}$.

IV. Di quanto si accorcierà una colonna di quercia di sezione quadrata con lato $335,^{mm}$ e lunga $3,^{m}9$. quando questa venga sopracaricata di un peso di k. 28000? Il coefficente dell'elasticità della querce e 2000 circa: sia la gravità specifica della querce che si usa 0,768 per la formula

$$l^{m} = \frac{P\, L^{m}}{2000\, G\, A^{mm}}$$

si avrà

$$l = \frac{28000 \,.\, 3,9}{2000 \,.\, 0,768 (335)^2} = \frac{273}{430941} = 0,^{m}0006$$

Quantità troppo piccola per suppor che possa recar danno nella pratica, anche quando si deva aumentare del doppio per la piegatura che soffrono le fibre nell'estremità.

V. Qual è il più gran carico che può esser sostenuto da un pilastro di muramento? Si tratti di pietra squadrata calcarea tenera la cui resistenza è di k. 120 per centim.° q.°, ed ha per peso specifico k. 2070: sia la sezione del pilastro un metro q.°; presa la formula $P = 0,7\, p.\, A^{mm}$, si avrà $P = 0,7 \times 1,20 \times 1000000 = 840000\, k$, ma per sicurezza non si caricherà oltra a 84000 k. Che se poi si tratti di muramento alla rinfusa si useranno le altre formule adattate (22), e si caricherà di soli 30000k.

VI. Si voglia determinare la massima altezza che si può dare ad un pilastro parallelopipedo costruito di pietra calcarea tenera squadrata, quando ha da reggere solamente sè stesso: avremo $2070 \,.\, x = 1200000 \,.\, 0,7$ cioè $x = 405,^{m}7$ sarebbe l'altezza capace a produrre la rottura istantanea del pilastro. E qui osserveremo che quando si tratti di pezzi non bene squadrati, e non molto grandi, invece di diminuire la

resistenza nel rapporto di 1 : 0,7 si dovrà anche ridurre per esser sicuri ad un decimo, ed allora si avrebbe $x = 58^m$ circa. Che se un carico aggiunto di 70000k. dovesse esser portato dal pilastro per ciascun metro quadrato si avrebbe

$$2070 . x + 70000 = 0,1 . 1200000$$

cioè $x = 24^m$ circa.

24. *Osservazioni sopra la forma di alcuni oggetti naturali, e sulle forme da preferirsi in alcune parti degli edifizj.* — Posto che un solido cilindrico compresso tende per la sua mollezza (10) a rigonfiare al suo mezzo, può dirsi che ivi é la più debole sezione. Che se la forza comprimente proviene dal peso stesso del solido, allora la sezion più debole è alla base come quella che ha da sostenere un maggior carico. Nel caso adunque che il solido possa deformarsi per il proprio peso, e per un carico addizionale, possiam dire che la sezione di minor resistenza si troverà tra il mezzo e la base; e scenderà tanto a questa più prossima, quanto più il peso del solido sorpassa il carico addizionale, e viceversa. Egualmente si dedurrà che di un solido sospeso e stirato il luogo di più facile rottura rimane tra il mezzo, e il punto di sospensione. Si aggiunga che esistono delle parti nei solidi, le quali sono maggiormente esposte al guasto ed agli urti, e che per questa cagione posson comparire più esposte alla rottura. Converrà adunque in quei luoghi ove è più facile la rottura aiutare la resistenza usando dimensioni maggiori.

Esiste nelle dimensioni delle diverse parti del corpo umano un rapporto, che han potuto in scultura fissare come regola di arte; lo stesso può dirsi per gli altri animali, ed anche per i vegetabili, che in ogni stelo, in ogni ramo hanno un rapporto presso che costante tra il suo diametro, e la sua lunghezza.

Nè questi rapporti sono scelti a caso; la scienza si trova sempre dalla natura prevenuta. Infatti la natura ci mostra nel fusto degli alberi osservate le regole della stabilità per la usata figura a tronco di cono, e spesso con profilo curvo a guisa di campana, quando molti sono i rami, e fragile è il legno: lo che è frequente ne grossi platani. Anche nei vegetabili piccoli si scorge una simil forma: e può ritenersi che l'allungamento progressivo nel fusto dei vegetabili, come l'accrescimanto ne diversi membri degli animali sodisfa alle condizioni d'economia e di stabilitá ad un tempo.

Adottando una forma la cui sezione sia determinata da curva logaritmica, voglio dire un volume generato dal far ravvolgere una logaritmica attorno all'asse delle ascisse è sempre possibile sodisfare a tutte le condizioni di stabilità e leggerezza richieste dai molto elevati monumenti. L'ingegnere Smeaton ha dato una figura conoidale alla torre isolata, e suoi contrafforti esterni, che forma il faro d'Ediston, per garantirsi non tanto dal carico degli strati superiori, quanto dall'urto de' mari e dei venti. Consimile forma, è stata ritenuta anche dal sig. Stevenson pella torre del faro di *Bella Rôcca* in Scozia, opera tanto commendata ai nostri tempi. Le piramidi degli Egiziani erano l' opposto delle moderne torri d'Europa perchè in quelle si eccedeva in dare estensioni alla base, quanto a difetto di stabilità si scarseggia in queste colla veduta di aggiungere eleganza all'edifizio.

25. *Gli ordini architettonici non sono modellati sulle sole regole del-*

la resistenza. — Ogni colonna ha per raggio il modulo, e questo riducesi nella sommità per l'affusamento che le si dà a 5/6, e per la scannellatura a 2/3, onde la sezione del solido nella parte più sottile della colonna è moduli quadrati 1, 4. Seguendo le dimensioni adottate dal Vignola, nell' arco anche dell' ordine corintio che è il più leggero, la colonna reggendo il solo ornamento soprapposto vien caricata di una massa di circa 150 moduli cubici. Posto che 2,7 sia la gravità specifica del marmo o pietra che compone quell'ornamento, e che il modulo sia eguale a un quarto di metro, ogni modulo cubico peserà k. 4 2, 2, e la colonna sarà caricata di 6330k. ed avrà di sezione centim. quadrati 875, talchè per ogni centim. non sosterrà che circa 7.k. Ho preso il caso che la colonna sia senza piedistallo; nel caso che riposi sul piedistallo l' arco si fa più largo di circa un terzo, e perciò questo carico può ridursi verso 10. k. Ammesso anche che si devan considerare questi numeri venti volte più grandi per esser la colonna isolata: pure quale è mai quella materia, che si usa nelle colonne, che ha sì poca resistenza? Fatto il calcolo per gli altri ordini cresce sempre maggiormente l'esuberanza nelle dimensioni della colonna; e può dirsi in generale che quando le colonne non reggono che il loro ornamento, hanno per la resistenza un diametro troppo grande. Possono come nell' intercolonnio esser destinate a regger dei muri e altri carichi, ed allora si trova l' architetto nel bisogno di calcolare il loro peso. E perchè dunque non varia dall'un caso all'altro la proporzione nelle dimensioni della colonna? L' assottigliamento che si fa ne' due terzi superiori del fusto della colonna perchè è sempre costante qualunque sia il carico al quale essa sottoponesi? Perchè non si ha tra la grossezza e l'altezza un rapporto che dipenda dalla tenacità della materia, che si usa nella costruzione della colonna? Vedo nei comuni ordini architettonici conservato un rapporto tra la grossezza e l' altezza che non è maggiore di 1 : 10, nè minore di 1 : 7, il quale assicura che la colonna non si romperà per flessione, ma non potrebbe egualmente assicurarci di ciò un rapporto maggiore? L'architettura gotica che è tutta sveltezza, e non manca di stabilità, ammette colonne alte da dieci fino a venti diametri, e senza alcun' assottigliamento. E chi facendo colonne di ferro fuso non vede più adattate le regole dell' architettura gotica che quelle della greca? I Chinesi fanno uso di colonne di legno, e pur non ostante l' altezza di esse sta tra 8 e 12 diametri.

Concludo che nei comuni ordini d'architettura le proporzioni nelle dimensioni delle colonne non han relazione col carico che esse sostengono, nè con quello che posson sostenere. Quindi 1.° È eccessiva la resistenza quando le colonne sono caricate del solo ornamento, o di non molto altro peso. 2.° Quest' eccesso di resistenza non è il medesimo nei diversi ordini. 3.° Neppure nel medesimo ordine è lo stesso usando il piedistallo o facendo colonne senza di quello. 4.° La resistenza varia nel medesimo ordine al variare della materia che compone la colonna. 5.° Quei carichi che possono esser eccessivi per colonne di una data altezza in un ordine non lo saranno sempre in un' altro. 6.° L' assottigliamento della parte superiore della colonna

può sembrare eccessivo sotto un carico molto grande, e piccolo sotto un carico minore. 7.° Siccome le colonne d'ordine toscano son quelle più adattate a sostener gran carico, mal si confà alle regole della resistenza l'essere in questo l'assottigliamento maggiore che negli altri ordini.

Distinguono gli architetti la resistenza reale da quella apparente, e per conseguir quest' ultima vogliono dimensioni più grandi. Educati all'architettura greca sembra il limite della robustezza nell' ordin dorico, e quello della fragilità nel corintio, e si riporrebbe con il Milizia la più conveniente proporzione al mezzo, cioè nell'jonico; ma gustando l'ordin toscano, o quello gotico, si avvicinerà la resistenza apparente al massiccio o al delicato. Dunque essa è più conseguenza del gusto che del ragionamento.

Il vero principio delle proporzioni nelle misure degli ordini architettonici risiede nel bello. Si dice desunta dalle misure dei membri del corpo umano, o di altri corpi che esistono in natura la modulatura dell' architettura greca, e noi riterremo che è in credito perchè piace: cioè sodisfa il gusto, che è forse il resultato del vedere gli oggetti naturali con determinate proporzioni fra le altezze, le larghezze, e le misure delle altre loro parti. Si dice che nacque il gotico moderno dal volere i Goti far le Chiese ad imitazione delle foreste, ove solevano pregare: dal voler che le colonne rappresentassero gli alberi: gli archi imitassero l'intrecciarsi di questi: e le strette ed alte aperture copiassero gli spazj fra le successive piante; certo è che una costruzione di buon gotico è in credito perchè piace, voglio dire sodisfà all'imaginazione, probabilmente come vi sodisfa il vedere i bei quadri della natura campestre. Insomma è il gusto del bello che ha determinate le regole dell'architettura; onde dedurrei che come la poesia ha le sue epoche, e varia con i costumi degli uomini, così anche l'architettura può andar sottoposta a delle vicende finchè rimanga al genio il dominio sovra di essa. Possono dunque studiarsi i comuni ordini architettenici, ma non deve credersi che essi leghino l'architetto, più di quello che le opere d'Omero legano la mente del poeta. Se poi si stabilisse un' architettura la quale direttamente dipendesse dalla meccanica, e la sua parte estetica non fosse che una piccola aggiunta, questa sola seguirebbe, come suol dirsi la moda, e rimarrebbe anche l'architettura decorativa stabile, e noverata fra le scienze. Io chiamo architettura decorativa, le colonne, gli archi, i fregi, i piedistalli, le bozze, i cunei, le modinature, a quant' altro sebben resti alla fabbrica esteriore, interessa la stabilità della medesima. Dico parte estetica gli ornati, le figure, gli intagli, e quant' altro può dirsi non sostanziale ma accessorio. Questa può convenientemente esprimere i costumi, i bisogni del secolo, i riti religiosi ec. siccome erano i triglifi, le gocce, le foglie, le teste di bove, gli scudi, i rosoni ec. Nè mi sembra improbabile che la prima possa dalla sola meccanica assumer le basi stabili. Questo è il punto a cui deve tendere l'arte delle costruzioni, e forse si aspetta per giungervi uno di quei sublimi ingegni che talvolta la natura produce per dimostrare tutta la forza dell'umano intelletto.

20. *Le regole della resistenza de-*

vono rispettarsi nell'uso degli ordini architettonici. — Frattanto anche nell'ordine toscano, dorico, jonico, corintio, gotico ec. si procurerà d'introdurre quel maggior numero di regole meccaniche delle quali sono compatibili. Un architetto quando dispone in una fabbrica diversi ordini procura di porre nelle parti più basse il meno gentile, e si inalza con quelli più svelti: e se tutta l'eseguisce con una modulatura, usa nelle parti diversamente elevate modulo diverso. Ed in ciò ben si prestano i comuni ordini architettonici: infatti la colonna toscana è di doppia resistenza che quella corintia, e gli altri due ordini dorico e jonico sono prossimamente di resistenze medie, cioè il dorico l'ha media fra i due primi rammentati, e l'jonico l'ha media fra il dorico e il corintio. Quindi le resistenze nelle colonne han la proporzione dei numeri notati dicontro agli ordini

Toscano 8
Dorico 6
Jonico 5
Corintio 4

Se si trattasse di usar colonne di eguale altezza per sorreggere diversi piani di una fabbrica ciascuno di egual peso potrebbe la colonna toscana sostenerne quattro, la dorica tre, e la corintia due. Voglio mostrare con quest'esempio che avrà sempre nei diversi ordini l'architetto da scegliere una colonna proporzionata al carico che li vuol far portare. Egli la troverà anche in un ordine solo purchè vari l'altezza della colonna, decrescendo essa in diametro nella stessa proporzione che in altezza. Vedesi nella nostra Cattedrale aver l'architetto usate più alte le colonne della navata del mezzo, perché dovevano sostenere maggior peso delle altre. I numeri che indicano il rapporto tra il diametro e l'altezza sono

Toscano 7
Dorico 8
Jonico 9
Corintio 10

E rappresentato con p quel rapporto, con R′ la resistenza della materia che compone la colonna per ogni centim.° q.°, con L la lunghezza o altezza, e con P il carico che si vuol far portare a tutta la colonna si avrà in centimetri l'altezza della colonna da usarsi per mezzo della formula

$$L = 2p \sqrt{\frac{7 . P}{22 . R'}}$$

Determinata la materia della quale si devon far le colonne, la sua resistenza indicherà l'ordine da preferirsi perchè sarà questo tanto meno grave quanto quella è più resistente; e forse l'ordine toscano non può dirsi conveniente che alle pietre non molto resistenti.

Anche l'assottigliamento della colonna crederei che si potesse fare secondo le regole della resistenza; tanto minore cioè quanto è più grande il carico. Quando si usano ordini svelti e leggeri come il gotico e il chinese penserei accrescesse non meno stabilità che grazia un leggero rigonfiamento verso il mezzo o nel luogo di più facile rottura. Nè questa è regola nuova per i Greci i quali talvolta rigonfiavano il fusto delle colonne secondo la forma della concoide; curva ben conosciuta dagli architetti, e la cui forma alla parte superiore si avvicina molto a quella della logaritmica, ed ha per asintoto l'asse stesso della colonna.

Sebbene l'architettura greca e romana richiedano l'arco a mezzo cer-

chio, non si bandiranno nelle costruzioni gli archi a sesto scemo, e quelli a sesto acuto che per il loro diverso modo di spingere i piedritti han pregj tanto rimarcati; ai primi in luogo di colonne si faranno larghi pilastri, ed ai secondi pilastri anche più elevati e stretti di quello che portano le dimensioni delle colonne. Nè sarebbe offesa agli ordini architettonici dare a quei bassi pilastri forma di colonne bassissime, o a quelli elevati applicare all'esterno la forma di colonna. E quando io vedo in un'edifizio usati gli archi semicircolari, insieme con quelli chiamati gotici che provengono dall' accozzamento di due porzioni di arco di cerchio, se ciò è richiesto dalla meccanica, non riconosco confusione di ordine architettonico. Solo trovo l' architetto tenuto a legare con buona transizione l'acuto dell'arco gotico collo stile rotondeggiante degli altri, e viceversa. Un bell'esempio se ne ha all'arco dell' altar maggiore nella nostra Cattedrale di Pisa, ove con archi ripetuti si passa dall'acuto a quello semicircolare.

Negli intercolonnj si usano le colonne angolari anche di $^1/_{50}$ più grosse che quelle poste in mezzo perchè debbono aver maggior robustezza, ed anche perchè circondate dall'aria aperta non sembrino più sottili. Lo Scamozzi proporzionando la robustezza della colonna all'ampiezza dell' intercolonnio ha emessa la seguente regola

Toscano . . .	6	moduli, o raggi della colonna
Dorico . . .	5,5	
Jonico . . ,	5	
Composito	4,5	
Corintio . . .	4	

Questa sarà conveniente per le colonne di altezza moderata; ma non trovo però io motivo di bandire il picnostilo che ammette tre moduli d' intercolonnio, e l'areostilo che ne ammette otto, perchè può l' uno esser utile in colonne molto alte, e e l' altro in quelle molto basse.

CAPITOLO II.

Della resistenza alla flessione, alla torsione, all'incurvamento per compressione, e agli urti.

Resistenza alla flessione.

27. *Principj dai quali si desume la resistenza alla flessione.* — Dalla facilità colla quale si comprimono e si allungano le diverse parti di un corpo si deduce l' attitudine di quello a piegarsi; come dal grado di avvicinamento o di distensione che le parti posson soffrire, riman determinato il punto della sua rottura ottenuta per mezzo della flessione. Allorchè il peso P (fig. 4 Tav. I.) fa forza per girare una sezione del solido attorno al suo lato più basso, come se si trattasse di un trave infitto orizzontalmente in un muro ed aggravato da un peso all' estremità libera possiam riflettere.

I. Quanto sia facilissimo piegare o rompere un lungo trave, e molto difficile un trave corto, dal che rileviamo essere la resistenza in ragione inversa della lunghezza del trave.

II. Le diverse fibre longitudinali che compongono il solido devon supporsi di egual tenacità, e perciò deve la resistenza stare in ragion diretta della sezione.

III. Se si avessero due travi uno

assai alto e l' altro molto basso, sebbene ambedue fossero di egual sezione, è facile conoscere che il peso P potrebbe più agevolmente rompere il secondo che il primo. Dunque anche per questa cagione dovrà la resistenza essere in ragion diretta dell' altezza.

IV. Mentre il solido è in atto di rompersi come supponeva il Galileo posson le fibre riguardarsi perfettamente rigide, ed a tutti gli elementi sopra stabiliti non si deve aggiungere che un coefficente costante per ottenere la resistenza alla rottura.

V. Che se il solido coll'elasticità reagisce alla flessione e non alla rottura, allora dovrà conforme alla dottrina Leibnitziana porsi in calcolo la reazione elastica la quale è proporzionale all' allungamento, o accorciamento delle fibre. E poichè le fibre tanto più si allungano e accorciano quanto è più alto il solido, quindi anche una terza volta dovrà in proporzione dell' altezza crescere la resistenza elastica alla flessione.

VI. L'abbassamento del punto estremo dalla sua posizione naturale sarà tanto più grande quanto più è lungo il trave non solo come si è detto di sopra perchè l'azione del peso cresce con questa lunghezza che li fa da braccio di leva, ma anche due altre volte in proporzione della lunghezza, perchè in questo rapporto cresce il numero delle particelle che possono cedere per compressione, e parimente il numero di quelle che possono cedere per distensione. Dunque quell' abbassamento sarà proporzionale al cubo della lunghezza del trave non tanto nel caso che questo, come abbiamo fin' ora supposto, venga sorretto ad un solo estremo, ma ancor quando è sorretto alle due estremità come mostra la fig. 5. Tav. I. valendo anche per questa disposizione lo stesso ragionamento.

VII. Tra tutte le particelle del solido, delle quali alcune son compresse ed altre stirate, ve ne ha uno strato ove le fibre rimangono invariabili. E poichè in ogni sezione deve aversi equilibrio indipendentemente dal peso il quale agisce parallelamente a quella, la fibra invariabile sarà al mezzo dell' altezza quando l' elasticità si mantiene perfetta, e passato questo limite si avvicinerà alla faccia concava.

28. *Formule ed esperienze sulla resistenza alla flessione ne' solidi incastrati ad un' estremità, ed aggravati da un peso che agisce perpendicolarmente alla loro lunghezza.* — Nel solido rappresentando con

a la lunghezza:

P il peso che produce la flessione:

ρ il raggio d' osculo della curva di flessione:

x la distanza della sezione considerata dall' estremo incastrato.

Il momento della resistenza alla flessione del solido in equilibrio è

$$\varepsilon = \rho P\,(a-x)$$

Nel solido di forma parallelopipeda rettangolare e con la faccia superiore orizzontale, detta

b la larghezza.

c l'altezza:

E il coefficente d'elasticità.

Il detto momento è

$$\varepsilon = E\,\frac{b\,c^3}{12}$$

Nel solido della forma precedente, ma con una diagonale della base orizzontale, ritenute le precedenti lettere per esprimere i lati

$$\varepsilon = E\,\frac{bc^3}{6}.$$

Nel solido di forma cilindrica, detto π il rapporto tra la circonferenza e il diametro

r il raggio della sezione. Sarà

$$\varepsilon = \text{E}\,\frac{\pi\, r^4}{4}$$

Nel solido in forma di cilindro vuoto o di tubo, essendo r' il raggio del vacuo

$$\varepsilon = \text{E} \times \frac{\pi\,(r^4 - r'^4)}{4}$$

Per la curva che presenta il solido nel piegarsi, ritenute le denominazioni, e rappresentando con

y le ordinate corrispondenti alle ascisse x

f l'ordinata dell' estremità della curva nel luogo ove é attaccato il peso

s la lunghezza del solido

φ l'angolo formato con una linea orizzontale dall' ultimo elemento della curva. Si avrà

$$\varepsilon\, y = \text{P}\left[\frac{a\, x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \alpha\, x + \beta\right]$$

$$f = \frac{\text{P}}{\varepsilon}\left(\frac{a^3}{3} + \alpha\, a + \beta\right)$$

$$s = a + \frac{3f^2}{5\,a}$$

$$tang\,\varphi = \frac{3f}{2a}$$

Le esperienze si fanno facilmente insinuando in una buca fatta nel muro una porzione del solido assai lunga perchè vi possa rimaner ben fissa quando vi è zeppata e chiusa con altri pezzi solidi adattati. Il solido (Tav. I. fig. 4.) A B rimanga in situazione orizzontale quando non è aggravato da pesi come è l' altra riga fissa C D, e si fletta quando vi è attaccato il peso P. Fatte variare le distanze del peso dell' estremo fisso si trova che l' abbassamento D B del punto aggravato è proporzionale al cubo di quelle distanze. Fatto variare il peso si riscontrano gli abbassamenti dei punti aggravati proporzionali ai pesi, ben inteso che si consideri per peso aggravante la sola componente del peso reale che rimane normale all' ultimo elemento della curva cioè P $cos\varphi$. In tutte le mutazioni che si danno ai pesi le ordinate condotte dalla retta CD alla curva AB si trovano proporzionali ai pesi aggravanti. Mutata la forma della sezione del solido, si trova che quando è rettangolare l' abbassamento rammentato, e le ordinate della curva sono in ragione inversa del cubo dell' altezza del solido, e della sua larghezza, e stanno in ragione inversa delle quarte potenze dei raggi delle sezioni quando esse sono circolari. Queste ed altre consimili esperienze confermano le formule precedenti qualunque sia la natura del solido sul quale si esperimenta, purchè si tenga conto soltanto della variazione di forma temporaria, cioè dalla alterazione totale si detragga quella permanente la quale proviene dalla mollezza del corpo, e può approssimativamente determinarsi con i princìpj sopra esposti (5). Nel confrontare la curva teorica con quella sperimentale ho trovato il bisogno di aggiungere, siccome ho fatto, al valore di y il binomio $\alpha\, x + \beta$, e l' α, β devono determinarsi per ciascun solido dietro i resultati dell' esperienza facendo corrispondere non solo il punto estremo, ma anche altri due punti della curva teorica con quella sperimentale.

29. *Caso nel quale siano più i pesi aggravanti, o si consideri il peso del solido.* — Che se il peso sarà distribuito uniformemente sù tutta la lunghezza del solido ritenute le denominazioni precedenti, è chiamato p il peso per ogni unità di lunghezza, si avrà

$$\varepsilon\, y = p\left(\frac{a^2\, x^2}{4} - \frac{a\, x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \alpha\, x + \beta\right)$$

$$f = \frac{p}{\varepsilon}\left(\frac{a^4}{8} + \alpha a + \beta\right)$$

$$tang\,\varphi = \frac{4}{3}\,\frac{f}{a}$$

Dunque l'abbassamento del punto estremo che si ha adesso, sta a quello che si aveva quando ivi era raccolto tutto il peso ::3 : 8, lo che vien confermato dall'esperienza. Quando oltre al peso del corpo si avrà un peso aggiunto all'estremo si dovranno sommare le variazioni rappresentate dalle formule precedenti a quelle che rappresentano quest'ultime. Così anche se più pesi sieno applicati a diverse distanze dall'estremo fisso la variazione totale sarà quella data dalla somma di quelle che appartengono ai singoli pesi.

30. *Formule ed esperienze sulla resistenza alla rottura ne' solidi incastrati ad un' estremità, ed aggravati da uno o più pesi che agiscono perpendicolarmente alla loro lunghezza.* — Quando gli allungamenti, o accorciamenti delle fibre cessano di esser proporzionali ai pesi cessa parimente di essere al mezzo della grossezza del solido lo strato delle fibre inalterate nella flessione, si avvicina ad una faccia del solido e accade la rottura. Per valutare la resistenza alla rottura in mancanza di principj diretti convien ricorrere a dell'ipotesi, ed una che meno sembra allontanarsi dall'esperienza è che le fibre anche nelle situazioni prossime alla rottura producono resistenze proporzionali alle loro distensioni o compressioni (4). Dietro questa regola si possono adattare per la rottura le formule dell'elasticità purchè si metta la fibra di massimo allungamento o accorciamento nella situazione immediatamente prossima alla rottura. Quindi si avrà un momento di rottura corrispondente al momento di flessione, mutato nelle formule anche il coefficcente E in un altro R corrispondente alla rottura. Dietro i principj sopra esposti avremo per il solido a sezione rettangolare con un lato orizzontale

$$P = R\frac{bc^2}{6a}$$

per la sezione quadrata

$$P = R\frac{a^3}{6a}$$

per la sezione quadrata colla diagonale orizzontale

$$P = R\frac{c^3}{6a\sqrt{2}}$$

dal che vedesi che la resistenza di un pezzo quadrato posato parallelamente ad una delle diagonali è minore di quella di un pezzo quadrato posato sovra uno de' suoi lati nel rapporto di $1 : \sqrt{2}$

per la sezione cilindrica

$$P = R\frac{\pi r^3}{4a}$$

per quella anulare

$$P = R\,\pi\frac{(r'^2 - r''^2)}{4r'a}$$

Per conseguenza a sezioni trasversali eguali un cilindro pieno ed un tubo offrono resistenze alla rottura che stan fra loro nel rapporto

$$(r'^2 - r''^2)^{3/2} : \frac{r'^4 - r''^4}{r'}$$

A resistenze eguali le sezioni trasversali del cilindro e del tubo sono fra loro nel rapporto

$$\left(\frac{r'^4 - r''^4}{r'}\right)^{2/3} : r'^2 - r''^2$$

Quando il solido incastrato ad un estremo è carico di pesi uniformemente distribuiti si ha

$$P = \frac{pa}{2} \text{ ovvero } pa = 2P$$

cioè si rompe con doppio peso di quello che può sostenere tutto raccolto all'estremità.

Formula per il solido rettangolare con peso uniformemente distribuito

$$pa = R\frac{bc^2}{3a}$$

Formula per il solido suddetto con peso all' estremità e uniformemente distribuito

$$P + \frac{pa}{2} = R \frac{bc^2}{6a}$$

Per confermare colle esperienze queste formule si disporrà il solido incastrato come si è detto di sopra, e si aumenterà il peso finchè non accade la rottura. Avvertiremo però di non dare oscillazioni o scosse al peso e al solido, nè di trattenere per notabil tempo aggravato il solido, perchè queste circostanze possono far variare notabilmente il coefficente alla rottura R. Questo coefficente si trova in alcuni autori espresso per 3 *k*., onde perchè nell' applicazione non si cada in errore stabilisco che da *k* si può dedurre R, con la seguente relazione $3k = R$.

31. *Resultati d' esperienze.* = I. È manifesto che la rottura tende a farsi nella sezione ove il solido è incastrato perchè l' effetto del peso è massimo in quel luogo.

II. La resistenza alla rottura per flessione è proporzionale al quadrato dell' altezza del solido.

III. È proporzionale alla larghezza del solido. Dunque conviene far maggiore l' altezza che la larghezza; pure se si rendesse il solido troppo sottile piegherebbe in sbieco, cioè torgendosi. Si suole tra l' altezza e la larghezza porre il rapporto 7 : 5.

IV. La curva che prendono i legni piegati corrisponde a quella indicata dalle formule, purchè per ciascuno si determinino le due costanti α, β. Forse lo stesso accaderà per gli altri corpi ma io non ne ho fatte esperienze. Sebbene i valori di α, β posson variare da un' esperienza all' altra anche in uno stesso solido, pure ammesso che l' incastro si faccia sempre il meglio possibile, la variazione non sarà significante che per la differenza della materia di cui il solido è composto. Onde nella pratica potrà esser utile sapere che in un' esperienza fatta sopra un regolo di legno gattice ho trovato $\alpha = 131726$, e $\beta = - 8496375$ essendo le unità il mm.° e il kil.°

V. La resistenza alla rottura per flessione è in ragione inversa della lunghezza del solido.

VI. Il coefficente R perchè il solido resista ai pesi permanenti deve esser tenuto dieci volte più piccolo di quello della rottura se trattasi di legni, tre volte se trattasi di ferro lavorato, e quattro se adoprasi il ferro fuso.

VII. Nelle pietre, nel vetro, e nei metalli fusi si fa una separazione decisa per tutta l' altezza della sezione. Nei legni le fibre si rompono verso la faccia convessa per strappamento. E nei metalli lavorati si tiene una via di mezzo, e prendono le particelle che sono nella sezione della rottura nuove posizioni d' equilibrio.

VIII. La fibra invariabile nei legni si avvicina alla faccia convessa, e secondo l' esperienze di Barlow nell' atto della rottura le fibre situate sulla faccia concava si accorciano di più di quello che si allunghino le altre che sono alla faccia convessa, e il rapporto dell' accorciamento delle prime all' allungamento delle seconde eguale all' unità sul principiare della flessione, diviene 1,7 circa nel tempo della rottura. E Duhamel provò che segato un pezzo di legno dal lato della faccia che dovea divenir concava nel piegarsi, e riempito il tratto della sega con una striscia di legno ben duro, la resistenza del pezzo andò aumentando finchè il tratto della sega non giunse ad un terzo della grossezza, rimase la stes-

su quando penetrava fino alla metà circa, e poco diminuì quando giungeva ai tre quarti.

IX. Servendomi della rammentata relazione ho dedotto il coefficente R da quello k, che era stato determinato dietro le esperienze di Muschembrock e di altri, formando anche con alcune esperienze da me eseguite la seguente tavola, ove il kil. e il met. sono le unità adottate. Nel calcolo delle dimensioni da darsi ai solidi esposti a delle flessioni trasversali si deve distinguere il caso in cui può il solido prendere sotto il carico senza inconveniente una certa flessione, dall'altro nel quale questa flessione debba essere eccessivamente piccola, e perciò si devono convenientemente diminuire i coefficenti che sono qui appresso notati, i quali darebbero il carico della rottura. Così ordinariamente per esser certi della resistenza permanente nella ghisa si pone R = 7500000, nel ferro lavorato R=6000000, e nei legni R=600000.

TAVOLA
PEL COEFFICENTE DELLA RESISTENZA ALLA ROTTURA PER FLESSIONE.

SOSTANZE *Legni*	VALORE *del coeffic.* R
Acero fico	6750000
Acero maggiore	5460000
Acero rosso	8175000
Acero striato	8970000
Ailanto glandoloso	5685000
Albero gattice nostrale	7926000
Betula bidollo	6397500
Carpino comune	7755000
Castagno salvatico	7177500
Cipresso tuia	5302500
Citiso maggiociondolo	8670000
Faggio comune	7740000
Gleditiscia spinosa	5625000
Ippocastano, o castagno d'India	6982500
Mandorlo pesco	7530000
Nocciolo salvatico	7560000
Noce comune	6750000
Olmo nostrale	8077500
Pero melagnolo	7320000
Pero peruggine	6622500
Pino abete bianco	7177500
Pino abete rosso	6885000
Pino larice	6321144
Pioppo piramidale	4395000
Platano orientale	5820000
Platano occidentale	6397500
Pruno ciriegio canino	8212500
Pruno susino salvatico	8602601
Querce ischia	7695000
Querce più debole	5662000
Rubinia falsa gaggia	9787500
Salcio bianco	6375000
Siliquastro comune	7042575
Sorbo ciavardello	7565000
Sorbo salvatico	7237500
Tasso libo	7777413
Tiglio nostrale	5625000
Tulipifero legno giallo	4222548
Metalli.	
Ferro fuso . . da 38580000 a	28583206
Ghisa grigia da 44950000 a	17973000
dolce da 73550000 a	29420000
Acciaio il migliore	88000000
Acciaio di qualità media	49932000
Ferro lavorato nostrale	32000000
Ferro d'Aosta lavorato	42054000
Ferro di Savoia lavorato	38086000
Ferro della riviera del Piemonte	34328000
Minerali diversi.	
Vetro	12321000
Marmo stat.° bianco puro	4207920
Pietra della Gonfolina	3776000
Pietra calcarea dura	324071

Pietra lavagna..........	6795000
Pietra calcarea tenera di Givry................	72015
Mattoni ben cotti	696000
Mattoni comuni.........	212490
Mattoni vecchi..........	180843

32. *Osservazione.* — Anche a questa tavola farò seguito con poche notazioni che serviranno di aiuto alla memoria. Per quanto la resistenza de' legni possa variare dall'uno all'altro pure ordinariamente è di un valore quasi fisso, e il lor coefficente alla rottura può ritenersi per 7000000. Nel ferro e acciaio è anche molto maggiore estendendosi da 4 a 6 volte la resistenza de' legni. Negli altri solidi è generalmente minore che nei legni, e diversifica molto dall'una all'altra. I legni adunque saran preferiti per la resistenza respettiva perchè hanno molta resistenza alla rottura non solo per loro natura, ma anche perchè il loro peso non essendo grande si possono fare con dimensioni notabili. Essendo il rapporto tra il peso specifico del legno a quello del ferro 1 : 15 circa, ed i pesi stando come i volumi, ed i volumi come i cubi dei lati omologhi, ne viene che sotto egual peso i lati omologhi dei due corpi potranno avere il rapporto 2,5 : 1; ma la resistenza alla rottura è proporzionale alla larghezza ed al quadrato dell'altezza, cioè al cubo del lato omologo nella sezione, dunque in solidi di egual lunghezza e di egual peso, e di sezione simile, la resistenza del legno sarà sempre molto maggiore di quella del ferro o dell'acciaio. Un simil discorso proverebbe che quella del ferro sarà molto maggiore di quella delle pietre, ed il rapporto tanto delle une quanto delle altre resistenze sarà per lo meno 1 : 3.

33. *Formule per la pratica.* — Si calcolerà l'abbassamento dell'estremità caricata dalla primitiva posizione orizzontale con le formule seguenti nelle quali faremo $p=o$, quando si vuol trascurare il peso del solido, e $P=o$ quando il peso è uniformemente distribuito.

Per i solidi a sezione rettangolare composti di

Ghisa ...... $f=\dfrac{(P+{}^3/_8\,pa)\,a^3}{2750000000\,b\,c^3}$

Ferro lavorato . $f=\dfrac{(P+{}^3/_8\,pa)\,a^3}{5000000000\,b\,c^3}$

Acciaio fuso . . $f=\dfrac{(P+{}^3/_8\,pa)\,a^3}{8000060000\,b\,c^3}$

Acciaio d'Alemag. $f=\dfrac{(P+{}^3/_8\,pa)\,a^3}{4000000000\,b\,c^3}$

Legno. ..... $f=\dfrac{(P+{}^3/_8\,pa)\,a^3}{250000000\,b\,c^3}$

Per i solidi a sez. circolare essendo d il diam. trascurato il lor peso

Ghisa ...... $f=\dfrac{Pa^3}{1617000000\,d^4}$

Ferro ...... $f=\dfrac{Pa^3}{2940000000\,d^4}$

Legno. ..... $f=\dfrac{Pa^3}{147000000\,d^4}$

Per i cilindri vuoti, essendo d il diam. interno trascurato c. s. il peso

Ghisa .... $f=\dfrac{Pa^3}{1617000000(d^4-d'^4)}$

Ferro..... $f=\dfrac{Pa^3}{2940000000(d^4-d'^4)}$

Legno .... $f=\dfrac{Pa^3}{147000000(d^4-d'^4)}$

34. *Resistenza de' solidi sorretti alle due estremità.* — Tanto per la deformazione quanto per la rottura la dottrina della resistenza di questi, si desume direttamente da quella dei solidi incastrati ad una sola estremità. Supponiamo che un solido prismatico sia posato orizzontalmente sopra due rotelle a centro fisso, e venga aggravato da un peso al suo mezzo, formerà una curva con il ver-

tice al mezzo, e simmetrica alle due parti. La metá di questa sará corrispondente a quella che avevasi quando il solido era incastrato ad un'estremo, considerando a questo il vertice, se non che la sezione di mezzo del solido sostenuto ai due estremi si mantiene verticale, e quella all'incastro nel solido ritenuto ad una sola estremità si piega un poco pel cedere delle altre che sono dentro all'incastro. Quando il peso è collocato al mezzo si può avere per due forze, eguali ciascuna alla metà di esso applicate agli estremi, ed esse daran luogo ad un'eguale e contraria reazione fatta dagli appoggi. Stando dunque fisso il mezzo del solido possiam supporre che agiscano queste reazioni; ed allora si vede manifesta la relazione che passa fra i due casi contemplati. Quella che agisce ad un'estremo produrrà l'effetto eguale al quarto di quello che produrrebbe tutto il peso se il solido fosse incastrato, perchè sarebbe allora doppia la forza e doppia la distanza dal punto fisso (Intr. 128). Amendue le reazioni, o tutto il peso aggravato alla metà del solido sostenuto produrrá effetto eguale alla metà di quello che si avrebbe sul solido incastrato. Dunque per il solido posato orizzontalmente sù due appoggi potremo usare le formule stabilite (28) per quello incastrato ad un'estremo se non che deve porsi $^1/_2$ P, $^1/_2$ p in luogo di P, p; e faremo $\alpha = o$, $\beta = o$ per la differenza che abbiam sopra notato esistere fra questi due casi.

Il momento ε di flessione ha il medesimo valore riportato al §. 28.

Considerata l'origine dell'ascisse x nel vertice cioè al mezzo della curva ove supponesi aggravato il peso P, essendo a la lunghezza del prisma fra gli appoggi, f la freccia o l'abbassamento che soffre il punto di mezzo aggravato, y le ordinate della curva, o le differenze fra la freccia, e gli abbassamenti dei diversi punti, avremo per il peso al mezzo

$$\varepsilon\, y = \mathrm{P}\left(\frac{a\, x^2}{4} - \frac{x^3}{12}\right);\; f = \frac{\mathrm{P}}{\varepsilon} \cdot \frac{a^3}{6}$$

per il peso p uniformemente distribuito per ogni unità di lunghezza

$$\varepsilon y = pa\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) - p\left(\frac{a^2x^2}{4} - \frac{a\,x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right)$$

$$f = \frac{p}{\varepsilon} \cdot \frac{5}{24} a^4;\; tang\ \varphi = \frac{8}{5} \cdot \frac{f}{a}$$

Dalle quali formule deducesi che se il peso $2\,p\,a$ fosse caricato al mezzo del solido la freccia crescerebbe nel rapporto 8 : 5.

Le formule per la resistenza alla rottura sono quelle stesse che abbiamo riportate al §. 30 parlando de' solidi incastrati ad un'estremo, solo che si moltiplichi per 2 la lor resistenza, e basterà che qui per un' es.° riporti solamente quella del solido a sezione quadrata col lato c orizzontale

$$\mathrm{P} = \mathrm{R}\ \frac{c^3}{3a}$$

Il peso del solido puo aversi come applicato un quarto a ciascuno appoggio, e la metà al mezzo; e questa si dovrà avere per un'aggiunta al peso caricato.

Che se il carico non sarà collocato al mezzo potrà sempre intendersi decomposto in due applicati ai due appoggi, e ritenersi come fisso il luogo ove sta il peso, ed agenti le reazioni degli appoggi sulle estremità. Sia sul regolo C D (fig. 5 Tav. I.) caricato il peso in G, la reazione in C è proporzionale a G D ed agisce col braccio di leva C G, onde il suo momento è proporzionale a GD×CG (Intr. 128). Egualmente proporzionale a questa quantitá si dimostrerebbe essere il momento della reazione prodotta dal-

l' appoggio in D; quindi tanto maggior peso può portare il trave quanto quel prodotto è minore, o quanto il punto di sospensione G più si scosta dal mezzo.

35. *Resultati d' esperienze.* — Molti sono gli autori che han fatte esperienze sù questo soggetto Buffon, Dupin, Giulio ec. ed io pure, e seguendo per solo amor della brevità il metodo adottato non citerò il nome dell' autore se non nei casi che meritano particolare osservazione.

I. Tanto nel ferro quanto nei legni la curva per flessioni non molto grandi, e particolarmente ove l' effetto della mollezza si può trascurare è assai fedelmente rappresentata dalle formule riferite, ed anche a limiti più estesi si può ritenere

II. Che le ordinate della curva sono proporzionali ai pesi:

III. Che a pesi eguali due pezzi di legno di sezione trasversale eguale si piegano in curve le cui frecce son proporzionali ai cubi delle distanza tra gli appoggi.

IV. Tra i medesimi appoggi le frecce son reciprocamente come i cubi delle altezze dei legni.

V. Qualunque sia la grandezza assoluta dei pezzi simili ed omogenei han tutti un solo e medesimo raggio di curvatura nel punto di mezzo.

VI. La flessione nei differenti legni non ha relazione colla rottura perchè vi sono dei vegetabili che oppongono pochissima resistenza alla flessione, e molta alla rottura.

VII. Sovra i legni la rottura accade quando si è ottenuta una determinata freccia: sia che questa provenga da pesi istantanei, o da pesi tenuti in azione per un certo tempo; ed una freccia medesima si ottiene anche nella stessa qualità di legno con pesi assai diversi. Anche la freccia può variarsi al punto della rottura per effetto del calorico o dell' umidità, ed è con questi agenti che si agisce quando si voglion piegare i legni senza toglier loro la resistenza.

VIII. L' esperienze di Buffon sovra travi di querce, sorretti alle due estremità, di sezione quadrata con lato che variava da un decimetro a due decimetri mostrano confermata la legge che la resistenza segue la ragione composta del quadrato delle altezze nelle larghezze; ma si allontanano dalla proporzione inversa della lunghezza. Le resistenze scemerebbero secondo quelle esperienze più che non porterebbe l' accrescimento della lunghezza. La formula

$$P = 6180000k. \frac{c^3}{a + 0,083a^2}$$

ne comprende i resultati essendo le misure in metri. Contuttociò per calcolare la resistenza alla rottura convien ritenere le formule stabilite, ed i coefficenti di questa resistenza che abbiam riferiti (31) finchè non sarà meglio schiarito questo soggetto.

IX. La curva che si ottiene quando il peso nei legni è aggravato al mezzo varia pochissimo da quella che si ha quando è uniformemente distribuito, onde nella pratica, come è calcolato anche per le rammentate esperienze di Buffon il peso del trave, o quello uniformemente distribuito si intenderà per la sua metá applicato al mezzo del trave (34).

36. *Formule per la pratica.* — Oltre le formule riferite al §. 33 le quali sono applicabili al caso dei solidi sorretti alle due estremità purchè si ponga $\frac{1}{2}P + \frac{5}{8}pa$ in luógo di $P + \frac{3}{8}pa$, possono occorrere le seguenti nel caso che il peso P non sia al mezzo del solido, ma alle distanze l, l' degli appoggi

Chisa. . . . . $f = \frac{P\, l^2\, l'^2}{2750000000\, b c^3 a}$

Ferro. . . . . $f = \frac{P\, l^2\, l'^2}{5000000000\, b c^3 a}$

Legno . . . . $f = \frac{P\, l^2\, l'^2}{250000000\, b c^3 a}$

37. *Solido di egual resistenza.* — Il luogo ove si rompe un solido incastrato è la sezione prossima all'incastro quando ha egual dimensione in tutta la sua lunghezza (31). Quindi se regoleremo questa sezione in modo che non si rompa sarebbe eccedente la resistenza negli altri punti, posto che si tenesse un egual grossezza in tutte le sezioni. Può domandarsi qual figura dovrà darsi al pezzo volendo che la sua resistenza sia per tutto sufficente, e non eccedente. Supponiamo che la sezione debba esser sempre rettangolare, e chiamiamo solido di egual resistenza quello che sodisfa alle richieste condizioni. In qualunque sezione di questo dovrà aversi

$$P = R\,\frac{b\,c^2}{6\,a}$$

che se si vuole in generale determinare l'altezza y di una sezione situata alla distanza x dal punto d'applicazione della forza sostituiremo queste due lettere in luogo delle corrispondenti c, a nell'equazione precedente, e rileveremo

$$y^2 = \frac{6\,P}{b\,R}\,.\,x$$

Dunque la curva (fig. 9 Tav. I.) che determina la forma del solido cercato ha i quadrati delle ordinate che crescono proporzionalmente alle ascisse, la qual proprietà appartiene alla parabola che ha per vertice il punto d'applicazione della forza P. Utile è conoscere il processo pratico per tracciar questa curva quando la lunghezza AB del pezzo, è data, e quando si è calcolata la sua altezza OO′ della sezione all'incastro colla formula precedente. Si divida l'asse BA, e la semicorda O′A nel medesimo numero di parti, in quattro per esempio: Si congiunga l'estremità O della semicorda non divisa a ciascun punto di divisione dell'asse BA con delle rette, e le loro intersezioni con le parallelle all'asse condotte per le divisioni del medesimo numero fatto sulla semicorda O′A saranno i punti della curva O′B. L'altra parte OB è simmetrica rapporto alla prima.

I solidi d'egual resistenza che hanno un profilo longitudinale di forma parabolica prendono flessioni doppie di quelle de' solidi prismatici o cilindrici che han sezione costante.

Resistenza all'incurvamento per compressione.

38. *Resistenza de' solidi caricati per di sopra o verticalmente.* — Abbiam notato che quando un solido sottoposto alla compressione per mezzo di un peso, ha un'altezza che supera molto la grossezza, cioè il più piccol lato della sezione, come 24 volte per il legno, e 36 volte per il ferro, si può ritenere che prima della rottura si produce la flessione. Questa avverrà secondo i principj che abbiamo esposti (27), se non che la lunghezza renderà la rottura più facile non solo perchè compone il braccio di leva del peso quando il solido è piegato, ma eziandio perchè rende più facile la flessione. Onde starà la resistenza inversamente al quadrato della lunghezza. Si avrà poi la resistenza alla flessione in ragion diretta del cubo della grossezza, come la resistenza alla rottura in ragion diretta del quadrato di essa, ed ambedue proporzionali alla lunghezza. Onde ritenute le denominazioni che abbiamo fino ad ora usate, le formule

per la resistenza alla rottura sono ne' prismi di sezione rettangolare

$$\frac{\pi^2 h\, b c^3}{3a^2}$$

nei cilindri

$$\frac{5\,\pi^3 h\; r^4}{8a^2}$$

Per la resistenza alla flessione, o per calcolare il carico *maximum* che si può far sopportare ai solidi si userà la formula

$$P = \frac{\pi^2 \varepsilon}{a^2},$$

e nei prismi di sezione rettangolare

$$P = \frac{\pi^2 bc^3}{12.\ a^2}E = \frac{0{,}823.\ bc^3}{a^2}E$$

nei cilindri

$$P = \frac{\pi^3 r^4}{4\,a^2}.E = 7{,}757\frac{r^4}{a^2}E$$

nelle quali invece di E si porrà un valore minore E_1 cioè per

la ghisa. . . . $E_1 = \frac{E}{5} = 2000000000$k.

il ferro . . . . $E_1 = \frac{E}{4} = 5000000000$k.

il legno. . . . $E_1 = \frac{E}{10} = 100000000$k.

L'esperienze non danno sempre per il peso P che può far flettere il solido il valore teorico perchè troppo è difficile dirigere la forza lungo il suo asse e adempiere tutte le altre condizioni ritenute dalla teoria.

Prendiamo a determinare il carico che può sopportare un cilindro di quercia forte di 0,^{m}25 di diametro senza che la sua elasticità sia forzata, ed il peso che può romperlo. Se la lunghezza è tra 12 volte il diametro convien ridurre la resistenza che sosterrebbe un cubo ai $^5/_8$. Diviene 66,7 k. per ogni centimetro quadro e per tutta la sezione

$$\pi r^2 = \frac{22}{7}\left(\frac{25}{2}\right)^2 = 490 \text{ centim. q.}$$

e perciò $P = 66{,}7 \times 490 = 3268$k. Se è 24 volte la grossezza ridurrassi la resistenza ai $^5/_{12}$ cioè a 33,3k. per ogni centim. q. ed avremo

$$P = 33{,}3 \times 490 = 16319.$$

Se finalmente fosse l'altezza maggiore, per es.° 7^m calcoleremo la resistenza con la formula della flessione

$$P = \frac{7{,}757}{7^2}\left(\frac{0{,}25}{2}\right)^4 100000000\text{k.} = 3865\text{k.}$$

Usando la formula della resistenza alla rottura si sarebbe ottenuto

$$P = \frac{5.22^3.0{,}25^4}{8^2.7^3.\ 7^2}\ 3582000 = 3134\,\text{k.}$$

Da ciò scorgesi come poco diversi resultati si ottengano usando queste due formule, e perciò il caso che non si vuol la flessione, corrisponde al caso che non si vuol la rottura. Converrà adunque nella pratica tenersi alquanto al di sotto de' numeri che danno le formule.

TAVOLA
PEL COEFFICENTE *h* DELLA ROTTURA
PER INCURVAMENTO
prodotto da compressione.

Frassino comune.........	2046885
Ontano comune..........	1990445
Abete bianco.............	2480669
Pioppo piramidale........	2103714
Quercie ischia...........	3582000
Salcio bianco............	2729187
Ferro..................	126254825

39. *Stabilità delle fabbriche dedotta da quella dei modelli.* — Formato un modello con materie perfettamente omogenee a quelle che vogliensi impiegare nella fabbrica: dall'essere abbastanza resistenti le sue parti non potremo argomentare che egualmente resistente sarà la fabbrica che venisse costruita con dimensioni precisamente proporzionali a quelle del modello, perchè le spinte o forze crescono più che le resistenze dei materiali. Per convin-

cersene, e per dedur le regole onde calcolare la stabilitá della fabbrica con quella del modello, distinguiamo in tre classi l'effetto delle spinte. Alcune tendono a svellere le parti per distrazione come accade alle catene, altre a romperle per traverso come nelle travi, ed altre a schiacciarle per compressione come nei muri o colonne. Chiamiamo a, b, c là lunghezza, la larghezza, e la grossezza del solido, e sia $1 : n$ il rapporto tra il modello e la costruzione. In ogni caso la spinta cresce dal piccolo al grande nel rapporto $1 : n^3$ perchè sta come il peso, e questo come il volume, o come la ragion de' cubi dei lati omologhi. La resistenza alla distensione cresce come la sezione trasversale (7), e passando dal modello alla fabbrica avremo

$$b \times c : nb \times nc :: 1 : n^2.$$

La resistenza alla rottura per flessione, prodotta da forza che agisca perpendicolarmente alla lunghezza, sta in ragione diretta della larghezza e del quadrato dell' altezza, ed in ragione inversa della lunghezza (27), e perciò per questa si avrà

$$\frac{bc^2}{a} : \frac{nb \cdot n^2c^2}{na} :: 1 : n^2$$

cioè il medesimo rapporto della precedente. Quella alla flessione per schiacciamento stando direttamente alla larghezza e al quadrato della grossezza, ed inversamente al quadrato della lunghezza (38) darà

$$\frac{bc^2}{a^2} : \frac{nb \cdot n^2c^2}{n^2a^2} :: 1 : n.$$

Onde la resistenza cresce meno della spinta, e i pezzi avranno tanto minor fermezza nella fabbrica che nel modello, quanto più grande sarà n; il quale potendo crescere a segno che la fabbrica non resista è utile determinare il limite per l'ingrandimento del modello. Sia P il maggior peso cui possa reggere una parte del modello, e p quel peso o spinta che attualmente essa sostiene. Per i pezzi che nella fabbrica sono esposti alle due prime resistenze lo sforzo massimo sara n^2P, e per quelli esposti alla terza resistenza nP, mentre la spinta che soffriranno si dovrà rappresentare con n^3p. Quindi per la stabilità dovremo avere nei due primi casi $n^3p < n^2P$, e tutto al più $n^3p = n^2P$ cioè

$$n = \frac{P}{p}$$

e per il terzo caso $n^3p < nP$ e tutt' al più $n^3p = nP$ cioè

$$n = \sqrt{\frac{P}{p}};$$

e questi due valori di n assegneranno respettivamente i limiti dell' ingrandimento che può darsi ad un modello.

Che se occorresse accrescerlo oltre a questo limite, dovrà mutarsi la proporzione nella misura di qualche lato, affinché la fabbrica conservi fermezza. Vogliasi per es.° conservare ad un trave la lunghezza na, e la larghezza nb e si cerchi l'altezza xc conveniente per conservare stabilità; la resistenza del trave nel modello starà a quella del trave nella fabbrica nella seguente proporzione

$$\frac{bc^2}{a} : \frac{nb \cdot x^2c^2}{na} :: 1 : x^2,$$

e perciò il massimo peso che il trave della fabbrica potrà sostenere sarà x^2P. Ma esso sarà gravato dal peso n^3p, quindi per lo meno dovremo porre $x^2P = n^3p$ cioè

$$x = n\sqrt{\frac{np}{P}}.$$

Per secondo esempio poniamo che un pilastro a base quadrata deva conservare l'altezza proporzionale na, e possa variare il lato c. Dal rapporto della resistenza

$$\frac{c^3}{a^2} : \frac{x^3c^3}{n^2a^2} :: 1 : \frac{x^3}{n^2}$$

abbiamo il peso che il pilastro potrà sostenere $\frac{x^3}{n^2}P$,

mentre quello che lo ha da caricare è n^3p. Quindi per lo meno dovrà essere

$$\frac{x^3}{n^2}P = n^3p \text{ cioè } x = n\sqrt[3]{\frac{n^2p}{P}}$$

Fin qui abbiam parlato di resistenza alla rottura, ma con egual facilità data la deformazione che segue in una parte del modello si può dedurre quella che avrà luogo nella parte corrispondente della fabbrica; e quando trattasi di solidi stirati e compressi accade per la deformazione quello che abbiamo detto per la rottura; quando poi trattasi di travi sottoposte alla flessione la deformazione f passando dal modello alla fabbrica dà

$$\frac{Pa^3}{bc^3} : \frac{n^3P \times n^3a^3}{nb \times n^3c^3} :: 1 : n^2$$

per conseguenza è proporzionale al quadrato del rapporto n.

40. *Effetto dei punti di rottura, e degli appoggi sulla resistenza dei solidi, qualunque sia la direzione della forza rapporto alla loro lunghezza.* — Le osservazioni già fatte sù solidi incastrati e sorretti ci fan conoscere che si può con studiati appoggi aumentare la resistenza. Se il trave orizzontale F F (fig. 5. Tav. I.) in luogo di esser sostenuto sia incastrato alle sue due estremità sosterrà al mezzo un peso quadruplo di quello che il medesimo pezzo sosterrebbe incastrato ad una sola estremità, e caricato all'altra: parimente anche la flessione si valuterà per un quarto. Quando il trave sarà fortemente murato ai due estremi e per tratti notabilmente lunghi la resistenza potrà dirsi anche più che quadrupla, perchè si tende a produrvi soltanto la rottura per distensione. E riflettendo che ogni punto ove deve accader la rottura ha bisogno di egual forza si trovano in questa disposizione tre punti di rottura, due agli estremi ed uno al mezzo, onde tripla forza occorrerebbe per rompere il trave di quella che richiedesi quando agli estremi è semplicemente appoggiato, e per conseguenza sei volte più grande che quando fosse incastrato ad una sola estremità, e avesse il peso all'altra.

Partendosi da questa regola dei punti di rottura, è facile stabilire quanta è la resistenza di un antenna caricata verticalmente (fig 6 Tav. I.) nelle diverse disposizioni in cui può porsi, come anche quella di altro trave comunque obliquo all'orizzonte, e munito di appoggi o ritenuto da adattati incastri. È chiaro che quando trattasi di travi inclinati, decomposta la forza (Intr. 123), in una nella direzione del trave, e l'altra normale al medesimo, si deve considerar sottoposto ai due sforzi, e perciò si ricade nella considerazione del trave orizzontale e verticale. Il parallelopipedo rappresentato dalla linea A semplicemente appoggiato ai due estremi non può che flettersi con un sol ventre, e rompersi in un sol punto; in questa disposizione che si è già considerata (38) trovasi il gomito della manovella, e si ha la minima resistenza. Quando, come si rappresenta in B, il solido è incastrato ad un estremo, si produce un sol ventre ma due punti di rottura, uno al mezzo e l'altro all'estremo dell'incastro, e perciò la resistenza si avrà per doppia. Egualmente doppia sarebbe se come vedesi in D fosse semplicemente appoggiato in fondo ed al mezzo, perchè si dovrebbe nel piegarsi aver due ventri, e quindi due punti di rottura. Potrebbe divenir tripla, e

quadrupla nelle disposizioni accennate in C ed E. In generale riterremo come suole stabilirsi in meccanica (sebbene non sarà dottrina molto esatta) che la resistenza di un pezzo è proporzionale al numero delle sezioni di rottura, o al numero delle inflessioni che posson prodursi per effetto della disposizione degli appoggi; e che grandissimo è il vantaggio che si ha nella resistenza col ritenere in guida, o ferme sull'asse primitivo alcune parti del pezzo che deve resistere. Esempj ne abbiamo nell'uso delle antenne, nei puntoni e sorgozzoni che si usano per l'armature ec.

41. *Effetto degli incavi, e delle nervature o rinforzi per la resistenza de' solidi.* - Nella fig. 7 Tav. I. ho voluto accennare molte forme che si danno alle sezioni dei solidi per aumentare la lor resistenza nella flessione. Ognun conosce come si possa avere maggior resistenza adoprando una quantità di materia per formare un solido in forma di tubo A, B, che a cilindro o parallelopipedo tutto solido. Ritenute le denominazioni consuete il momento della resistenza è

$\frac{R\ \pi\ r^3}{4}$ per il cilindro, e $\frac{R\,bc^2}{6}$

per il parallelopipedo. Se la sezione verrà vuotata siccome mostrasi in A, B, dovrà prendersi il momento della resistenza come quando é piena, e si dovrà sottrarre da quello il momento della resistenza del solido, che occuperebbe il luogo vuoto. Dal caso precedente deducesi anche come dovrà procedersi quando si abbian solidi la cui sezione venga rappresentata dalle figure C, D, F, E, G, o anche della forma indicata dalla fig. 8. Tav. I. Quest' ultima forma che ci rappresenta in ABC la sezione essendo A, C le due traverse solide allontanate fra loro dello spazio B, ci dà luogo di far comprendere, senza lunghi calcoli, il vantaggio che si ha nel lasciare convenientemente degli incavi; infatti il momento della resistenza senza l'incavo B sarebbe stato $\frac{R\,bc^2}{6}$

e con quello sarà

$$\frac{R\,b}{6}\left[(c+c')^2-c'^2\right]$$

e così supererà quello primo di

$$\frac{R\,b}{6}\,.\,2\,c\,c'.$$

Le diverse nervature, facendo sporgere in fuori alcune parti del solido, lasciano fra di loro un qualche vuoto, onde se ne può calcolar l'effetto coll'accennata regola.

42. *Forma di alcuni oggetti naturali, e artificiali dipendente da questi principj.* — La natura ci offre esempj di corpi leggerissimi ed assai resistenti nelle piume degli uccelli, e negli steli di alcune piante erbacee che sono formate a sottil cilindro vuoto, e così resistono molto ed egualmente in ogni direzione. Gli animali e particolarmente quelli di gran mole se non avessero tubulari le ossa non potrebbero neppure sostenere il loro enorme peso. Da queste dottrine dipende anche il non esser sempre più forti gli individui d'una certa specie che hanno maggior grandezza. Le proporzioni tra la larghezza e la grossezza di alcuni ossi; alcune cristallizzazioni a tramoggia, e a piramide; la curvatura stessa dei rami degli alberi che verge verso l'alto; la disposizione dei diversi gruppi nelle cristallizzazioni; i rinforzi o nervature che si vedono sul guscio di alcuni crostacei sono tanti esempi naturali di buone regole per la resistenza.

Nella figura CD (fig. 7 Tav. I.) si

vedono le forme che si danno alle sezioni dei bilancieri da usarsi in diverse macchine e particolarmente in quelle a vapore, rappresentateci in piano dall'altra fig. 11 Tav. I. Quando la resistenza si vuole aumentare in un'asse perchè non si pieghi in direzioni poste ad angoli retti si usano i rinforzi a croce E, o a diagonale F. Se vuolsi render difficile il piegarsi in tutte le direzioni si usano rinforzj a disposizione triangolare G, i quali adattatissimi sono anche negli assi di ferro fuso per le rote idrauliche (fig. 10 Tav. I). L'uso delle nervature è interessantissimo nei pezzi di metallo che per il loro gran peso specifico non possono avere grandi dimensioni: cioè non solo negli assi, quanto nei colonnini, nelle mensole, nei sopporti ec. E si sogliono convenientemente studiare anche le dimensioni di tali rinforzi, come si vedrá in seguito da alcuni esempj.

43. *Applicazioni, e regole di pratica.* — I. Per i lavori di legnami principalmente si deve, come abbiam detto, ritenere tra l'altezza e la larghezza il rapporto 7 : 5 onde fatto $b = {}^5/_7\, c$ si avrà per i legni incastrati ad un' estremo e caricati all'altro estremo

$$bc^2 = \frac{\text{P}a}{100000} \text{ ovvero } c^3 = \frac{\text{P}a}{71429}.$$

Onde se fosse richiesto qual deve essere l'altezza, e quale la larghezza di un legno incastrato, lungo 2^{m} che debba portare all' estremo libero 800 k.; si avrebbe

$$c = \sqrt[3]{\frac{800.2}{71429}} = 0,^{m}2819$$

e $b = {}^5/_7 \times 0,^{m}2819 = 0,^{m}2014.$

Facendo il legno di sezione quadrata si sarebbe avuto

$$c = \sqrt[3]{\frac{16}{1000}} = 0^{m},25,$$

e poichè la sezione nel primo caso diviene di metri quadrati 0,057, e nel secondo 0,063 è manifesto esser di minore economia usare il legno a sezione quadrata.

II. Come deve farsi grande il diametro di un cilindro di ferro che posato sù due appoggi distanti due metri ha da reggere al mezzo 10000k. oltre al proprio peso. Se si usasse la formula
$$\text{P} + \frac{pa}{2} = \text{R}\frac{\pi r^3}{2a}$$
dovrebbe risolversi un equazione di terzo grado perchè il p porta un r^2, ed in pratica converrà piuttosto trascurando il peso del cilindro di ferro determinare approssimativamente il diametro, e quindi il peso, ed aggiunger poi la metà di questo al carico dato per calcolare con approssimazione maggiore il diametro richiesto. Avremo dunque

$$10000 = 6000000.\frac{22}{28}r^3$$

ovvero $r = \sqrt[3]{\frac{28}{132000}} = 0,06$ circa,

e perciò

$$pa = 7788.\,2.\frac{22}{7}(0,06)^2 = \text{k}.176,3.$$

Dovrà ora essere

$$10000 + 88,15 = 6000000\frac{22}{28}r_3$$

ovvero $r = \sqrt[3]{\frac{2824702}{13200000000}} = 0,^{m}06$

cioè non ha portata differenza apprezzabile l'aggiunta del peso, e per conseguenza il diametro cercato dovrà essere dodici centimetri.

III. Vogliasi determinare le dimensioni per un' asse di ferro che non solo resista, ma che anche pochissimo si pieghi, rappresentando con d il diametro. Se trattasi di un'asse che ha da servire per una ruota idraulica prenderemo la formula

$$d^3 = \frac{\text{P}a}{368156}$$

nella quale si dà ad R un piccolissimo

valore cioè k. 3750000, ed anche suol farsi la lunghezza del pernio eguale al diametro.

La stessa formula servirà per gli assi che sono esposti a molti urti. Per gli alberi di comunicazione di moto, i quali sogliono esser bene ingrossati fatto $a = d$ si userà la formula

Ghisa . . $d^3 = \frac{P}{136312}$ ove $R = 7500000$

Ferro lav. $d^3 = \frac{P}{389050}$ ove $R = 6000000$

Per i mozzi delle vetture conviene diminuire quanto è possibile il lavoro consumato dall'attrito, e tenere dimensioni più piccole e si farà adoprando ferro di prima qualità

$$d^3 = \frac{Pa}{700000} \text{ ove } R = 7130124$$

IV. Vogliansi le proporzioni nelle diverse parti che compongono un solido munito di rinforzi o nervature. Sia primieramente il solido, incastrato ad una estremità e rinforzato a guisa di mensola, come sarebbe C se non avesse gli aggetti inferiori (fig. 6 Tav. I.), si chiami sempre b la larghezza del solido, c l'altezza, b' la larghezza della mensola c' la sua altezza. Quando si fa $b' = c = {}^1/_5\, b$, e $c' = b$ ed il pezzo è di ghisa la formula da usarsi è

$$b^3 = \frac{P\,a}{420000};$$

e quando si adottano le proporzioni $b' = c = {}^1/_5\, b$ e $c' = {}^1/_2\, b$ la formula sarà

$$b^3 = \frac{P\,a}{247500}$$

Data alla sezione del solido la forma di un I, quando l'aggetto dei rinforzi $b' = {}^1/_5\, b$, la distanza tra un aggetto e l'altro $c' = 2\,b$, e $c = 10\,b$, la formula sarà

$$c^3 = \frac{P\,a}{329350}$$

Che se, come accade talvolta ne' bilancieri si fa $b = {}^1/_4\, c$, $b' = {}^1/_{14}\, c$, $c' = {}^5/_8\, c$ useremo la formula

$$c^3 = \frac{P\,a}{192000} \text{ per il legno}$$

$$c^3 = \frac{P\,a}{15360} \text{ per la ghisa.}$$

Avendosi un solido la cui sezione formi una croce posto $b = {}^1/_5\, c = c' = b'$ la formula diviene pel ferro fuso

$$c^3 = \frac{P\,a}{254000}$$

quando la forza agisce nel piano del lato della croce. E trascurando i rinforzi che formano il lato traverso si sarebbe avuto

$$c^3 = \frac{P\,a}{250000};$$

onde vedesi come è piccolo l'effetto di questi rinforzi. Perciò i pezzi di tal forma si usano quando la forza agisce a diagonale con i lati della croce. Gli alberi delle ruote idrauliche di ferro fuso (fig. 10 Tav. I.) si fanno di sezione quadrata e con rinforzi che forman croce nella direzione della diagonale, ovvero di sezione circolare e con rinforzi a croce; eccettuato gli estremi ove si fa lo sforzo, i quali debbono avere una sezione quadrata, poligonale, o circolare.

V. Se il solido ha la forma di una semiparabola (37) BAO (fig. 9 Tav. I.) come suole occorrere per le mensole le ordinate y si misurano dall'asse: e avendosi quella di una parabola OBO' si misurano da una parte all'altra della curva. Un bilanciere di questa forma, il quale porti (fig. 11 Tav. I.) un asse nel suo mezzo e due forze applicate alle estremità presenta egual resistenza in tutti i suoi punti perchè il pernio tien luogo della fermatura all'incastro. Parlandosi dei bilancieri di macchine a vapore si valuta lo sforzo P pel doppio di quello che corrisponde alla

pressione ordinaria nella caldaja, e ritenuto che la forma dovrebbe esser parabolica, pure si suol dare all' estremità un altezza eguale al terzo di quella del mezzo, e si soglion far passare per i punti così determinati dagli archi di cerchio che limitano i contorni superiore e inferiore del bilanciere. Per supplire all' indebolimento che in questi bilancieri si fa con i diversi fori, che convien praticarvi, si pongono dei rinforzi, o nervature lungo i bordi, e lungo l' asse della figura (42).

Esempio. — Quali debbono essere le dimensioni del bilanciere di una macchina a vapore a bassa pressione? il cilindro ha un diam. $=0,^{m}9$ la corsa dello stantuffo é $=1,^{m}82$, e la tensione del vapore $=1,25$ atmosfere, e il bilanciere è lungo $5,^{m}61$. Lo sforzo del vapore dovrà valutarsi

$$\frac{2\times 10330\times 1,25\times 3,14\times (0,9)^2}{4}=k,16429$$

La formula della resistenza da usarsi è

$$c^3=\frac{P\,a}{103900}$$

quando l' altezza é 16 volte la grossezza. Dalla quale si ottiene

$$c=\sqrt[3]{\frac{16429\times 2,^{m}806}{103900}}$$

$$=\sqrt[3]{0,4435}=0^{m},765$$

Quest' esempio è relativo alla macchina a vapore della filanda di Logelbach costruita dai sigg. Watt e Boulton, i quali hanno fatto l'altezza del bilanciere $=0^{m},750$.

Resistenza alla torsione.

44. *Principj da' quali si desume la resistenza de' solidi incastrati ad un estremo, e all'altro sottoposti alla torsione.* — Ritenuta un' estremità di un solido, e fatta girar l' altra attorno all' asse per mezzo di una forza, la quale agisca con una leva o verga fermata al solido in direzione normale all' asse istesso, tutti i filamenti del corpo si piegano in elica. Questi considerati per piccolissima estensione può dirsi che son piegati similmente a quelli di un solido sorretto agli estremi ed aggravato al mezzo. Onde la dottrina della resistenza alla torsione è analoga a quella della flessione, e

I. Come abbiam veduto che la resistenza elastica alla flessione è (27) proporzionale al cubo della grossezza e alla larghezza, cioè vi entrano quattro volte fattori i lati, dovrassi anche la resistenza alla torsione esprimere per una funzione della quarta dimensione, se non che egualmente conterrà la larghezza e la grossezza.

II. Parimente starà la resistenza elastica alla torsione in ragione inversa della lunghezza.

III. Come anche per legge generale dell' elasticità dovrà stare in ragion diretta dell' angolo di torsione.

IV. La resistenza specifica di un corpo alla torsione, cioè quella che presenta sotto l' unità di forza, e sotto l' unità in tutte le dimensioni deve avere un rapporto determinato colla resistenza specifica alla flessione, o con la quantità che si è detta coefficente d' elasticità.

V. La resistenza alla rottura per torsione una volta meno dell' altra elastica avrà per fattore il lato del solido perchè al punto della rottura le fibre non posson dirsi più estendibili o compressibili.

VI. Ed in questa resistenza non potrà influire la lunghezza del solido, giacchè quanto esso è più lungo, più grande si ottiene l' angolo di torsione con un medesimo peso, ma lo sforzo sovra le fibre non varia.

VII. La resistenza specifica alla rottura per torsione deve avere un rapporto costante con quella alla rottura per flessione.

45. *Formule ed esperienze sulla resistenza alla torsione.* — Siano tuttora a la lunghezza del solido, b, c la larghezza e la grossezza, se è di sezione rettangolare.

b il lato, se la sezione è quadrata;

r il raggio, se la sezione è circolare.

θ l'angolo descritto dal diametro della sezione estrema durante la torsione. Questo si determinerà per il rapporto che è tra l'arco che lo misura e l'intera circonferenza.

P la forza che produce la torsione.

R il braccio di leva con cui questa forza agisce.

G la resistenza specifica alla torsione: quantità costante per ciascuna specie di corpi, la quale determina il rapporto tra il momento della forza agente, e la somma de' momenti di resistenza che le oppongono le particelle del corpo.

T la resistenza specifica alla rottura per torsione.

Coerentemente ai principj esposti, col calcolo ritrovasi per la deformazione nel solido

di sezione rettang. $PR = G \frac{\theta b^3 c^3}{3a(b^2+c^2)}$

di sezione quadrata $PR = G \frac{\theta b^4}{6a}$

di sezione circolare $PR = G \frac{\theta \pi r^4}{2a}$

Dalle quali formule si può dedurre il valore della forza, P che in un solido è capace a produrre una certa torsione, ovvero quello dell'angolo θ della torsione che può esser prodotta da una determinata forza.

Il rapporto che teoricamente si trova esistere tra la resistenza specifica G, e il coefficente E dell'elasticità è determinato dall'equazione $G = \frac{2}{5} E$.

Si ottiene per la resistenza alla rottura nel solido

di sezione rettang. $PR = T \frac{b^2 c^2}{3\sqrt{(b^2+c^2)}}$

di sezione quadrata $PR = T \frac{b^3}{3\sqrt{2}}$

di sezione circolare $PR = T \frac{\pi r^3}{2}$

Il rapporto che per teoria esiste tra il coefficente T e quello R della resistenza alla rottura per flessione è

$$T = \frac{4R}{5}$$

ma non può credersi che sempre sia dall'esperienza verificata questa relazione, e per il difetto della non omogeneità de' corpi, e perchè all' istante della rottura le azioni molecolari interne del solido non sono più quelle che si erano supposte nella soluzione analitica.

Può dirsi che l'esperienze di Coulomb co' loro resultati han prevenuto la teoria della torsione, sebbene questo celebre fisico sperimentava principalmente sulle oscillazioni che fa il solido nello storcersi. Sulla resistenza alla torsione si sperimenterà coll' apparato che ho (4) di sopra descritto (fig. 2 Tav. I.), avvertendo di prender P eguale alla somma de' due pesi che si fanno agire. Con assai esattezza vengono dall' esperienza confermate le formule precedenti. La rottura per torsione anche nei legni non è subitanea. Il legno si apre lungo le fibre; molto prima della rottura si conosce non distribuirsi la torsione, uniformemente per tutta la lunghezza, ed accader solo nel luogo più debole. Le relazioni indicate dalla teoria tra la resistenza specifica alla torsione, e quella alla flessione non si verificano sperimentalmente che con un'approssimazione non molto grande, come può rilevarsi dalla annessa

TAVOLA
DEI COEFFICENTI PER LA RESISTENZA ALLA TORSIONE.

	valore per centim. q. di G	T
Querce la più forte..	81176	405,8
idem debole........	32840	167,2
Abete forte	62180	310,9
idem debole........	26830	134,1
Gattice..............	38420	——
Castagno............	41923	——
Ferro lavorato.......	661230	6011,1
idem	551060	5451,5
idem piemontese ...	719345	——
Acciaio..............	627340	9040
idem	549000	——
Ghisa................	434400	4506
idem dolce.........	312300	2586
Rame fuso..........	——	2311
Stagno	——	770
Piombo..............	——	533

46. *Osservazione.*- I coefficenti G,T riportati sono per le sezioni rettangolari, e si considereranno aumentati di $1/_5$ quando la sezione sarà un circolo. Nell'applicazioni ove occorre assicurarsi della stabilità si divideranno i valori del coefficente T per 10, per 3, o per 4, secondochè il pezzo è di legno, di ferro lavorato, o di ferro fuso.

47. *Formule per la pratica.* — Negli usi più comuni si potranno adoprare le seguenti formule ove si è preso per unità il kil. e il centim.

Per calcolare la deformazione o il grado di torsione nei pezzi di sezione rettangolare di

Ferro o acciaio $\theta = \frac{P.R.a}{550000} \times \frac{3(b^2+c^2)}{b^3 c^3}$

Legno ..... $\theta = \frac{P.R.a}{40000} \times \frac{3(b^2+c^2)}{b^3 c^3}$

Nei pezzi di sezione circolare di

Ferro o acciaio ..... $\theta = \frac{P.R.a}{60000.\ d^4}$

Legno .... $\theta = \frac{P.R.a}{5000.\ d^4}$

Per assicurarsi che non accada la rottura per torsione nei pezzi che han sezione rettangolare di

Ferro o ghisa P. R. $= 650. \frac{b^2 c^2}{3\sqrt{(b^2+c^2)}}$

Legno .... P. R. $= 20. \frac{b^2 c^2}{3\sqrt{(b^2+c^2)}}$

Nei pezzi che han sezion circolare di

Ferro o ghisa . . P. R. $= 153.\ d^3$

Legno .... P. R. $= 45.\ d^3$

48. *Applicazioni.* — I. Quale sarà la torsione di un albero cilindrico di ferro lungo 6 metri, e con diametro $0^m,08$, il quale porti all'una delle sue estremità un' ingranaggio di $0^m,30$ in raggio, che trasmette uno sforzo di 60 kil.? L'albero è sollecitato alla torsione in un'estremo dallo sforzo motore, e nell'altro dalla resistenza; è come se fosse fermato ove agisce questa, e torto dalla sola potenza. La formula dà

$$\theta = \frac{60.\ 30.\ 600}{60000.\ 8^4} = \frac{9}{2048} = 0^m,000044.$$

Quest'angolo essendo misurato sulla circonferenza di un centim. di raggio, l'alterazione prodotta dalla torsione alla circonferenza dell'ingranaggio sarà $0^m,000044 \times 30 = 0^m,00132$, e perciò del tutto trascurabile.

II. Con qual peso si può torcere di 30^o un cilindro d'acciaio lungo un metro, e grosso $0^m,08$ agendovi con una leva di $0^m,4$?

Avremo $\theta = \frac{30^o}{360} = \frac{1}{12}$ e perciò

$$P = \frac{\theta.\ d^4}{R.\ a} 60000 = \frac{8.^4\ 60000}{12.40.100} = 5120\ k.$$

Il meccanico può all'occorrenza adoprare per apparati dinamometrici i solidi esposti alla torsione e alla flessione.

III. Proponiamoci di trovare le dimensioni che deve avere una sbarra

quadrata di ferro per sopportare senza rompersi una forza di torsione di k.600, che agisca con una leva lunga un metro. Sarà

$$b = \sqrt[3]{\frac{P.R.42}{650}} = \sqrt[3]{\frac{600.100.42}{650}} = 0^m,157$$

Le trivelle per i pozzi artesiani si trovano in questa disposizione; in esse lo sforzo si fa ad un'estremo per trasmetterlo all'altro ove è lo strumento, e la resistenza è opposta dal terreno, che deve essere smosso. Siccome la loro lunghezza è spesso molto grande, ricevono una notabile torsione anche quando la resistenza è mediocre.

49. ***Diversi metodi con i quali si può determinare il coefficente d'elasticità.*** — Ritenuto che il coefficente E′ d'elasticità si ottiene col dividere E per la gravità specifica del solido non ci occuperemo che della ricerca della quantità E.

Il metodo più diretto per trovare E si ha nello stiramento dei solidi, e si può usare la formula.

$$E = \frac{P}{Ai}$$

come si è già mostrato (8), ovvero l'altra

$$E = \frac{L}{A} \times \frac{P' - P}{l' - l}$$

nella quale non tenendosi conto del peso assoluto si deduce E dalla differenza dei pesi P, P′ usati in due successive esperienze, e dalla differenza degli allungamenti totali l, l' ottenuti.

È stato considerato come inesatto il metodo della flessione, e realmente può portare a dei resultati assai discosti dal vero, se non si agisce con molta diligenza. Pure siccome è sì facile usarlo, può preferirsi ad ogni altro, quando non si trascurino le avvertenze da me già fatte a suo luogo, cioè ne' solidi sorretti ai due estremi si evitino le resistenze che tendono a ritener fisse le estremità, e nei solidi incastrati ad un' estremo si faccia uso delle formule da me per quelli stabilite. Laonde trattandosi di solidi sorretti alle due estremità distanti per a, ed aggravati dal peso P, se la sezione è rettangolare useremo la formula.

$$E = \left(P + \frac{5.\ 2\pi}{8}\right)\frac{a^3}{4bc^3f}$$

ove π è il peso del solido. E non volendo avere quest'elemento, dedurremo dalla precedente l'altra

$$E = \frac{P' - P}{f' - f}\,\frac{a^3}{4bc^3}$$

la quale dà egual resultato, sia che si usino regoli e prismi molto grossi, o piccolissimi, sia che si tenga il regolo appoggiato sù due rotelle o sostenuto da staffe pendenti e libere, o da due stipidi fissi, giacchè tutte queste disposizioni danno minimissime differenze. Quello che interessa avvertire si è che il coefficente così determinato per mezzo della flessione non corrisponde precisamente con quello dell'allungamento, e per l'esperienze da me fatte sù legni deve l'uno moltiplicarsi per $^8/_7$ onde corrisponda coll'altro dell'allungamento.

Trattandosi di solidi incastrati ad un' estremo converrebbe usare la formula

$$E = \frac{P' - P}{f' - f} \times \frac{a^2 + 3(\alpha a + \beta)}{4bc^3}.$$

nella quale dovendosi determinare α, β convien confrontare, come abbiam detto, la curva che prende il solido nell'esperienza con quella data dall'equazione che teoricamente le corrisponde (28): ciò porta a molti calcoli, e operazioni assai lunghe.

Porrebbesi anche dalla flessione per compressione dedurre il coefficente d'elasticità, ma le difficoltà che ho avvertito esistere in questo genere

d'esperienze rendono incerto il resultato. Inoltre io penso che ad ogni differente modo usato nel deformare i solidi corrisponda un particolar coefficente d'elasticità, onde converrebbe aver fatte molte esperienze per conoscere il rapporto tra quello dell' allungamento, e l'altro della flessione per compressione.

Con assai facilità, e con minore incertezza può la torsione dare il cercato coefficente d'elasticità per il rapporto che ho detto esistere tra le quantità G, E. Non è però esattamente d'accordo la teoria coll'esperienza sulla determinazione di questo rapporto; dalle esperienze fatte dal Professor Giulio sul ferro si deduce 4,6. G = 2 E, e dalle mie sovra i legni 4, 7 G = 2 E, mentre la teoria darebbe 5 G = 2 E. Premesso ciò, potrà nei pezzi cilindrici usarsi la formula (45)

$$G = PR \frac{2a}{\theta \pi r^4}$$

Che se invece di cimentare la resistenza si vorrà fare oscillare il corpo (45) potremo aver G col mezzo della durata delle oscillazioni, la quale è data dalla formula

$$t = \frac{\pi}{r^2} \sqrt{\frac{l I}{G}}$$

ove r, l sono il raggio e la lunghezza del cilindro che si fa oscillare torcendolo, ed I è il momento d'inerzia del bilanciere preso relativamente all'asse del filo.

Finalmente il metodo delle vibrazioni può adottarsi; ed è stato ultimamente usato dal Wertheim su' metalli a confronto di quello dello stiramento, e si può adoprare la formula

$$\log E = 2 \log V + \log D + 1{,}05130$$

nella quale V è la velocità del suono, e D la densità del solido. La velocità del suono si avrà tanto per il numero delle vibrazioni trasversali che longitudinali, e per quest' ultime può adoprarsi la formula

$$\log V = \log L + \log N - 5{,}22045,$$

ove L è la lunghezza della verga libera, o del filo metallico ritenuto agli estremi, che vibrano longitudinalmente, ed N è il numero delle vibrazioni longitudinali doppie che si compiono in 1″. Il Wertheim ha trovato che per i metalli omogenei i resultati tratti dalle vibrazioni longitudinali, e trasversali si accordano perfettamente, ma il metodo dell'allungamento dà ordinariamente numeri più piccoli per circa $^1/_{27}$. L'accordo tra le vibrazioni longitudinali e trasversali non ha luogo per i metalli non omogenei come sarebbbero il bismuto e l'antimonio; talchè potrebbe servire il rapporto tra la velocità del suono prodotto da vibrazioni longitudinali e trasversali per giudicare dell'omogeneità di un metallo.

50. *Legame fra la costruzione interna dei corpi, e il coefficente d'elasticità, e di resistenza.* — Questo vincolo si comprende facilmente, e le tre quantità

$$\frac{E}{G} \quad \frac{E}{G}, \quad \frac{R}{G}$$

ove G rappresenta il peso specifico, e le altre lettere han le consuete denominazioni (7. 11), compariscono come le più atte a caratterizzare le forze di tenacità, e di elasticità di ciascuna sostanza, o piuttosto i limiti respettivi di queste forze indipendentemente dalle misure adottate, o dalle dimensioni considerate in ciascun caso particolare. Abbastanza ho parlato della prima quantità mostrando come le convenga il nome di coefficente o *modulo d'elasticità*; e poichè tanto per ottenere un'allungamento proporzionale definito, quanto per ottenere la rottura in un solido

tenuto pendente da un'estremo, e stirato solo dal proprio peso, si deve nelle equazioni

$$P = A E i \qquad P = A R$$

sostituire quel peso che avrà il valore A L G otterremo

$$L = \frac{E}{G} i \qquad L = \frac{R}{G}$$

si vede alla seconda fra le rammentate quantità convenire il nome *altezza del modulo d'elasticità*, e alla terza *altezza del modulo di tenacità*. Che se si abbia l'allungamento i proporzionale massimo, la quantità

$$\frac{E}{G} i$$

sarà il *limite dell'altezza del modulo di elasticità.*

Siccome i Geometri han trovate delle espressioni pel coefficente d'elasticità nelle quali le forze molecolari entrano come funzioni incognite, il Wertheim dalla determinazione di quel coefficente deduce circa a queste forze.

I. Sia G il peso specifico di un corpo semplice, p il peso atomico o della sua molecola, α la distanza media relativa delle molecole ottiene

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{G}{p}}}$$

II. Che i coefficenti d'elasticità de'metalli son tanto più grandi quanto le molecole sono più avvicinate, ad eccezione del platino nel quale forse si risente l'effetto della sua lavorazione (Intr. 45).

III. Che la quantità $log\,(E\,\alpha^7)$ non solo è presso a poco costante per ciascun metallo, ma anche quasi in tutti i metalli: e da ciò deducesi che espresso con r il raggio d'attività di una molecola, la forza molecolare viene una funzione

$$f(r) = r^{-5}$$

cioè cresce molto più rapidamente della ragione inversa del quadrato della distanza, e alla temperatura ordinaria può aversi quasi in tutti i metalli come in ragione inversa della quinta potenza delle distanze.

IV. Che finalmente la $f(r)$ deve contenere la temperatura perchè $E\alpha^7$ è più piccolo a più elevata temperatura.

Resistenza agli urti.

51. *Principj dai quali si desumono le leggi della resistenza viva dei prismi.* — Per analogia con quello che si usa nella denominazione della forza viva dicesi resistenza viva quella che un corpo oppone alle scosse e agli urti, e siccome si vuol conoscere la scossa o l'urto che occorre tanto per deformare il corpo, quanto per romperlo, distinguesi anche questa in resistenza di elasticità e di rottura, e si indicano con T_e, T_r i respettivi coefficenti di resistenza. Le leggi fondamentali si desumono dall'avvertire

I. In queste resistenze si pone in equilibrio uno sforzo, che fa percorrere alle parti del corpo un certo spazio, e perciò devono esse misurarsi con lavori meccanici. La somma delle quantità di lavoro che la resistenza del prisma oppone all'azione dell'urto deve comporre la resistenza.

II. Poichè è legge generale d'elasticità che le mutazioni di posto nelle parti del corpo sono proporzionali alle forze che le producono, sarà la somma dei lavori elementari della resistenza elastica data da un'area di un triangolo (Intr. 107) rettangolo che ha la forza totale per un cateto, e per l'altro l'allungamento totale, o altra alterazione che ha sofferto il prisma.

III. La resistenza alla rottura non

facendosi per gradi suolesi considerare come data da un rettangolo che abbia per base l' allungamento accaduto precedentemente alla rottura, e per altezza il peso che la produce. Converrebbe perciò che il peso il qual produce la rottura fosse attaccato tutto in un tempo.

IV. Quando un corpo cede sotto un carico, è come se ricevesse successivi urti dal carico stesso, e perciò le precedenti osservazioni ci insegneranno non solo a misurare la resistenza ad un carico sotto il quale cede il solido, ma anche quella che esso opporrebbe ad un' urto, purchè si trovi il modo di confrontare la massa urtante all'altra che cade facendo cedere il suo appoggio. Ma siccome l' esser più o meno subitaneo l' urto, renderà nel corpo differente il reparto della forza, ne viene che non può dirsi le osservazioni precedenti portare, in tutti casi di urto, ad un calcolo egualmente esatto.

V. Quando si tratta di resistenza assoluta allo stiramento o alla compressione la forza deve esser proporzionale alla sezione A del prisma, ed a questa per conseguenza sarà proporzionale la resistenza.

VI. Parimente proporzionale alla lunghezza L del prisma sarà l' allungamento o l' accorciamento. Onde riterremo che la resistenza viva cresca in proporzione di questa, sebbene ciò abbia luogo più per quella elastica che per l' altra alla rottura, non potendosi ammettere perfetta omogeneità nel corpo, nè potendosi ritenere sempre, nell' atto della rottura, uniformemente per tutto il solido propagato l' urto.

52. *Formule ed esperienze sulla resistenza viva*. — Si deducono dalle cose precedenti le formule per la resistenza viva assoluta di elasticità T_e AL; di rottura T_r AL. E chiamato i' l' allungamento proporzionale al limite di elasticità, e P′ il peso che lo produce; R il coefficente della resistenza allo strappamento, ed l' l' allungamento massimo che può il solido acquistare, essendo il metro e il kilogrammo l' unità, si determineranno in kilogrammetri i coefficenti della resistenza viva, o i lavori meccanici che li rappresentano, colle formule

$$T_e = \frac{1}{2} P' i' = \frac{1}{2} E i'^2; \quad T_r = R l'$$

Sebbene facile sia il calcolo secondo queste formule pure per esattezza converrebbe preferire quello più laborioso che conduce alla determinazione di questi coefficenti per mezzo di esperienze dirette sulla reazione che all' urto oppone la resistenza del solido. Ben poche però sono l' esperienze state eseguite sù questo soggetto, e non si conoscono, che io sappia, dati da potervi fondare i calcoli. Onde la tavola seguente è dedotta coll' uso delle precedenti formule. Contuttociò penso util cosa istruire sul processo del calcolo almeno con due esempj che in appresso riferirò; il secondo de' quali è estratto dall' introduzione alla meccanica industriale di Poncelet, ove rimando il lettore per maggiori schiarimenti sul soggetto della resistenza agli urti.

Per eseguire esperienze sulla resistenza longitudinale dei prismi all' urto, si sospenderà verticalmente il prisma del quale è conosciuta la lunghezza e la sezione, e dopo di averlo caricato di un certo peso P, e di un' adattata cassa, si lascerà in questa cadere da determinate altezze un' altro peso P′, e si terrà conto dell' allungamento l' che era avvenuto per il primo carico, e di quello l'' che ha luogo per il carico secondo, ed anche di quello che av-

viene nell'atto dell' urto. Con questi elementi si posson conoscere, come vedremo le diverse leggi dei movimenti che accadono nel prisma, e i coefficenti della resistenza viva elastica, o della rottura, secondo che si è l'urto accresciuto fino a produrre soltanto un'allungamento, ovvero la rottura. Qui parlo solamente di resistenza longitudinale, ma è facile comprendere come si varieranno l'esperienze per provare la resistenza trasversale nella quale egualmente si desiderano buoni resultati sperimentali.

Tenendo dietro ai resultati d'esperienza si rimarrebbe in dubbio se devono nei pezzi sottoposti agli urti preferirsi l'acciaio o il ferro. Ma non tutti gli elementi, siccome abbiamo accennato, concorrono nella determinazione della resistenza agli urti, e tanto nel caso che si abbia un carico permanente, e si aggiungano degli urti, quanto nell'altro di urti violentissimi che posson far temere la rottura conviene preferire il metallo che la dà meno istantanea. Quindi agli urti si esporranno gli acciai meno temperati a preferenza di quelli fortemente temperati, e il ferro a preferenza dell'acciaio. In certi casi questa conclusione è applicabile anche al ferro in sbarre a confronto con i fili di ferro, perchè questi colla maggior resistenza hanno maggior rigidità, e ricuocendoli perdono il vantaggio della resistenza. Le catene di ferro duttile per la marina, sotto urti violentissimi cedono poco alla volta, e dan luogo ad apprezzare il progresso e l'imminenza del pericolo.

Qui riporterò la tavola che dà espresso in km. i coefficenti T_e T_r della resistenza viva d'elasticità e di rottura per millimetro quadrato di sezione e per metro di lunghezza.

TAVOLA
PER LA RESISTENZA VIVA

SOSTANZE	VALORI di T_e	VALORI di T_r
Grosse sbarre di ferro duttile...	0,003300	4,49700
Fil di ferro ricotto	0,003000	3,93000
» mal ricotto	0,006620	0,65000
» forte non ricotto	0,005850	0,08100
Acciaio ordinario temp.° e ricotto	0,015000	0,07000
» ingl. fuso di prima qualità.....	0,072600	0,16000
» fortemente temp.°	—	0,01250
» in filo della fabbr.	0,01560	0,07830
» temp.° e ricotto al blù.........	0,015000	0,05800
» ricotto........	0,015000	0,06880
Ghisa............	0,004250	—
Fil d'ottone ricotto	0,012500	4,51400
Forte non ricotto	0,012750	0,20050
Ottone fuso......	0,003800	—
Zinco fuso (*Tredgold*).........	0,000280	—
Stagno inglese fuso (*id.*).......	0,000520	—
Fil di piombo puro (*Ardant*)...	0,00124	0,350000
Piomb. fuso (*Tred.*)	0,001050	—
Platino tirato....	0,030875	0,03550
ricotto...	0,000805	0,01175
Rame tirato......	0,005760	0,12000
ricotto...	0,000406	0,69696
Argento tirato....	0,008195	1,30500
Oro tirato.......	0,018405	0,02260
Zinco tirato......	0,000032	0,64640
Cadmio..........	0,000001	0,99904
Piombo tir. e ricot.	0,000001	1,80000
Quercia.........	0,001700	0,012100
Abete giallo, bianco	0,001300	0,012100
Abete rosso o pino	0,003100	0,012100
Larice meleze...	0,001700	0,012100
Faggio rosso.....	0,001400	0,012100
Frassino	0,000700	0,012106
Olmo............	0,002800	0,012100

53. *Osservazione.* — Nella resistenza viva dei legni vi è molta uniformità, e l'opposto può dirsi accadere in quella dei metalli. Alla rottura mostrano gran resistenza il ferro duttile in sbarre, il fil di ferro ricotto, e il filo d'ottone ricotto, e subito ne vengono il filo d'argento e il filo di piombo, lasciando a gran distanza inferiori in resistenza viva gli altri metalli, sebben molto tenaci. Ciò fa dubitare che senza modificare i principj che sogliónsi porre per la resistenza viva, non si possa dalle sue formule ottener molto vantaggio nella pratica. A mostrar maggiormente incompleto questo soggetto, aggiungesi che le grandi differenze manifestate dalle diverse specie di ferro e d'acciaio rendon necessario che sien distinte le circostanze che fanno ad un medesimo metallo tanto variare la resistenza viva. Che se poi poniam mente a quanto differiscono i coefficenti nella resistenza viva elastica del zinco dello stagno e del piombo determinati da Tredgoldt, da quelli che successivamente ho riportati, calcolati da me dietro l'esperienze del Wertheim, convien concludere che occorrono nuove ricerche sull'elasticità di questi metalli. Infine dirò che la precedente tavola, sebbene sia il più che era dato nello stato attuale della scienza riportare, potendo anche estendersi per mezzo dell'altre tavole che sono a' numeri 9. 12. 19, pure non ispirerà piena fiducia nella pratica, finchè buona parte de' suoi numeri non verran confermati direttamente da esperienze sulla resistenza dei solidi agli urti. Poichè prima di questa conferma non può ritenersi che i calcoli appoggiati agli effetti dell'urto, combinino con quelli che han dato luogo alla tavola, e che dipendono dal carico che stabilisce il limite dell'elasticità, dall'allungamento che soffrono i corpi a questo limite, dal carico che produce la rottura, e dall'allungamento all'istante della rottura (51).

54. *Effetto degli urti sulla resistenza de solidi.* — Quanto poi sia interessante nelle applicazioni della meccanica conoscere la resistenza dei solidi agli urti è facil cosa comprendersi, perchè spessissimo si han nelle diverse parti delle fabbriche, e massimamente nelle sbarre dei ponti sospesi, scosse ben grandi, e sempre gli assi ed altri organi che compongono le macchine sono esposti ad urti più o meno violenti. Nè che poco sia l'effetto degli urti si può supporre dopo il veder che accade la rottura il più spesso nelle parti urtate. Per due cagioni l'urto agisce sulla resistenza, 1°: per la deformazione permanente che accade nell'urto quando essa raggiunge un qualche limite dell'elasticità (5), 2° per l'irrigidimento che si produce nel corpo, nelle successive ed opposte oscillazioni, che si generano per gli urti.

Ammesso che il corpo non variasse d'elasticità per questa seconda cagione, può dirsi che tutto l'effetto si ha da ricercare nel primo periodo d'oscillazione dopo l'urto; poichè se in quello non è raggiunto il limite dell'elasticità naturale, non può raggiungersi neppur nelle successive oscillazioni, le quali son sempre decrescenti. Siano M, M', P, P' le masse respettivamente e i pesi del corpo urtato e di quell'urtante; sia V la velocità dell'urtante, l l'allungamento avvenuto nel prisma urtato per l'effetto del proprio peso, ed l' quello avvenuto per l'urto; ritenuto A, L per la sezione e la lunghezza del prisma: avremo per il lavoro dell'allungam. primitivo $^1/_2\, Pl$

lav. prodotto nell'urto . . . $\frac{1}{2}\frac{M'^2V^2}{M+M'}$

„ dell'allungamento 2:° $\frac{1}{2}(2P+P')\,l'$

Ora trattasi di conoscere se la somma di queste tre quantità sorpassi o nò la resistenza viva all'elasticità T_e AL, ovvero la resistenza viva alla rottura T_r AL. Che se supera quella della rottura non ha luogo altra considerazione, e neppure se non giunge a quella viva di elasticità: Ma essendo superiore soltanto a quest'ultima si produrrà un' alterazione permanente, la quale andrà aumentandosi nelle successive oscillazioni a seconda della natura del corpo. Circa alle oscillazioni trasversali deve ritenersi il principio generale verificato dall'esperienza: che il numero e la durata delle oscillazioni, sono ne' limiti dell'elasticità perfetta interamente indipendenti dall'intensità degli urti, o dalle velocità impresse, e sono unicamente relativi al valore della resistenza elastica AE, alla lunghezza L del prisma, e alla sua tensione primitiva o naturale che può esser cagionata dal peso proprio, dal peso aggiunto, e dalla forza colla quale vien teso. La durata di un'oscillazione si calcolerà colla formula

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(P+P')\,L}{gAE}}$$

E il numero delle oscillazioni che han luogo in 1" e la loro ampiezza respettivamente per le altre

$$N = \frac{1''}{T},\quad 2\,l' = \frac{2P'L}{AE}$$

55. *Interpetrazione geometrica dei resultati e leggi del moto che succede all'urto.* — Sia AB = L (Tav. I. fig. 12) la lunghezza della verga di cui si tratta, BC = l il suo allungamento di stabilità sotto il carico P, BD = 2BC = $2l$ il suo allungamento massimo per la celerità acquistata sotto quel carico, e Bm l'allungamento che ha preso nell'istante in cui la celerità è V. Fatto un circolo col diametro BD, e condotta l'applicata mn si avrà

$$V = mn\sqrt{\frac{gAE}{PL}}.$$

Che se pongasi mm' per l'allungamento minimissimo in un tempuscolo elementare t, si avrà

$$t = \frac{mm'}{mn}\sqrt{\frac{PL}{gAE}} = \frac{nn'}{l}\sqrt{\frac{PL}{gAE}},$$

d' onde rilevasi che gli accrescimenti infinitesimi t del tempo sono proporzionali agli accrescimenti nn' dell' arco Bn che corrisponde all'allungamento BM. Onde la legge del moto negli allungamenti Bm, corrisponde ad un moto uniforme sul circolo Bn Dx; lo che si esprime col dire che la *celerità di circolazione* nn'/t del punto n è costante, e il tempo del moto si può calcolare colla formula

$$T = \frac{arc.\ Bn}{l}\sqrt{\frac{PL}{gAE}}.$$

Supposto che il carico P abbia una celerità iniziale V_1, esso dopo aver presa la sua posizione estrema, o la più bassa D', ritornerà indietro per eseguire una serie di oscillazioni simili in tutto a quelle che sono state considerate nel caso precedente, e che saranno anche assoggettate, alla medesima legge, se non che l'estensione

$$CD',\ \text{o}\ CB' = \sqrt{\left(l^2 + \frac{V_1^2\,PL}{gAE}\right)}$$

dell'escursione del punto B ove è applicato il carico si troverà aumentata, ma sempre avrà C per centro. Inalzata l' ordinata BN, si avrà

$$V_1 = BN\sqrt{\frac{gAE}{PL}}.$$

Per determinare il circolo che passa per B',D' il quale pone in grado di conoscere tutte le circostanze di questo moto oscillatorio si avrà

$$BC = l,\ BN = V_1\sqrt{\frac{PL}{gAE}}.$$

E determinato questo BD' sarà il più grande allungamento, BB' il *maximum* di contrazione; il tempo che l'estremità B mette a percorrere uno spazio qualunque Bm si avrà dalla formula

$$T = \frac{arc\ MN}{CN} \sqrt{\frac{PL}{gAE}}.$$

La celerità V ad un punto qualsivoglia m dà

$$V = Mm \sqrt{\frac{gAE}{PL}}$$

Se il tempo è quello d'un intera oscillazione l'arco NM diventerà un intera circonferenza.

Si aggiunga adesso l'urto dell'altro corpo P': Rappresenti CO l'allungamento che si ottiene per l'effetto del peso P'; preso

$$CN' = V_1 \sqrt{\frac{(P+P')L}{gAE}}$$

si descriva col centro O il circolo che passa per N'. Si avrà BD'', BB'' per l'allungamento, e la contrazione *maximum*. Essendo in y una posizione dell'estremo della verga nel tempo del moto, analogamente a quello che abbiam detto nei casi precedenti avremo la velocità a quel punto di moto determinata dalla formula

$$V = M'y \sqrt{\frac{gAE}{(P+P')L}}$$

Ed egualmente tutte le altre circostanze del moto oscillatorio che avevan luogo nel caso del peso P, accaderanno per i due pesi P, P' purchè si sostituisca il cerchio B''N''D''B'' a quelli B n DB, B'N D'B'.

Vedesi adunque che sovra una figura ben fatta potrebbero calcolarsi tutte le leggi del moto che succede l'urto. La dimostrazione di queste osservazioni si rileverà facilmente da quello che sarò per dire in appresse sulle oscillazioni del pendolo.

56. ***Esempio sulla determinazione del coefficente di resistenza viva elastica per mezzo di esperienze sull'urto.*** = In mancanza di resultati sperimentali, ad oggetto soltanto d'istruire nel calcolo necessario allo scopo, fingerò che un filo di ferro crudo lungo tre metri del diametro di 1,^{mm}20 sia stato cimentato per stiramento con 12k, ed inoltre sottoposto ad un urto di 2k. caduti dall'altezza 0,^{m}2 e non si sia ottenuta sensibile alterazione nella sua elasticità. Inoltre fatto cadere il peso de' 2k. da altezza maggiore si è prodotto nel filo metallico un sensibile allungamento permanente. Si vuol con questi dati ritrovare il coefficente di resistenza viva elastica del ferro tirato alla filiera. Per dirigere i calcoli come abbiamo già accennato (54) avremo

$$P = 12k.\ P' = 2k.\ g = 9{,}8,\ V = 1{,}^{m}98$$

$$l = \frac{PL}{AE} = \frac{12\ .\ 5000}{1{,}44\ .\ 18300} = 1{,}^{mm}38$$

$$l' = \frac{P'l}{P} = 1{,}^{mm}38 \times {}^{2}/_{12} = 0{,}^{mm}23$$

onde le tre quantità di lavoro da calcolarsi daranno km.

$$^{1}/_{2} \frac{M'^{2}\ V^{2}}{2(M+M')} = \frac{P'^{2}.V^{2}}{2g(P+P')} = \frac{4(1{,}98)^{2}}{2.9{,}8.14} = 0{,}0576$$

$$^{1}/_{2}\ Pl = {}^{1}/_{2}\ .\ 12\ .\ 1{,}^{mm}38 = 0{,}00828$$

$$^{1}/_{2}(2P+P')l' = {}^{1}/_{2}(24+2)0^{mm}23 = 0{,}00290$$

e la lor somma sarebbe 0,6887, ed essa assegnerebbe il cercato valore di T_e

57. ***Esempio sulla determinazione del coefficente di resistenza vera alla rottura per mezzo d'esperienze sull'urto.*** — Il Dufour ha sperimentato che alcuni fili di ferro con diam. 2,^{mm}1 sono stati rotti sotto l'urto di un peso di 10k. lasciati cadere dall'altezza di 0,^{m}95, mentre il carico permanente dei fili eguagliava la metà del carico massimo, cioè 104,5k, e dall'altezza 1,^{m}38 quando quello era il terzo del carico massimo o 69,7k. Si avrà dunque

$$A = 3{,}^{mmq}464,\ L = 2^{m},\ P' = 10k.$$

e nel primo caso di rottura

$$P = 104.5\,k.\ a = 0,^{m}95,\ V = 4,^{m}33$$

e nel secondo caso

$$P = 69,7,\ a = 1,^{m}38,\ V = 5,^{m}20$$

Noi supporremo generato il lavoro che ha prodotto la rottura, in ciascun caso dal più piccolo urto possibile, cioè in modo che il moto sia sensibilmente spento nell' istante della rottura. La metà della forza viva mentre si compie il primo periodo dell' urto è

$$\tfrac{1}{2}(M+M')\,V_1^2 = \frac{P}{P+P'}\,.\,P'a$$

cioe per il 1° caso

$$\frac{104,5}{114,5}\,10k.0,^{m}95 = 8,670\,km.$$

per il 2° caso

$$\frac{69,7}{79,7}\,10.k.1,^{m}38 = 12,068.km.$$

Aggiungendo a questo resultato il lavoro relativo all'allungamento l subito dai fili per il carico P avanti l'urto, e che nell' ipotesi dell' elasticità perfetta ha per valore

$$\tfrac{1}{2}\,Pl = \tfrac{1}{2}\,P.\ \frac{PL}{AE}$$

cioè nel 1° caso

$$\tfrac{1}{2}\,104.5 \times \frac{104,5.\,2}{3,464\,.1800} = 0,175\,km.$$

nel 2° caso

$$\tfrac{1}{2}\,69 \times \frac{69,7.\,2}{62552} = 0,078\,km.$$

Inoltre devesi aggiungere il lavoro sviluppato dai pesi P, P' mentre si fa il secondo allungamento, il quale non è trascurabile, sebbene noi non lo possiamo esattamente per mancanza di dati valutare. Pure lo valuteremo approssimativamente adattando per termine di confronto il valore medio del più grande allungamento ottenute da Dufour nelle diverse esperienze da esso fatte, che per i due metri i quali formano la lunghezza del filo è $0,^{m}008$. Osserviamo che l' allungamento avanti l' urto deve essere

per il 1° filo $l' = \dfrac{104,5.\,2}{62352} = 0,^{m}0034$

per il 2° „ $l' = \dfrac{69,7.\,2}{62552} = 0,^{m}0022$

e detragghiamo questo dall' allungamento totale $0,^{m}008$; avremo per i lavori da aggiungere

$$114,5k.(0,^{m}008-0,^{m}0034) = 0,527.km.$$

$$79,7k.(0,^{m}008-0,^{m}0022) = 0,462\,km.$$

e le quantità del lavoro totale saranno

$$8,670 + 0,175 + 0,527 = 9,372.km.$$

$$12,068 + 0,078 + 0,462 = 12,608.km.$$

finalmente dividendo questi resultati per il prodotto $AL = 3,464.2 = 6,928$ si otterranno i lavori respettivi

$$T_r = 1,35.km.\quad T_r = 1,82.km.$$

per le resistenze vive alla rottura nei due fili per un millimetro quadrato di sezione e per un metro di lunghezza. Resultati che differiscono molto l' un dall' altro, e più da quelli registrati nella riferita tavola, come poteva aspettarsi perchè il peso P doveva aver passato il limite della perfetta elasticità, contro quello che si è supposto nel calcolo.

CAPITOLO III.

Della resistenza de' solidi al distaccamento.

58. *Diverse specie d'adesione delle superfici, e principalmente nei corpi cristallizzati.* — Le superfici di due solidi poste a contatto sotto determinate condizioni, aderiscono insieme, ed oppongono al distaccamento una resistenza la quale può dipendere da differenti cagioni secondo il modo che si è tenuto per unire insieme i due solidi. Mi pro-

pongo parlare di questa resistenza, che ordinariamente distinguesi col nome di adesione delle superficî, sia per classare, le diverse cagioni dalle quali proviene, sia per darle in tutti i casi il respettivo valore. Si prendano due pezzi di piombo, e ridotta in entrambi con un temperino una faccetta ben piana e lucida, si facciano combaciare queste faccette premendole fortemente e soffregandole l'una contro l'altra; si troverà che esse rimarranno attaccate insieme, e occorrerà non poca forza per distaccarle. Si abbiano due lastrette di cristallo bene arrotate in piano, ed essendo un poco umide si porti l'una sull' altra con strisciarvele forzatamente, rimarranno sì aderenti che solo con molto sforzo si separeranno quando questo agisca normalmente alla superficie di contatto: sarà poi men difficile staccarle strisciando l'una sull'altra. Questi sono due fatti che hanno apparente analogia ma ben diversa cagione, e prima di parlare di questi e di altri che danno un'adesione artificiale mi piace premettere qualche cosa su quella naturale che scorgesi nei corpi cristallizzati.

Il carbonato di calce cristallizzato come anche tutti gli altri cristalli mentre sono percossi si aprano scoprendo delle facce cristalline o superfici ben piane che rimanevano talmente aderenti da non far conoscere all' occhio traccia della loro unione. In quelle parti della sostanza ove i cristalli sono obliterati o aggruppati la divisione non ha luogo se non che con faccette piccolissime, e non è possibile scoprire fessure estese. A queste fessure si dà in mineralogia il nome di giunte o commettiture naturali, è volgarmente i lapidari le dicono clivaggio. La frattura che è uno de' caratteri meccanici distintivi dei minerali diversifica dal clivaggio perchè si riscontra talvolta regolare anche nelle sostanze che non han determinata cristallizzazione, e vedesi spesso scagliosa o a piccole lamine che possono essere distaccate con maggiore o minor facilità, e riconosciute alla vista o per differente colore, o per piccole fessure. Nelle pietre l'umido e il caldo, cioè le vicende atmosferiche producono l'aumento di queste fessure, e la separazione delle parti: nè viene da questi principj la regola di riporle nelle costruzioni sul loro letto, o colla giacitura stessa che avevano in natura per ottenerne il massimo di resistenza. Vi sono le miche, i talchi, e il solfato di calce che si riducono in sottilissime foglie, e separate queste con sollecitudine danno sviluppo di elettricità; e forse da questa proviene la forza d'adesione nelle giunte, giacchè distaccate le parti di un cristallo non è più possibile farle aderire.

59. *Effetto della pressione atmosferica sulla adesione* — Si potrebbe credere che in gran parte la difficoltà che s'incontra nella separazione delle superfici, che avevano un buon contatto, dipenda dalla pressione atmosferica. Infatti a fare aderire (Tav. II fig. 1) due dischi metallici ben piani è utile coprirli con sottil velo di unto, scaldarli, e porli a contatto strisciando l'uno sull'altro con tutta la diligenza per escluder l'aria tra i due piani. Ciò fatto, oppongono essi grandissima resistenza alla separazione quando si tirano per distaccarli in direzione normale alla loro superficie, ma non ho mai potuto ottenere che questa resistenza giunga ad eguagliar quella della pressione atmosferica. L'esperimento può ritenersi come

analogo a quello degli emisferi di Magdeburgo (Tav. II fig. 2) che chiusi e vuotati d'aria aderiscono nel loro orlo con forza eguale alla differenza fra la pressione atmosferica esterna, e quella dell'elasticità che appartiene alla poca aria rimasta nell'interno. Vero è che i dischi alquanto resistono anche quando si voglion separare con sforzo parallelo alla loro superfice, ma la resistenza è in questo caso moltissimo più debole e può attribuirsi, al grasso o altra materia che si pone di mezzo. L'adesione potrà provenire dalla pressione atmosferica in tutti quei casi nei quali è impedito l'ingresso all'aria, ed allora avrà sempre per limite massimo del suo valore quello di un peso di un cilindro di mercurio con base eguale alle superfici adese, e con altezza di 760^{mm}, ovvero di kil. 1,033 per ogni centim. quadrato di superficie (*Intr.* 100). In tal disposizione si ritroveranno i pezzi di metallo che sono bene avvicinati fra loro, e talvolta perciò anche i placquè e i doublè; le lastre di cristallo bagnate e sopraposte, come anche altri corpi levigati e sopraposti; alcuni corpi non dotati d'affinità fra di loro che sono stati collocati a contatto allo stato liquido, e quindi sonosi solidificati; i coperchi, valvole, o tappi che chiudono i vasi quando nell'interno soffrono minor pressione di quella che hanno all'esterno per effetto della pressione atmosferica. Allorchè fra le superfici che si toccano può penetrar l'aria la pressione atmosferica non influisce nella loro adesione, ammenochè non si voglia produrre la separazione di essi con celerità maggiore di quella che può acquistar l'aria nell'insinuarvisi. Anche in alcuni dei casi rammentati l'adesione proveniente dalla pressione atmosferica talmente imita quella che ha luogo per attrazione molecolare, che mal si potrebbe distinguere l'una dall'altra se non avesse al suo valore il limite sopraccennato, e se non si potesse estinguere col facilitare fra le due superfici l'ingresso all'aria, o col porle nel vuoto boileiano.

Ho parlato qui d'adesione proveniente da pressione atmosferica, ed in questa stessa specie intendo si deva comprendere quella anche proveniente da qualsivoglia altra pressione esterna. Vi è un fenomeno di questo genere, il quale facilmente si produce nelle valvule delle macchine a vapore, e all'orifizio delle soffierie, e con dannose conseguenze in queste, ma in quelle poi pericolosissime se non fosse evitato con adattati meccanismi. Il foro pel quale il fluido aeriforme con moltissima forza esce sia praticato in lastra assai estesa, e vi si approssimi un piano solido; si vedrà che questo è attratto anzichè allontanato dal foro, e si mantiene talmente adeso a quello che in poca quantità a stento, e sibilando ne esce il fluido.

60. *Adesione per effetto di una sostanza frapposta.* — Il modo più comune per unire due pezzi solidi insieme è quello di usare una sostanza liquida la quale riempia tutto lo spazio che rimane fra le due superfici solide, e che sia dotata di un'affinità per la sostanza che compone le superfici, o almeno nel consolidarsi acquisti molta coesione nelle sue parti. La colla che si usa per i legni ritirandosi nel seccare avvicina le fibre legnose che formano le superfici di contatto: male può produrre quest'effetto quando si presentano due pezzi di legno per testa cioè nel senso normale alle fibre, e perciò allora la colla produ-

ce minore adesione. La colla di farina e quella d' amido agiscono massimamente per la coesione che acquistano nel prosciugare e perciò fanno effetto nelle sostanze porose, e non sù quelle dure e levigate. La ceralacca ed i mastici acquistano coesione soltanto quando si usano in pezzi ben caldi perchè allora nel ritirarsi mentre freddano non si distaccano; ed anche in questi corpi si facilita l'adesione colla scabrosità. Da principj analoghi deve pur ripetersi l'aderire delle saldature che si usano nei pezzi metallici e dei cementi con i quali si riuniscono le pietre e le terre cotte nei muramenti.

61. *Dei cementi e loro resistenza estrinseca.* — I cementi che si usano nella costruzione dei muri diconsi semplici allorchè si formano di una sola sostanza sciolta dal calorico o dall'acqua come sarebbe il bitume, lo zolfo, il gesso (*Intr.* 75), la pietra siliceo-calcarea d'Inghilterra; e composti se resultano dall'impastò di varie sostanze, tra le quali la più interessante è la calcina, e su di essa darò le principali avvertenze senza ripetere quanto ne ho detto nell'Introduzione (167). Per far buona calce convien servirsi di pietre a carbonato calcareo durissime e pesanti. Il marmo bianco dà ottima calce perchè contiene pochissima materia argillosa, ma un color cupo nella pietra non toglie che possa essere atta a dar buona calce giacchè d'ordinario gli ossidi metallici, dai quali proviene il colore, rendono la calce di buonissima qualità. La pietra vuole esser tolta di recente dalla cava, e cotta onde l'azione del fuoco li tolga gran parte dell'acido carbonico riducendola calcina viva. A questa ancora fresca si continua a toglier l'acido coll'estinsione operata così affondervi senza interruzione conveniente quantità d'acqua. Così spenta la calce, o ridotta in pasta, si copre di terra, e rimane anche per lunghissimo tempo preservata dall'azione dell'aria, che la corromperebbe col restituirli l'acido carbonico, ed anzi acquista col tempo miglior qualità. Più la calce è viva più essa si gonfia e regge una maggior quantità di sabbia, e mantiene la malta grassa e buona; molto la bontà della malta proviene dalla buona condotta delle due rammentate operazioni calcinazione ed estinsione. L'allumina e la magnesia che entrano nella composizione della pietra, rendono la calce di cattiva qualità. La silice la fa buona, e gli ossidi di manganese e di ferro la riducono magra. Diconsi grasse quelle calcine che nello spengersi all'opposto delle magre assorbono molt'acqua e aumentano molto di volume. Le calcine magre soglion godere della proprietà di quelle idrauliche, di assodarsi cioè prontamente dentro l'acqua. Non deve ritenersi che sieno per la resistenza preferibili le calcine grasse alle magre, riferisce il Cavalieri che una malta di calcina grassa mescolata in qualunque proporzione coll'arena non giunge mai ad avere più che due terzi della resistenza di un'altra malta di due parti di calcina magra ed una d'arena. La pasta di calce deve esser mescolata con una quantità di sabbia che eccede la metà della calce viva, ma varia a misura che è più o meno grassa la pasta. Si possono usare sabbie di differenti qualità: i costruttori le classano in fossili, fluviatili, e marittime, e si deduce dall'esperienze di Rondelet, che l'arena fossile aumenti e renda più pronta la tenacità della malta, che

è da preferirsi l'arena levata di recente dalla cava, che l'arena silicea pura come suol esser la fluviatile è buona per le calcine idrauliche: come dall'esperienze del Vicat deducesi, che con le calcine eminentemente idrauliche fan miglior lega le sabbie fini, che a quelle mediocremente idrauliche si addicono le arene miste di grani sottili e grossi, e che per le calcine comuni è più efficace il sabbione. L'arena migliore suole esser di color cupo e depurata dalle sostanze terrose; quella marittima deve esser posposta alle altre, o almeno se ne mitigherà il principio salino colle lavature. Con altre materie si mescola la calce, come sarebbero la polvere di mattone, la terrazza d'Olanda, la cenere di Tournay, e principalmente interessa di esser rammentata la pozzolana, materia vulcanica terrosa che abbonda nell'Italia fra gli Appennini e il mar Tirreno da Napoli fino al confine meridionale della Toscana, e da dove si trasmette alle più remote piaggie dell'Europa per le occorrenze delle grandi operazioni idrauliche, essendo capace a far con la calcina ottime malte di pronta e solidissima presa dentro l'acqua.

Qui convien farsi idea della forza colla quale i cementi legano insieme i pezzi di pietra, che suol dirsi la lor resistenza estrinseca per distinguerla da quella assoluta o intrinseca. Questa resistenza varia non solo nelle diverse malte ma anche nella medesima malta adoprata con differenti specie di pietre. L'esperienza mostra aderir meglio alle malte le pietre di minor durezza, e di minor compattezza, e con superficie più scabra. La pietra alberese o travertino, e i mattoni aderiscono meglio delle pietre calcaree. Sulle pietre arenarie fanno le malte minor presa, e il contrario accade sù quelle molari sebben sien dure. Con mattoni nuovi la malta, e in particolar modo il gesso, fa presa più solida che con quelli già bagnati o usati del tempo avanti; per la calcina si suole usare più acqua secondo che è più facile ad imbeversene la pietra. Va crescendo la resistenza estrinseca col tempo. Sulle prime l'aderenza fra il gesso e le pietre non si può stimare che $^{2}/_{3}$ della coesione del gesso istesso. In generale la resistenza estrinseca delle malte quando non ha fatta tutta la sua presa è alquanto minore di quella intrinseca, ma dopo tempo sufficiente diviene più tenace di quest'ultima. Qui riferirò la resistenza allo schiacciamento di varie specie di malte rilevata dalle esperienze di Rondelet eseguite 18 mesi dopo che era stata adoprata la malta per ogni centim. quadrato di sezione.

TAVOLA

SULLA RESISTENZA DE' CEMENTI.

sostanze	*resist. in kil.*
Calcina e arena fluviatile	30,7
Calcina e arena fossile	40,7
» con polvere di mattoni	47,6
» con 1 parte arena sottile 2 polvere di mattone	43,5
» con polvere di pietra arenaria	29,3
» con pozzolana di Roma	34,4
» con pozzolana bianca di Napoli	38,2
» con pozzolana di Roma e di Napoli mescolate	36,6
Malta ordinaria di gesso	49,6
» di gesso impastato con latte di calcina	72,6

62. *Delle saldature e loro resistenza.* — Il modo di saldare è nelle lavorazioni dei metalli un sogget-

to interessantissimo, e sebbene pochi principj scientifici vi contribuiscono riman difficile per le grandi avvertenze di arte che richiede. La scienza suggerisce di scegliere per saldatura una lega la quale si fonda a temperatura poco più bassa che il metallo da unirsi: se si prendesse una saldatura troppo facile a fondersi essa colerebbe prima che i pezzi da saldarsi avessero acquistato calor bastante, e non si attaccherebbero o almeno acquisterebbero pochissima adesione, come accade fra la ceralacca e il sigillo. E quand'anche si avesse cura di riscaldar preventivamente i pezzi metallici, non è utile adoprar saldatura tenera per metalli che si fondono difficilmente perchè questa resiste meno di quella che si fonde ad elevata temperatura, ed è men propria a soffrire la lavorazione col martello. Deve il metallo aver concepita la temperatura corrispondente a quella della fusione, della lega o poco più elevata perchè raffreddi l'uno insiem coll'altra che si solidifica: giacchè ritirandosi contemporaneamente i due metalli non si distaccano, e l'affinità chimica è fra di loro più potente ad elevata temperatura. Si deve aver cura di togliere il metallo dal fuoco appena è fusa la lega, passando questa facilmente dal punto della fusione a quello dell'evaporazione, ed allora rimarrebbe in piccola quantità, e scorrerebbe in luogo diverso da quello ove deve saldarsi. Si pone la saldatura soltanto in quella minor quantità che occorre per riempier lo spazio che resta fra le due superfici bene avvicinate; in molta copia lascerebbe troppo vistoso il luogo di riunione; ed anche men solida l'adesione. Il metallo vuole esser preparato colla lima onde ben si connetta nel luogo da saldarsi, e ben pulito dall'ossido. A questo oggetto principalmente si usano alcune sostanze che fondendosi a piccol calore scorrono sul metallo lo difendono dall'ossidazione che vi produrrebbe il fuoco, ed anche attaccandolo rendono più facile l'azione chimica fra esso e la lega. La trementina, la pece greca, il borace, e il vetro possono essere usati a quest'oggetto, e facilitano la fusione e lo scorrere della lega. Nel luogo della saldatura non si ottiene mai perfetta malleabilità, e si conserva più o meno secondo le differenti leghe il carattere di friabilità che suol aversi ne' metalli fusi.

La lega si unisce al metallo con forza maggiore della sua propria coesione, e questo rilevasi da rimanere nell'atto della rottura aderente alle due superfici metalliche uno strato di lega. Quindi la forza di adesione nelle saldature è quella stessa di coesione della lega ed a conferma di ciò può confrontarsi la seguente tavola dei resultati che io ho ottenuto staccando per stiramento dei fili metallici saldati, insieme con la tavola sulla resistenza dei corpi allo stiramento (12)

saldatura	metalli saldati	resistenze per ogni centim. q.
ad argento il	ferro	4249
»	ottone	2890
»	rame	1872
ad ottone	rame	643
a stagno	ottone	774
id.	rame	509
a lega di Durcet	rame	120

I gioiellieri per saldar l'oro fanno una lega di questo metallo con un terzo, un quarto, un sesto ec. di altra di argento e rame a parti egua-

li, secondo il grado di fusibilità che voglion dare alla lor saldaturà (*Intr.* 170). Essi lavorando in oggetti delicati han spesso bisogno di elevar la temperatura solamente nel punto della riunione, ed usano a tale oggetto il fuoco raccolto sull'estremità di un carbone, dirigendo al luogo della saldatura la fiamma di una grossa candela con un cannello di rame incurvato ove soffiano colla bocca.

La saldatura ad argento consiste in una lega di questo metallo ed 1/5, 1/4, 1/6, o 1/8 d'ottone, e si usa per saldare l'argento, l'ottone, il rame ed altri metalli non facilmente fusibili. Allorchè i pezzi da saldarsi coll'argento sono puliti, e ridotti colla lima si legano insieme con filo di ferro; vi si sparge del borace nel luogo ove debbono riunirsi ed una conveniente quantità di saldatura; si collocano sù carboni accesi da un mantice procurando che resti sempre visibile il luogo da saldarsi; ed appena si è sfatta la saldatura levasi dal fuoco il metallo. Maggiore avvertenza occorre nel saldar con tal processo l'ottone perchè si fonde più facilmente degli altri metalli, e se la corrente d'aria non fosse diretta al luogo della saldatura, o il maggior fuoco non fosse ivi raccolto, potrebbe aversi la fusione del metallo prima della saldatura.

Si fa una saldatura più ordinaria di rame e stagno per l'ottone e per il rame, o una saldatura a zinco o ad ottone. Anche il ferro si può saldare a questo modo: si mette una pagliuola d'ottone sulla giuntura delle due parti, vi si trattiene legandola con filo di ferro ricotto e assai sottile vi si passa dell'acqua con una penna e vi si sparge un poco di borace con polvere, o del vetro pesto (se non si ha borace); e così preparato si scalda il ferro fintantochè l'ottone sia in fusione. Quando le saldature si fanno sù pezzi grossi non si usa borace nè vetro in polvere, ma si copre il luogo ove si è messo l'ottone con una grossa intonacatura di terra cotta stemperata nell'acqua, ed allora si conosce che la saldatura è compita da una piccola fiamma turchina che penetra l'intonacatura.

La più comune saldatura è quella de'lattai e piombai, che è composta presso a poco di due parti di stagno ed una di piombo, e siccome questa si fonde facilmente invece di porre il metallo da saldarsi nel fuoco si porta sulla saldatura il saldatojo. Questo consiste in un cuneo di rame, che verso la testa per mezzo di una verga di ferro si unisce ad un manico di legno, e scaldato al vivo fuoco dei carboni fa colare la lega. I lattai han la saldatura in verghe, accostano la punta del saldatojo caldo a queste, e raccoltane una certa quantità, con quella fusa percorrono il luogo ove sono congiunti i pezzi di latta, che è già stato sparso di pece greca in polvere. Quando si usa la saldatura a stagno sul rame, sull'ottone o sul ferro devono esser prima avvivati i pezzi, cioè deve farvisi aderire uno strato di saldatura fregando sù ciascuno ben pulito ripetutamente il saldatojo. I pezzi in tutta l'estensione per cui sono avvivati aderiscono quando col saldatojo convenientemente si scaldano e si premono insieme. Anche il saldatojo onde raccolga la saldatura ha bisogno di mantenersi avvivato, e perciò procurasi di non scaldarlo al grado che evapori tutto lo stagno, come sarebbe al rosso. I ramai nello stagnare i vasi di rame fanno uso del sale ammoniaco.

Per saldare con leghe molto fusibili, come sarebbe quella di Darcet, si adopra la trementina in luogo del borace e della pece greca. La lega rammentata fondendosi ad una temperatura prossima a quella dell' acqua bollente si può adoprare anche con saldatoj piccolissimi.

Possono egualmente usarsi per saldare le leghe di piombo, stagno, e bismuto (*Intr.* 170), ed anche questi metalli semplici; ma il metallo semplice è sempre meno fusibile della lega, e si ossida facilmente, e per questo si preferiscono le leghe. Si fanno delle adesioni metalliche per mezzo del solo mercurio ma esse tengono ben poco, e possono esser confrontate a quelle che si hanno per effetto dell' umidità dalla sola ossidazione.

63. *Bollitura del ferro, e altre simili adesioni.* — Anche due pezzi di un medesimo corpo senza alcuna sostanza intermedia possono aderire se le superficie avranno tal mollezza che premute l' una contro l' altra si portino le particelle alla vera distanza dei pori, a quella voglio dire nella quale si fa sentire la forza di attrazione. Ciò avviene nel piombo (58), nella cera, nell' argilla (*Intr.*168), e nel ferro, o altri metalli resi molli per l' azione del fuoco. Il ferro gode la proprietà di divenir sulliquido assai prima di fondersi lo che dà il modo di farne aderire i pezzi col processo detto della bollitura. Circa alle bolliture del ferro dobbiamo avvertire che il riscaldamento deve esser fatto nei due pezzi, ed in modo che abbiano acquistato l' ultimo grado di mollezza che precede la fusione (ciò che i fabbri chiamano far sudare), e sieno applicati subitamente insieme e battuti l' un contro l' altro tra il martello e l' incudine finchè facciano un sol massello. Che se queste condizioni sono adempite non vi ha più alcuna differenza tra l' adesione nel luogo della bollitura e la coesione nelle altre parti del metallo. Bene è vero che sebbene si usino delle diligenze pure l' unione non si fa per tutta l' estensione della superficie ed i ferri nelle bolliture sogliono rimaner più deboli. Dalle esperienze che vi ho fatto è resultato che una accurata bollitura non può sostenere più di 28 kil. per ogni millim. quadro di sezione.

Al pari della cera possono alcuni metalli attaccarsi insieme per mezzo del calorico fusi i pezzi alle due estremità; ed in tal modo con un piccol saldatojo caldo di ferro si riuniscono due pezzi di bismuto, d' antimonio ec.

64. *Effetto dell' estensione di superficie, e degli incastri nell' adesione.* — Non manca l' arte di modi per rendere i corpi resistenti nelle parti adese al pari che negli altri punti. Suolesi a tale oggetto estender molto la superficie di contatto, e quasi nello stesso rapporto si ottiene un' aumento di resistenza. È cosa rara che si faccia una saldatura o innestatura secondo la sezion minima del solido, ordinariamente si eseguiscono in sezioni molto oblique, o si soprappongono i pezzi per notabile estensione. Con tal mezzo anche una lastra di rame saldata a stagno può resistere moltissimo, e più nella saldatura che nelle altre sue parti. Quando accade una rottura in un muro fatto a mattoni o pietre si vede essa seguire la direzione della commettitura ancor che deva abbandonarsi per qualche tratto la direzione rettilinea; ma se poi per seguire i commenti dovesse abbandonar la linea retta

molto si rompono piuttosto i mattoni e qualche volta anche le pietre. Han perciò cura i muratori di ben collegare fra loro i mattoni col metterli scalati, ed in modo che sulla linea ove è la commettitura di uno corrisponda il mezzo dell'altro mattone. E nei luoghi più esposti fanno uso di leghe di pietra assai estese.

Un'altro principio da seguirsi per aumentare la resistenza nelle congiunture è quello di fare delle addentellature o incastri fra le parti commesse. L'incastro detto per la sua forma a coda di rondine è notissimo e può servir per formar l'idea della resistenza che danno in generale le commettiture ad incastro rientrante. In queste non si possono separare i pezzi senza che si rompa il solido fuori delle parti adese e per tutto il tratto della lunghezza della coda, oltre a vincersi l'adesione nella saldatura colla quale può esser fermata la coda incastrata. Si fanno degli incastri non rientranti come quelli a prisma o cilindro, e questi terrebbero per il solo aumento di superficie saldata se non si avesse cura di cacciare a forza il prisma nel suo incavo. Quando vi è cacciato a forza fra le superfici che si pressano, e per effetto della colla, o cemento che si frapponga, o per effetto anche della elasticità e porosità delle particelle solide si fanno delle addentature che a guisa degli incastri rientranti collegano le parti, e ne impediscono la disunione senza un logoramento delle particelle istesse.

Dietro i due precedenti esempi d'incastro sarà agevole comprendere come nel collegare le terre cotte, e le pietre con i cementi giovino le scabrosità nella superficie. Con i legni non legano la calcina e il gesso, e legano benissimo con i cannicci per gli incastri che si fanno nelle fessure: se adunque con teste di chiodi, o con sverzature si renderà irregolare la superficie del legno si potranno tenere uniti i cementi con i travi, e colle tavole. Sul vetro ben levigato, e sul metallo ben pulito non prendono i mastici, e vi prendono benissimo se son rese scabre le superfici.

65. *Applicazioni all'impiombatura e simili processi di collegamento.* — Sono applicazioni dei precedenti principj molti processi che si usano nel collegare due solidi assieme. L'impiombatura che si pratica per unire il ferro alla pietra consiste nel fare nella pietra un'incavo che abbia nella parte interna la maggior larghezza e all'esterno la più piccola che si può per collocarvi il ferro il quale è pure slargato nella parte che più s'interna: fare scorrere nell'incavo il piombo fuso se la sua disposizione lo permette altrimenti cacciarveue dei pezzi solidi: e a colpo di martello per mezzo di un puntarolo rincalzare e stivare in tutta la cavità il piombo per modo che formi tutto un massello di metallo, il quale non per attrazione molecolare ma per la sua figura e per la sua tenacità impedisca al ferro di venir fuori. Per collegare il ferro alle pietre è stato usato talvolta invece del piombo il solfo fuso, e questo unendosi chimicamente col ferro ne fa ingrossare le sue parti per modo che da per loro sigillino nel preparato incavo; ma l'ingrossamento proseguendo per lunghissimo tempo porta il più delle volte lo schiantamento della pietra. È per questo che ove una tal rottura potesse esser nociva si bandirà l'uso dello zolfo, e viceversa se ne farà conto ove si voglia una forza

sempre attiva e crescente, la quale stringa e prema alcune parti di solidi. Circa le ingessature a grappa, ed altri modi di collegar solidi assieme rincalzandoli per via di cementi ricorrono presso a poco le medesime avvertenze fatte sull' impiombature e sull'uso dello zolfo; e solo rammenterò che per far crepare il solido nel quale è fermato un pezzo di metallo ne può moltissimo anche l'azione espansiva (*Int.*45) del calorico. Sorprendente apparisce un collegamento che si pratica nel legno per chi non ne conosce il processo, giacchè presenta un maschio posto forzato in un foro o femmina, ed ha di più una capocchia o ingrossatura da una parte e dall' altra del foro, per cui non ne può più sortire, nè si ravvisa come una di quelle ingrossature possa essere entrata pel foro che ha minor dimensione. Il capo per cui vuolsi introdurre il maschio si riduce a cuneo quindi si bolle nell'acqua quanto è necessario perchè s' inzuppi e si scaldi al massimo: si stringe la femmina entro una morsa che l'impedisca schiantare, e dopo aver compresso il capo del maschio si fa entrare questo a colpo di maglio nella femmina, le parti calde ed ammollite cedendo alla compressione e ai colpi: finalmente si lascia raffreddare il legno ad ascingare, il quale riprende per l'elasticità il primitivo volume e ingrossa, onde agli inesperti rimane mirabile questa riunione. Quasi con opposto processo si può ottener l' intento siccome può desumersi da ciò che ho detto sul modo di scolpire nel legno i bassi rilievi (*Intr.*51). Molti altri modi di connessioni potrei rammentare per ingrossamenti al di là dell' apertura della femmina, più utile però sembrami dare idea dei collegamenti che si usano nella carpenteria e nell'arte muratoria onde si estenda il punto di vista nelle applicazioni degli addotti principj di scenza.

66. *Applicazione alle congiunzioni usate nella carpenteria.* — Non credo che manchino all' arte in tutti i casi mezzi adattati di commettitura, piuttosto rimarrà difficile riconoscere qual sia il più conveniente al caso particolare che si presenta giacchè bisogna avere in mente che la commettitura non sia cimentata, dallo sforzo che si fa sul solido, e nello stesso tempo aggiunga ad esso resistenza. Condizione fondamentale nel riunire o armare i travi è che il legno rimanga compresso o stirato nel senso della lunghezza anzichè forzato per traverso. Nel riunir più pezzi di legno, contentandosi di por l'uno parallelamente accosto all'altro, la resistenza che si ottiene dall' insieme sarà eguale alla somma delle singole resistenze di ciascun pezzo prese separatamente, che se i pezzi son congiunti da studiate giunture che componghino un solido le cui parti sieno costrette a piegarsi tutte in un corpo, l' insieme avrà resistenza maggiore. Due classi di congiunzioni nei travi ci sono rappresentate nelle due fig. 3. 4. Tav. 2, in ciascuna delle quali, volendo che si intenda ribattuta la metà della figura, ho raccolto due dei fondamentali esemplari. La prima (fig. 3) mostra nella sua metà sinistra una congiunzione a dentatura obliqua o a sega di due travi A,B che sono stretti insieme da perni o chiavarde di ferro D, e serrati dente e dente con maschi *e,e* .. messi a forza dopo l' unione dei travi. Secondo l' esperienze di Duhamel giova che i due travi siano di egual grossezza, che il risalto dei denti sia eguale ad un set-

timo circa della grossezza, e la lunghezza loro non sia minore del triplo della stessa grossezza, che i denti fossero non inclinati ma a parallelopipedo come mostra la metà destra della figura, e nulla nuoce che il trave superiore sia in più pezzi C, E ec. purchè con più chiavarde di ferro F, F . . rimangano tutti ben fissati.

La figura (fig. 4 Tav. II.) dà idea de' così detti *travi armati*. Partendosi dal principio che in un trave sopracaricato vengon compresse le fibre poste alla parte superiore, è evidente che essendo queste fibre disposte ad angolo col vertice volto all'alto, la compressione di esse si rende più difficile. La parte sinistra della figura rappresenta un mezzo trave formato da due pezzi laterali i quali abbracciano due puntoni intermedj inclinati che si appoggiano mediante la chiave, ed i puntoni sono ai pezzi laterali sodamente connessi per mezzo di chiavarde di ferro. L'altra metà della figura rappresenta per metà un trave che è rinforzato alla parte superiore da due puntoni incastrati al trave con una o più dentature, e appoggiati l'uno contro l'altro.

Credo luogo opportuno indicare qui anche alcuni modi (fig. 5 Tav. II) di congiunzione che servono non a rinforzare un legno, ma ad aumentarne la lunghezza coll'aggiunta di un altro legno.

Giuntura a dent. sempl. in isquadro A
» a doppio dente in isquadro B
» a dente semplice obliquangolo C
» a doppio dente obliquangolo D
» a dente semplice in terzo, ossia a semplice ugnatura E
» a doppio dente in terzo, ossia a doppia ugnatura F
» con incastro a penna G
» con pallettatura a tanaglia H
» a forbice I
» a dente composto K
» a zig-zag che può esser dritto e cuneiforme L M

A queste giunte, ed a tante altre pallettature che possono usarsi si adoprano chiavarde con fasce o staffe di ferro, o almeno con viti e chiodi, ed altri pezzi di metallo che sono di uso frequentissimo nelle riunioni dei solidi.

67. *Applicazione alle congiunzioni usate nell'arte muratoria.* — Nel disporre i pezzi che han da formare il muramento giova che i loro conci siano artificiosamente collegati in guisa che l'uno non si disgiunga dall'altro senza ruinare l'intera mole. Tra i muri di pietre di taglio quelli d'opera incerta han costruzione men regolare degli altri perchè si compongono con massi diseguali e ad angoli varj, sebbene abbiano tutti facce spianate e studiosamente disposte a modo che le forme di ciascun pezzo corrispondano a quelle dei pezzi che lo circondano (Tav. II fig. 6). Ho scelto di riportare nella figura un bel modello di struttura ciclopica tratto dai muri tuttora esistenti nell'antica cittadella sul monte Circeo. I pezzi squadrati che han conci perfettamente eguali posson disporsi in modo che le commessure sempre rimangano al mezzo delle pietre dell'adiacente corso superiore (fig. 7 Tav. II) ed inferiore. Avendo le pietre grossezza eguale alla larghezza, e metà della lunghezza di ciascuno de' conci, si dispongono esse in modo da presentare in ciascun corso alternativamente la larghezza e la lunghezza (fig. 8 Tav. II) o come suol dirsi in grossezza e in chiave. Se le pietre sono di diverse grandezze si potrà studiare una disposizione che serva a collegarle (fig. 9 Tav. II) cias-

sandole per mantenere i corsi tutti di eguale altezza, e procurando che si intersechino le commessure dei differenti corsi. Converrà alcune volte riempiere di muramento alla rinfusa i vani che resterebbero nell' interno del muro. I mattonati a spina che si usano comunemente mostrano un ottimo modo di legate congiunzioni.

Per aumentare il collegamento si pongono talvolta dei pernj di metallo, o si praticano degli incavi in alcune pietre per farvi entrare le prominenze delle pietre adiacenti, ed un bell' esemplare ne offre in Roma il teatro di Marcello (Tav. II fig. 10) ove molte pietre hanno la faccia superiore e l' inferiore divisa in quattro parti eguali; due contrapposte alquanto abbassate, e le altre due altrettanto rilevate; e si soprapongono per modo che le parti abbassate dell' una entrino in quelle rilevate dell' altra. Finalmente ricorderò come i metodi di collegamento vogliono essere studiati nelle pietre che coronano alcuni muri, i quali non devono essere coperti; ed ivi sogliono si porre in uso (Tav. II fig. 11) i pernj, e le staffe metalliche, come le parti rientranti ed incastrate tra pietra e pietra.

68. *Adesione che si manifesta nello sfregamento.* — Nello strisciare e scorrere la superficie di un corpo sull' altro si ha una resistenza che da alcuni è chiamata adesione. E particolarmente così chiamano i Francesi la resistenza che si avrebbe strisciando, e non girando le ruote delle locomotive e dei vagoni sulle rotaje di ferro. A noi piace anche per questo caso usare la voce attrito, della quale resistenza estesamente tratteremo nel Capitolo seguente; sebbene come in quel luogo avvertiremo, oltre all' attrito in piccola parte anche l' adesione si mescola nella resistenza allo sfregamento. Ciò ben si comprende quando una sostanza vischiosa si frappone tra le due superfici che si fregano come l' olio, e l' unto molto prosciugati, la colla, e la calcina che cominciano a far presa.

CAPITOLO IV.

Della resistenza allo sfregamento, o attrito, e della rigidezza delle funi.

69. *Resistenze passive.* — Quanto è utile nello stabilire principj scientifici il supporre i corpi perfettamente lisci, non dotati di scambievole adesione, capaci di scorrere l' uno sull' altro senza alcun' impedimento, sempre pronti al moto come se questo si effettuasse nel vuoto, e perciò supporre che i mezzi non sieno resistenti, e che la trasmissione dei moti si faccia senza alcuna perdita, onde le funi o corde che servono a comunicare i movimenti da un pezzo all' altro di un meccanismo siano perfettamente flessibili; altrettanto queste ipotesi che ne' casi particolari mai si verificano conducono a formule lontane da quelle che si han da usare nella pratica. Le qualità dei corpi, scabrosità di superficie, rigidezza delle funi ec. si considerano sotto l' aspetto di resistenze nocive perchè portano una diminuzione di movimento, e di forza nell' impiego che vuol farsene. E l' ipotesi che esse manchino rende molto

più semplici e più generali le questioni come devono apparire nella teoria, ma stabilite che sieno le formule teoriche, voglion queste esser corrette a seconda che le resistenze nocive avranno nel caso particolare portata alterazione. Vi è qualche caso ove questa correzione può essere anche trascurata, come se si trattasse di un sottil filo che si ha da avvolgere ad una ruota, o di un corpo che si muova con lentezza nell'aria: la resistenza che oppone il filo a piegarsi, o quella che oppone l'aria al movimento avranno si piccolo valore da non doversi curare nella pratica, sebbene questo valore esisterà. Vedesi dunque che le formule teoriche dovran comparirci come esatte a quel limite della mancanza di resistenze nocive, al quale possiamo con arte procurare d'avvicinarci; ma pur da esso nei casi particolari si può andar ben lungi. Se invece di un sottil filo fosse un grosso canapo da avvolgersi ad una ruota, o se invece di un piccol corpo che si muova lentamente fosse il treno di una locomotiva a vapore che vada con moltissima velocità, chi non conosce che a vincere la rigidezza del canapo può esser non basti neppur la forza di un uomo? e che la resistenza opposta dall'aria alla forza del vapore può equivalere alla forza di più cavalli? Quindi è che per adattare alla pratica le formule teoriche, alle cose premesse debbo aggiungere le convenienti notizie sulla valutazione delle resistenze nocive, e particolarmente circa l'attrito, o la resistenza che si ha quando la superfice di un corpo si vuol far scorrere su quella di un'altro; e circa la rigidezza delle funi, o resistenza al loro piegamento. Occorrerebbe tenere anche discorso della resistenza de mezzi, ed in specie mostrare come nell'aria e nell'acqua volendo far muovere un corpo si abbia diminuzione d'effetto per l'opposizione di tali fluidi, ma poichè in meccanica non è si frequente il bisogno di fare alle formule teoriche una correzione di simil genere, è il soggetto deve essere ampiamente sviluppato nelle successive parti del mio corso; quindi credo dovermene qui dispensare, e solo a quelle formule nelle quali mi sembrerà più interessante tal correzione aggiungerò gli opportuni schiarimenti.

70. *Forze che producono l'attrito, e più specie del medesimo.* — La forza colla quale un corpo preme un altro, fa che le prominenze o punte di uno di questi corpi reciprocamente si insinuino dentro la cavità o pori dell'altro, ed a tanta maggior profondità quanto più grande è la pressione, e più favorevoli sono le altre circostanze da cui può dipendere quest'addentellamento. Nasce da ciò che mentre striscia un corpo sull'altro le punte devono o rompersi o piegarsi, o sollevare il corpo sovrapposto, e che nel contatto si sviluppano delle attrazioni speciali e delle scambievoli adesioni. Il sollevamento del corpo sopraposto, la flessione delle parti insinuate, il distaccamento e rottura di alcune parti per gli addentellamenti cagionati, e per il limare che fanno le polveri frapposte, e tuttociò che si è compreso sotto il nome adesione (58) sono le cagioni da cui proviene la resistenza che noi chiamiamo attrito; ma in due classi conviene tenerle distinte, la prima è data da quelle che ho particolarmente rammentate, e la seconda dalle altre che fanno l'adesione. Interessa valutare l'attrito e ciò non può farsi che per

approssimazione, perchè molti sono gli elementi incerti e variabili nelle particolarità dei casi. Si rende alquanto più semplice questa ricerca distinguendo tre specie di attrito, o piuttosto considerandolo in tre diverse circostanze. Se un corpo striscia sopra un altro e presenta costantemente medesimi punti all'azione dell'altro l'attrito dicesi di prima specie: alcuni lo indicano col nome di adesione, che io ho detto non adottare, altri lo distinguono colla denominazione di attrito radente. Si ha l'attrito di seconda specie quando un corpo rotondeggiante rotola sopra un altro, ed i punti d'ambedue che si toccano vanno successivamente variandosi. Quando una superficie convessa gira in una concava o reciprocamente, come una ruota sul suo asse, o un asse sovra il suo appoggio, si ha l'attrito di terza specie. Ben si conosce che quest'ultimo non deve essere molto differente dal primo, e la maggior differenza consiste nel ritornare lo strisciamento spesso su medesimi punti: moltissimo però differirà il secondo. Pure a tutti e tre convengono alcune leggi, delle quali possiamo renderci conto anche col solo ragionamento.

71. *Leggi generali dell' attrito.* — I. L'attrito è in proporzione diretta della pressione. Ben si comprende che la maggior pressione deve far maggiormente insinuare le asprezze di un corpo in quelle di un'altro, e più difficilmente il corpo soprapposto se ne ha a districare perchè può essere sollevato solo con maggior fatica. Coulomb ritiene che la resistenza di cui si parla deve secondo i diversi casi esser considerata come composta di due altre, di cui una indipendente dalla pressione e che si chiama *adesione* cresce in proporzione della superficie dei due corpi in contatto, mentre la seconda che si chiama *attrito* cresce essenzialmente colla pressione e non ha alcun rapporto necessario con la superficie. Secondo il capitano Morin la proporzionalità colla pressione non è soggetta che a pochissime eccezioni relative al caso in cui le superficie in contatto provano grandissima alterazione o corrosione profonda, ed esiste quand'anche le più grossolone asprezze delle superficie son rotte, e trasportate nel movimento. Avendosi una flessione nelle parti solide la elasticità (4) ci spiega questa proporzionalità, come anche avendosi un sollevamento nel solido è facile comprenderla, ma a rendersene ragione quando le superfice son liscie convien supporre che i frantumi già fatti dieno luogo a nuove corrusioni le quali pure crescono proporzionalmente alle pressioni. Chiamando p la pressione che si fa in ogni punto: lo sforzo occorrente per separare un punto dall'altro sarà fp, ed f formerà il rapporto costante che conviene determinare per mezzo dell'esperienza e che si chiama coefficente d'attrito.

II. L'attrito è indipendente dall'estensione delle superficie in contatto. È una conseguenza dell'essere l'attrito proporzionale alla pressione P; infatti al crescere dei punti di contatto diminuisce sù ciascuno la pressione p che può dirsi

$$\frac{P}{S}\,.$$

ma per separare tutta la superficie S l'una dall'altra occorre una forza $R = fp\,S$ onde $R = fP$. Quindi al crescere della superficie mentre rimane la stessa la pressione, l'attrito si trova diminuito in ciascun'ele-

mento in ragione inversa dell' estensione della superficie. Come ho detto Coulomb aggiunge anche l'aderenza la quale è proporzionale alla superficie, ma questa quantità è generalmente piccolissima per rapporto all'attrito. Pure può avere come osservano gli abili artisti, un effetto apprezzabile ne' leggeri meccanismi come quelli degli orologi, non già per le macchine pesanti dell'industria che sono generalmente sottoposte a grandissimi sforzi su piccole superfici. Quando le superfici si alterano molto non è la loro estensione indifferente.

III. È costante il rapporto tra il peso che produce la pressione e l'attrito. Infatti abbiamo

$$f = \frac{R}{P}$$

e tanto la pressione P quanto la resistenza o attrito R sono due quantità che crescono e scemano nello stesso rapporto, purchè non si cambino i corpi fra i quali ha luogo l'attrito. Ma molte volte può questo cambiamento aver luogo come se trattasi di due legni nuovi dopo un certo reciproco sfregamento diventeranno logori e l'attrito si farà più piccolo, e per conseguenza varierà il valore del rapporto f tra la pressione e l'attrito.

IV. La durata del contatto e la compressibilità delle superfici che si sfregano influiscono sull'attrito. I corpi più duri ed elastici come il ferro, l'acciajo, il rame ec. giungono rapidissimamente al limite della lor compressione e della loro distensione, mentre i corpi molli e compressibili come i legni, i cuoi ec. non vi giungono che con lentezza. Per i primi secondo Coulomb la resistenza deve rapidamente acquistare il suo valor massimo, e per gli altri dopo un tempo assai lungo, cioè per un contatto delle superfici molto prolungato. Si comprende che col tempo possono meglio adattarsi fra loro le parti scabre, pure non credo che sia facile render conto di tante particolarità. Mentre basta qualche minuto per i legni che strisciano su legni, si trova il tempo essere di più ore ed anche di più giorni per i legni che fregano senza unto su metalli: forse l'umidità e l'ossidazione devono porsi in gioco tra legni e metalli. Quando l'estensione della superficie è piccolissima, come se fosse formata da lati arrotondati, o da punte smussate l'attrito è indipendente quasi totalmente dalla durata del contatto.

V. Le leggi precedenti sono applicabili anche allo sfregamento che ha luogo nell'urto de' corpi. Infatti la pressione reciproca che si effettua su due corpi urtati vien repartita sovra tutta la superficie, e l'effetto diviene tanto meno grande quanto essa è più estesa, e sempre rimane proporzionale alla pressione stessa che ha luogo durante l'urto.

VI. L'attrito nel primo distacco supera quello nel movimento, giacchè l'aumento che aveva l'attrito acquistato per il prolungato contatto non si può riscontrare nell' attrito tra corpi che si muovono. Questo sarà quello del contatto il meno prolungato, e quindi occorre non solo conoscere il massimo valore che l'attrito acquista per il prolungamento del contatto, ma anche quello minore che ha luogo tra i corpi già smossi, dovendosi in casi ben diversi usare or l'uno or l'altro.

VII. Nell'attrito poco influisce la celerità del moto. Al crescere della celerità si abbandonano più prontamente alcune parti che facevano resistenza, e ne subentrano altre che

producono un effetto presso a poco eguale. Con tuttociò non devesi ritenere che la celerità con cui si sfregano i corpi sia indifferente all'attrito perchè le particelle che vengono smosse con celerità proporzionale a quella del moto non hanno sempre tempo di riprendere il loro posto, e la alterazione che soffrono avendo un limite si riduce al passaggio delle successive particelle del corpo sfregante meno sensibile. Vero è che colla loro elasticità facendo forza per riprendere il primiero posto agiscono contro le particelle urtanti quasi come se avessero ripresa la primitiva posizione, pure quest' elasticità non in tutti i corpi può riguardarsi perfetta. Quindi ne viene che la celerità dello sfregamento in alcuni corpi produrrà un effetto maggiore ed in altri minore.

VIII. Il pulimento o levigatezza della superficie diminuisce l' attrito. Ognuno intende che tolte le prominenze ed asprezze deve l'attrito essere minore. Pure le superficie solide qualunque sia il grado primitivo del lor pulimento, strisciandosi si confricano: si stacca dalla superficie una sottil polvere che agglomerandosi e per la pressione e per il rotolamento che soffre, forma dei piccoli grani durissimi i quali rigano più o meno la superficie. È pure evidente che ciascun modo particolare di preparazione dei corpi deve dar luogo ad una special resistenza, e che esiste sempre un limite per il grado di levigamento che può darsi ad una superfice, e sempre rimangono i pori capaci a fare ingranare e mescolare le particelle, e a cimentare le lor forze attrattive e repulsive. Quando la levigatezza è portata al massimo grado nasce l' adesione fra le superficie anche per effetto della pressione atmosferica.

IX. L' attrito di seconda specie deve essere molto minore di quelle delle altre due specie giacchè la forma rotondeggiante facilita il separarsi delle particelle che si erano addentate, e perchè la disposizione della potenza che ha da vincere l' attrito è la più favorevole. Quest' ultima ragione fa che anche l' attrito di terza specie si rende molto meno nocivo di quello di prima.

X. L' unto e gli intonachi fatti con grasso diminuiscono l' attrito di prima e di terza specie. Quando si interpongono tra le superficie che si sfregano sostanze grasse e più o meno molli, servono queste a riempiere i pori e a foderare la superficie in modo, che non possono almeno alla stessa profondità insinuarsi le particelle. Inoltre l' unto deve a guisa di globetti rotondeggianti e cedevoli rotolare fra i corpi che si sfregano e quasi ridur l' attrito di prima specie simile a quella di seconda. La coesione del grasso usato deve essere cagione di aumento alla resistenza; di qui rilevasi che diverse specie di sostanze untuose dovranno essere prescelte per i casi particolari, ed offrire particolare vantaggio. Anche l'unto posto da molto tempo, ed unito alle polveri prodotte dallo sfregamento acquisterà maggior coesione, e perderà la sua mollezza e darà luogo ad un aumento considerabile di resistenza, se non viene rinnovato.

Queste regole sono applicabili per tutte le specie d' attrito ma per conoscere le particolarità di ciascun caso d' attrito conviene che si studino i resultati delle esperienze particolarmente per ciascuna specie.

Attrito di prima specie.

72. *Modo di sperimentare sull' attrito di prima specie.* — Due sono i metodi che possono usarsi: I. si collochi il corpo, che deve strisciare, sovra un piano inclinato con un certo angolo all'orizzonte; si accresca per gradi l'angolo d'inclinazione finchè per il proprio peso non cade il corpo lungo il piano; si chiami m l'angolo d'elevazione del piano che fa discendere lentamente il corpo, ed il coefficente d' attrito sarà

$$f = tang.\ m$$

(in seguito vedremo la dimostrazio-zione di questa formula). Preso per unità il raggio, il numero che rappresenta la tangente sarà il coefficente d' attrito. L' angolo m vien chiamato angolo limite di attrito, e poichè il coefficente è minore dell'unità anche l' angolo limite dell' attrito deve essere minore di un mezzo retto. Questo metodo ha il difetto di dare sempre al corpo delle scosse, e perciò dei resultati non molto esatti per la misura dell' attrito nell' atto del distacco.

II. Si faccia movere un corpo sovra un altro che fa da piano orizzontale per mezzo di una forza parallela al piano, ed il rapporto che passa tra la pressione esercitata dal corpo sul piano, e la misura della forza darà il valore del coefficente f. Deve distinguersi il caso in cui si vuole comunicare moto al corpo, dal caso che debbasi mantenere nel corpo il movimento. Nel primo il Coulomb usava una tavola (Tav. III fig. 1) al fondo della quale fosse una puleggia: poneva su questa una zattera o vassoio il quale portasse il peso destinato a produr la pressione, ed avesse la superfice a contatto col piano di quella materia sulla quale voleva sperimentare: legava la zattera con una corda, la quale passasse sovra la carrucola, fosse nella direzione del centro di gravità del peso, e si annodasse ad una leva imperniata sotto la tavola: faceva forza sull' estremità della leva onde venisse tirata la fune e smossa la zattera. È chiaro che usando una leva con delle conosciute divisioni, l' operazione si riduce a trasportare lungo essa un romano simile a quello della comune stadera, e notare a qual divisione il romano si trova quando la zattera è smossa. La corda non deve essere rigida, e la puleggia deve avere poco attrito, perchè queste due resistenze potrebbero aumentare quella che vuolsi misurare. Si eviterà ogni loro influenza ponendo alla corda un dinamometro e rilevando dalla sua indicazione la misura della forza; ovvero una preventiva esperienza sulla loro resistenza fatta come tra non molto saremo per dire ci indicherà di quanto la vera resistenza d' attrito deve esser minore di quella che si sarà trovata per l' esperienze.

La forma della zattera sarà diversa nelle differenti esperienze, perchè si muterà la superficie sua inferiore. La fig. 2 Tav. III la rappresenta con due regoli uniti alla parte inferiore che ne diminuiscono la superficie; le fig. 3, 4, e 5 la rappresentano quando si fan fregare legni con legni, metalli con legni, o metalli con metalli.

Quando si vuole sperimentare sull' attrito de' corpi che continuano a muoversi si usa, come han fatto, Coulomb e Morin (ai quali dobbiamo le più interessanti esperienze sull' attrito) una tavola o banco molto esteso sul quale è posata la zattera legata alla corda che passa sù una carrucola; ed alla corda è raccomanda-

to un piatto ove si possono aggravare dei pesi, i quali quando sono nella conveniente massa scendendo verticalmente tiran sul piano del banco la zattera: questa va acquistando velocità e percorre tutto il banco: rilevata la legge del moto si confronta con quella del moto uniformemente accelerato, che apparterrebbe al peso cadente quando fosse libero: e da questo confronto si conosce se la resistenza dovuta all' attrito si mantiene costante, o varia secondo le diverse velocità. È stato ritrovato che la zattera acquista un moto uniformemente accelerato, e da ciò si è dedotto che la resistenza dell' attrito è costante, e si è anche rilevato il valore di questa resistenza. Per fare l' esperienze con questo metodo abbisognano molte diligenze che assicurino quali sono gli spazj descritti nei successivi tempi, e quale è il rapporto fra questi spazj e quelli che descrive nei medesimi tempi un grave che cade. A tale scopo adesso che è conosciuta la costanza della resistenza d' attrito quando si vuol solamente il valore potrà tenersi un metodo più semplice. Servirà urtare la zattera con una forza capace d' imprimerle una determinata velocità ed un moto semplicemente progressivo, e notare il numero de' secondi per cui si mantiene in essa il moto, e lo spazio che essa descrive. Chiamata V_1 la velocità impressa, T' il tempo, S' lo spazio, G la gravità, ci serviremo delle formule

$$V_1 = fg\,T'_1\; V^2_1 = 2\,f\,g\,S',$$

che verranno da noi dimostrate in seguito, e da queste dedurremo

$$f = \frac{V_1}{g\,T'} = \frac{2\,S'}{g\,T'^2}$$

cioè il valore del coefficente d' attrito. Si voglia per es.° sapere quanto è l' attrito di un corpo con superficie d' acciajo pulito sopra il ghiaccio: s' imprima a questo una velocità per la quale si trovi che il moto seguita sul ghiaccio per 10'',2 e vi percorra uno spazio di 20m,4 avremo

$$f = \frac{2.\,20^m,4}{9,81.\,(10'',2)^2} = 0,04$$

75. ***Resultati d' esperienze dopo un certo tempo di riposo sotto la pressione.*** — I resultati che riguardano quest' esperienze non possono essere che medie di casi particolari, perchè la disposizione accidentale delle prominenze o delle fibre fa variare specialmente nei legni moltissimo la resistenza. Di qui è che difficilmente possono stabilirsi regole precise sul valore dell' attrito. Contuttociò per aiutare la memoria crediamo dovere fissare che

I. L' attrito della quercie a fibre incrociate è minore che quello a fibre parallele: e quest' ultimo è pur maggiore di quello che si ha quando il legno per testa è sopraposto a quello per piano. E questa regola può forse estendersi a tutti i legni.

II. I corpi di tessitura omogenea danno maggior resistenza di quelli che hanno tessitura differente, ed anche per i resultati di Coulomb l' attrito di ferro con ferro, o di rame con rame, è maggiore di quello del ferro sul rame e viceversa. Ma le ricerche sperimentali di Morin han mostrato che questa opinione sulla differenza tra le sostanze omogenee e eterogenee non può dare una regola generale, per quanto si facciano giustamente gli assi di ferro o d' acciaio quando devono girare sù cuscini, di rame o di ottone per impedire che si consumino sollecitamente.

III. L' attrito varia moltissimo secondo le qualità della superficie, e dall' essere nei legni, e tra legni bagnati e metalli, anche superiore al-

la metà della pressione si riduce uno o due decimi tra metalli e metalli, e poco più di un decimo fra superfici unte.

IV. può dirsi che tra i legni nuovi e ben piallati è il coefficente d'attrito eguale a circa $1/2$ ed $1/3$ nei legni logori. Tra i legni ed i metalli può ritenersi che l'attrito dall'essere $1/5$ quando sono asciutti giunge fino a $2/5$ quando sono bagnati. Tante sono le particolarità dalle quali dipende il valore dell'attrito che per maggiore esattezza converrà nelle applicazioni ricercare sulla seguente tavola per ciascun caso particolare il corrispondente resultato sperimentale

TAVOLA
DELL'ATTRITO DI PRIMA SPECIE
nell'atto di partenza dopo il riposo

Esperienze di Coulomb	*valore del coef. d'attr.*
Quercia sopra quercia	
fibre parallele	0,44
la superficie ridotta a lembi tondeggianti	0,42
fibre incrociate	0,27
le superfici spalmate di sevo, rinnovato ad ogni esperienza	0,38
Quercia sull'abete	
fibre parallele	0,67
Abete sopra abete fibre parallele	0,56
Ferro sopra quercia	0,20
Rame sopra quercia	0,18
Ferro sopra ferro	0,28
Rame sopra ferro	0,26
le superfici ridotte a punte ottuse	0,17
le superfici spalmate di sevo vergine	0,10
» d'olio	0,17
» di vecchia sugna di porco	0,14
Esperienze di Morin.	
Quercia sopra quercia	
fibre parallele	0,62
le superfici spalmate con sapone secco	0,44
le superfici spalmate di sevo	0,17
le superfici untuose	0,39
Fibre perpendicolari	0,54
superfici spalmate di sevo	0,25
superfici untuose	0,32
Legno in testa sopra legno in vena	0,43
Quercia sull'olmo	
fibre parallele	0,38
superfici spalmate di sevo	0,18
Olmo sulla quercia	
fibre parallele, superfici spalmate di sapon secco	0,41
Faggio, abete sorbo, frassino sulla quercia	
fibre parallele	0,53
fibre incrociate	0,57
Faggio sulla quercia	
fibre parallele superfici untuose	0,33
Canapa in fili sulla quercia	
fibre perpendicolari superfici bagnate d'acqua	0,869
Cuoio conciato sulla quercia	
cuoio per piano	0,61
cuoio per taglio	0,43
» bagnato d'acqua	0,79
Cuoio nero da correggie sù superficie piana di quercia	0,74
sù tamburo di quercie	0,47
Ferro sopra quercia	
fibre parallele al moto	0,62
superfici bagnate d'acqua	0,65
superfici spalmate di sevo	0,12
Fonte sù quercia	
fibre parallele bagnate d'acqua	0,65
Ottone sù quercia	
fibre parallele	0,62
Quercia, olmo, carpino, ferro, fonte e bronzo combinati a due a due	
superficie spalmate di sevo da poco tempo	0,10
superfici spalmate d'olio o di sugna da molto tempo	0,15
Cuoio di bove sul ferro fuso	

bagnato con acqua 0,62
con olio, sego, o sugna. . . . 0,12
Cuoio nero da corregge sù ferro fuso 0,23
bagnato con acqua. 0,38
Fonte sù fonte superfici un poco untuose 0,16
Ferro su fonte. 0,19
Acciaio, fonte, ottone, bronzo combinati due a due, con superfici spalmate di sevo . . . 0,11
Bronzo sù bronzo superfici untuose. 0,16
Pietra calcarea oolitica sù calcarea oolitica 0,74
Pietra calcarea dura sù calcarea dura 0,70
Pietra calcarea dura sù calcarea oolitica . . . . : 0,75
Mattone sù calcarea oolitica . . 0,67
Quercia sulla suddetta 0,65
Ferro sulla suddetta 0,49
Mattone sù pietra calcarea dura 0,67
Quercia sulla suddetta 0,64
Ferro sulla suddetta 0,42

Esperienze nostre.

Ferro sù terra ortale 0,57
Ferro sovra arena 0,55
Ferro sù ghiaia di pietra calcar. 0,50
Ferro sù ghiaia più grossa . . . 0,55
Ferro sovra argilla non bene asciutta 0,90
Pietra di gonfolina sovra argilla secca 0,51
» sovra argilla ammollita . . . 0,54

74. *Resultati d'esperienza nei corpi che hàn concepito il moto*— Allorchè il moto è già acquistato l'attrito diminuisce, e la resistenza che si ha nel movimento può ritenersi anche per il caso del distacco quando voglia valutarsi la stabilità d'alcuni solidi sottoposti a scotimenti, giacchè il più lieve scotimento può far diminuire la resistenza nel distacco. Quindi scorgesi che nel maggior numero di casi si dovrà fare uso della seguente tavola. Nei corpi in moto può notarsi che

I. Le superfici secche strisciando le une sulle altre senza intonaco provano una notabile alterazione. Questo resultato è molto più grande nei corpi di tessuto fibroso che nei corpi granellosi, e per conseguenza quando si è necessitati di aver degli attriti o sfregamenti a secco fà duopo scegliere dei corpi granellosi, oppure fare strisciare un corpo granelloso sopra uno fibroso.

II. Sulla direzione delle fibre, e sulla omogeneità delle sostanze deve in questo caso ripetersi ciò che abbiam stabilito per l'atto del distacco.

III. L'attrito nel moto è minore che quello nel distacco ma il divario è ben diverso nei differenti corpi. Tra i metalli è piccolissimo, nei legni è maggiore, e più grande ancora riscontrasi tra legni e metalli. Si suol ritenere nei legni in moto $f = {}^1/_3$, tra legni e metalli messi in moto lento e continuo $f = {}^1/_{12}$, e tra sostanze bene unte $f = {}^1/_{14}$

IV. L'attrito tra legni e legni, e tra metalli e metalli è costante, ma tra legni e metalli varia al variare della velocità: sensibilmente si aumenta col crescer della velocità, ma in una proporzione assai minore di quella con cui cresce la velocità. Per provare ciò convien lasciar correre il corpo per un lungo spazio, tirato dal contrappeso il quale cada per la verticale, e notare con un orologio il tempo che impiega il corpo a percorrere la prima e la seconda metà del cammino che fa. Che se i due tempi fossero eguali, è il moto uniforme e l'attrito cresce col crescer della velocità; se il primo tempo fosse doppio dell'altro il moto sarebbe stato prossimamente uniformemente

accelerato, è perciò l'attrito costante e indipendente dalla velocità.

V. Verranno nella seguente tavola riscontrati i resultati ottenuti da Coulomb e da Morin, e non potrà a meno di fermar l'attenzione la gran differenza che passa fra i valori dati al coefficente f dai due rammentati sperimentatori. Questa secondo il Morin sarebbe principalmente dovuta al modo di preparare le superfici, perchè egli suppone che i legni adoprati dal Coulomb avessero sofferto una lavorazione, ove si fosse adoprato dell'olio per pulirli.

TAVOLA
DELL'ATTRITO DI PRIMA SPECIE
quando il moto è acquistato

Esperienze di Coulomb

Quercia sopra quercia	
fibre parallele	0,11
superfici spalmate di sevo o sugna	0,04
superfici ridotte a spigoli ritondati	0,08
spigoli untuosi	0,06
fibre incrociate	0,10
superfici ridotte a spigoli ritondati	0,10
Quercia sull'abete: fibre parallele	0,17
Olmo sull'olmo fibre parallele.	0,10
Quercia sù ferro fibre parallele e velocità piccolissima	0,08
velocità di $0^m,30$ per 1″	0,17
superfici piccolissime e un poco untuose	0,07
Quercia sul rame: fibre parallele e velocità piccolissima	0,05
velocità di $0^m,30$ per 1″	0,18
Ferro sù ferro a secco	0,28
con spalmatura di sevo	0,10
Rame sù ferro a secco	0,24
con spalmatura di sevo	0,10

Esperienze di Morin

Quercia sù quercia: fibre parallele	0,48
fibre incrociate	0,32
superfici bagnate d'acqua	0,25
spalmate di sapone secco	0,16
» di sevo	0,08
superfici untuose	0,11
fibre perpendicolari	0,34
superfici spalmate di sugna	0,07
superfici untuose	0,14
Legno per testa su legno in piano	0,19
Olmo sù quercia: fibre parallele	0,43
superfici spalmate di sevo	0,07
» di sugna	0,06
» di sapon secco	0,14
» untuose	0,12
fibre incrociate	0,45
Faggio, abete, frassino, pioppo e sorbo sù quercia	
Fibre parallele	da 0,36, a 040
Ferro sù quercia	
fibre parallele al moto	0,62
superfici bagnate d'acqua	0,26
spalmate di sapon secco	0,21
Fonte sù quercia	
fibre parallele al moto	0,49
superfici bagnate d'acque	0,26
spalmate di sapon secco	0,19
Ottone sulla quercia	
fibre parallele al moto	0,62
superfici untuose	0,10
Canapa in fili sulla quercia	
fibre parallele	0,52
» incrociate e bagnate	0,33
Cuoio nero da corregge sù querce	
fibre parallele	0,27
Cuoio conciato sù quer.	da 0,30 a 0,35
superfici bagnate d'acqua	0,29
Quercia, olmo, carpine, guaiaco, pero salvatico, fonte, ferro, acciaio, bronzo, combinato l'uno coll'altro, con superfici spalmate di sevo, sugna, olio da	0,07 a 0,08
Olmo sopra olmo	
fibre parallele, superfici spalmate di sapon secco	0,14

superfici untuose............. 0,14
Quercia sull'olmo: fibre parallele 0,25
superfici con sapon. secco.... 0,14
superfici untuose............ 0,14
Ferro fuso sull' olmo.......... 0,20
superfici untuose............ 0,13
Ferro sull' olmo.............. 0,25
superfici untuose............ 0,14
Quercia sù ferro fuso
fibre incrociate............. 0,37
fibre parallele untuose....... 0,17
Carpine sù ferro o fonte
fibre parallele............... 0,39
superfici spalmate con sugna e
piombaggine............... 0,05
» di asfalto........... 0,06
» di untume delle ruote 0,09
» untuose.......... 0,14
Guaiaco sù fonte
superfici untuose......... 0,12
Pero salvatico sù fonte
fibre parallele.......... 0,44
superfici untuose........ 0,17
Pelle di bove conciata sù fonte
cuoio combaciante....... 0,56
superfici spalmate d'acqua.. 0,36
» di sevo.......... 0,16
» di olio.......... 0,13
» untuose......... 0,23
Fonte sù fonte e sù bronzo
superfici un poco untuose... 0,18
» spalmate d'acqua... 0,31
» di sugna e piombaggine 0,05
Ferro sù fonte.......... 0,19
superfici spalmate d'untume di
ruote................ 0,12
Acciaio sù fonte.......... 0,20
superfici untuose......... 0,11
Ottone sù fonte.......... 0,19
superfici con untume di ruote 0,13
» untuose......... 0,11
Bronzo sù ferro fuso...... 0,22
superfici untuose......... 0,11
Canapa in fili sù fonte
fili perpendicolari al senso del
moto, superf. spalmate di sevo 0,19
» di olio 0,15

Quercia sù ferro, fibre parallele
superfici spalmate di sevo... 0,10
» untuose.. 0,17
Fonte sù ferro
superfici spalmate di sevo... 0,10
» di sugna.. 0,09
» di olio... 0,06
» untuose... 0,14
Ferro sù ferro: fibre parallele. 0,14
superfici untuose......... 0,18
Acciaio sopra ferro
superfici spalmate di sevo... 0,09
» di sugna. 0,08
Bronzo sopra ferro
superfici un poco untuose... 0,16
» con sugna e piombaggine 0,09
Guaiaco sopra bronzo
superfici spalmate di sevo... 0,08
» di olio d' uliva. 0,05
» untuose.... 0,15
Cuoio conciato sopra bronzo
cuoio combaciante superfici
spalmate di sevo........ 0,24
» d'olio............. 0,19
» untuoso, e il bronzo bagnato 0,29
Cuoio posto orizzontalmente e
superficie spalmata di sevo.. 0,14
» d'olio............. 0,13
» untuosa e il bronzo bagnato 0,24
Fonte sù bronzo.......... 0,15
superfici untuose......... 0,13
Ferro sul bronzo.......... 0,17
superfici untuose......... 0,16
Acciaio sopra bronzo....... 0,15
superfici spalmate di sevo... 0,06
» di olio............. 0,05
» di sugna e piombaggine... 0,07
» di untume di ruote...... 0,17
Bronzo sù bronzo......... 0,20
superfici spalmate d' olio... 0,06
» untuose... 0,13
Pietra calcarea oolitica sù calcarea oolitica........... 0,64
Pietra calcarea dura sù calcarea
oolitica............. 0,67
Mattone sù calcarea oolitica.. 0,65
Quercia sù calcarea oolitica... 0,58

Ferro sù calcarea oolitica . . . 0,69
Pietra calcarea dura sù calcarea dura 0,38
Pietra calcarea oolitica sù calcarea dura. 0,65
Mattone sù pietra calcarea dura 0,60
Quercia sù pietra calcerea dura 0,38
Ferro sù pietra calcarea dura . 0,24
superfici bagnate d'acqua . . . 0,30

75. *Deduzioni generali dall'esperienze sull'attrito di prima specie* — I. L'attrito cresce col riposo, e dopo un tempo determinato acquista il suo massimo. Queste tempo, è inapprezzabile nei metalli, di qualche minuto nei legni, ed anche di più giorni fra legni e metalli. Quindi non si scoprirebbero le leggi dell'attrito se in tutti gli sperimenti non si rendesse eguale questo effetto del tempo.

II. In generale può dirsi che la resistenza è proporzionale alla pressione, giacchè sono da trascurarsi le piccole anomalie che si riscontrano a pressioni molto grandi. Sembra che sotto queste il coefficente f scemi alcun poco.

III. La coesione influisce poco nell'attrito, e pochissimo per conseguenza l'estensione della superficie, pure non può ritenersi il suo effetto precisamente nullo, e si da di 8 kil. per ogni metro quadrato nelle superfici di quercia non unte. Nella pratica questo può trascurarsi se ogni metro quadrato è caricato di molte migliaja di kilogrammi siccome spesso suole accadere.

IV. La temperatura almeno da 1 a 20° non ha influenza sull'attrito.

V. Trattandosi di pietre coll'interposizione del cemento, si riscontrano verificate le leggi generali dell'attrito finchè la forza d'aderenza è debolissima. Ma quando si fa grande, ella prende il di sopra all'attrito, e la resistenza diviene sensibilmente indipendente dalla pressione, e cresce proporzionalmente all'estensione della superficie in contatto. Il sig. Morin è portato a concludere che l'attrito e l'aderenza non hanno valori indipendenti i quali possan sommarsi per ottener la resistenza totale, ma queste due forze seguendo la loro preponderanza relativa si sostituiscono l'una all'altra. Ben inteso che ciò può dirsi per il primo distacco, e che l'effetto della pressione nella solidificazione vien valutato nell'aderenza.

TAVOLA
SULL'EFFETTO DEI CEMENTI
nell' attrito delle pietre

sostanze	*coeffic. f*
Pietra calcarea tenera sù calcarea tenera.	0,74
Pietra calcarea tenera con calcina fresca e sabbia	0,74
Gres unito su gres unito a secco	0,71
» con calcina fresca	0,66
Calcarea dura pulita con calcarea simile	0,58
» scarpellinata » scarpellin.	0,78
Granito ben pulito con granito simile	0,66
» con calcina fresca sù granito scarpellinato.	0,49

VI. L'attrito delle pietre e dei mattoni sopra simili corpi non che quello delle altre sostanze, dopo il primo istante del moto è minore che nel distacco, è sensibilmente proporzionale alla pressione, e indipendente dall'estensione della superficie e dalla celerità del moto, ancorchè questa ecceda tre metri per secondo, e la superficie sia ridotta a costole arrotondate, e grandissimo si renda nelle pietre tenere il logoramento. Coulomb facendo scorrere ferro a

secco sul ferro o sul rame non ha osservato alterazione sensibile di superficie sotto carichi di circa 7ᵏ per centim. quad., e Rennie l'ha trovata molto grande per carichi superiori a 14ᵏ, e l'attrito che a questa pressione può valutarsi $f = 0,25$, sotto il carico di 40ᵏ per centim. era $f = 0,4$. Egli crede che tutti i metalli darebbero resultati analoghi; e se non devesi ritenere per errore, conviene ammettere che al di là di un certo limite l'attrito nei metalli cresce più rapidamente della pressione e sta in un certo rapporto con il logoramento delle superficî.

Attrito di seconda specie.

76. *Osservazioni sull'attrito di seconda specie* — Mi piacerebbe di bandire le espressioni di attrito di prima, seconda, e terza specie che non indicano nulla, e sostituirvi le altre di attrito radente, attrito dei corpi che rotolano, e attrito degli assi. Pure mi ritengo dal farlo per i vantaggi che si hanno nel conservare nella scienza i nomi già adottati. Fatta questa mutazione avrei dovuto parlare dell'attrito degli assi subito dopo quello radente giacchè vi è tra l'uno e l'altro grandissima analogia, e in ultimo luogo porre l'attrito dei corpi che rotolano il quale è differentissimo dagli altri due. In questo si tratta di un moto di rotazione, e vi è bisogno per produrlo che la forza agisca con un braccio di leva, mentre negli altri si ha un moto di strisciamento che può concepirsi generato da una forza la quale agisca sulla direzione della resistenza. Quindi la misura dell'attrito di seconda specie non può in modo scientifico confrontarsi con quella degli altri attriti. Per far questo confronto converrebbe ravvisare il corpo che rotola come munito alla superficie di prominenze di una data lunghezza, che io chiamerò l. Quindi determinare in qual punto di queste prominenze passa la resultante delle resistenze che esse incontrano, e noi per fissar l'idee porremo che passi ai due terzi della loro lunghezza. Allora sapendo il braccio di leva col quale agisce la forza, il quale d'ordinario è il raggio r del corpo, dovremmo moltiplicare la forza la quale vince l'attrito di seconda specie per il rapporto

$$\frac{r}{{}^{2}/_{3}\,l}$$

ed il numero ottenuto sarebbe comparabile alle misure degli altri attriti, giacchè così sarebbe ricondotta la forza sulla direzione della resistenza. Questo calcolo non si potrà fare, nè è utile il farlo, ma perchè vedesi che il rapporto rammentato è un numero molto grande, serve a renderci conto perchè sia la resistenza data dall'attrito di seconda specie tanto minore di quella dell'attrito delle altre due specie.

77. *Modo di sperimentare l'attrito di seconda specie* — Si potrebbe anche per quest'attrito usare il piano inclinato nel modo che ho detto per l'attrito di prima specie (72) e non vi si avrebbe complicanza prodotta dalla rigidezza delle corde, pure la difficoltà di valutare con esattezza l'angolo d'elevazione il quale in questo caso sarebbe piccolissimo, e di evitare l'effetto delle oscillazioni o scosse fa preferire il metodo seguente.

Sopra due righe bene addirizzate parallele, (Tav. III fig. 6) ed orizzontali, poste a piccola distanza fra loro si colloca un cilindro coll'asse perpendicolare alla direzione di quelle. Le righe ed il cilindro devono essere di quella

materia di cui vuolsi conoscere l'attrito, ed anche il diametro del cilindro sarà scelto di quella grandezza che si vuole sperimentare. Si avvolge al cilindro una cordicella flessibilissima, ed alle sue estremità piombate fra le due righe si attaccano due pesi eguali, i quali uniti al peso del cilindro daranno il valore della pressione P. Si aumenterà uno di questi pesi quanto è necessario per mettere e mantenere il cilindro in un moto lento e continuo, e si avrà cura di provare se il medesimo aumento fatto all'altro peso serva a decidere il moto dalla parte opposta. Quest'aumento di peso, o la media dei due aumenti nel caso che sien differenti, è la misura della resistenza R, e ordinariamente si dice anche misura dell'attrito di seconda specie. Noi rifletteremo che il peso aggiunto fa girare il cilindro con un braccio di leva eguale al raggio del cilindro istesso, e perciò nei cilindri di diverso diametro l'azione del peso che tende a vincere l'attrito è differente, e quindi converrebbe dare per misura dell'attrito il momento della forza che lo ha vinto, cioè il prodotto del peso aggiunto nel raggio del cilindro.

Con questo metodo di sperimentare si somma nella resistenza d'attrito la rigidezza della corda, e perciò devremo guardarci dall'usar corde che presentino sensibile rigidezza, o almeno dovremo porre in calcolo questa resistenza nel modo che saremo per dire in appressso.

78. *Resultati d'esperienza* — I. Ancora quest'attrito R si ritiene proporzionale alla pressione P sebbene nelle sostanze dure non cresca pelle grandi pressioni precisamente quanto richiederebbe la proporzionalità. Onde avremo $R = f P$, ed anche qui si tratta di determinare il rapporto tra l'attrito e la pressione, cioè fissare il valore del coefficente f.

Se il corpo rotola sovra una superfice scabra e cedevole come di sabbia, di terra, o anche di legno nelle grandi pressioni la resistenza si fa notabilmente maggiore per l'affondamento che ha luogo, e perchè il corpo ha bisogno di rimontare in un piano inclinato per seguitare il suo moto. Le ruote delle vetture sulle strade il cui suolo è scabro e cedevole soffrono un'attrito il cui rapporto al carico varia da $^1/_{15}$ a $^1/_{20}$, mentre sulle strade di ferro, ove il suolo è stabile e liscio l'attrito è tra $^1/_{180}$ e $^1/_{240}$. A provar la legge stabilita ecco alcuni resultati d'esperienze.

Cilindro d'ottone del diam. $0^m,066$ sopra righe di albero gattice.

P = $0^k,59$	R = $0^k,0058$	f = 0,0099
» 0,98	« 0,0118	» 0,0121
» 1,00	» 0,0128	» 0,0128
» 3,00	» 0,0405	» 0,0135
» 5,00	» 0,0577	» 0,0115
» 6,35	» 0,0600	» 0,0095
» 7,00	» 0,0702	» 0,0100

Cilindro di ferro del diam. $0^m,024$ sù righe di gattice.

P = $1^k,39$	R = $0^k,016$	f = 0,0116
» 1,90	» 0,031	» 0,0163
» 2,83	« 0,039	» 0,0137
» 4,83	» 0,079	» 0,0163

II. Secondo il Coulomb l'attrito di seconda specie a circostanze pari è in ragione inversa del diametro dei cilindri, il Dupuit sostiene che è in ragione inversa della radice di questi diametri. Queste regole non si possono stabilire dietro i resultati delle mie esperienze, i quali porte-

rebbero a concludere che volendo chiamare attrito il pesetto che nella descritta esperienza si aggiunge per decidere il moto nel cilindro, questo attrito sarebbe prossimamente costante al variare del diametro nel cilindro; e tornerebbe direttamente proporzionale al raggio o diametro quando si volesse dare all' attrito il significato, che più li si conviene (76), del momento con cui agisce quel pesetto. Questo rilevasi dai resultati sperimentali che ho riferiti, e meglio ancora dai seguenti

Cilindri di gattice sopra righe del medesimo legno.

		diam. 0^m,065		diam. 0,0325
P =	0^k,54	R = 0^k,0070	R =	0^k,0070
»	0,66	» 0,0080	»	0,0080
»	1,00	» 0,0175	»	0,0199
»	3,00	» 0,0462	»	0,0445
»	5,00	» 0,0635	»	0,0654

III. Varia l'attrito secondo le diverse materie, ma di piccola quantità se si tratti di corpi tutti egualmente ben lisci

Ottone sopra gattice 0^k0,115
Ferro sopra gattice . 0,0145
Gattice sopra gattice 0,0157
Faggio sopra gattice 0,0148

IV. Quest' attrito in confronto di quello di prima specie è di piccolissimo effetto, e se ne fa anche astrazione in tutti i calcoli relativi ai corpi solidi e duri che entrano nella composizione delle macchine.

V. Sembra che l'untuosità non giovi punto a scemar l'attrito di seconda specie.

Attrito di terza specie.

79. *Modo di determinar l'attrito di terza specie.*— Si riduce all'equilibrio una puleggia (Tav. III fig. 7) aggravandola con una corda flessibilissima la qual porta alle sue estremità pesi eguali. Questi pesi sommati con quello che è proprio della puleggia determinano la pressione dell'asse sulla respettiva canna. Quando essi son grandi sogliono indurre rigidezza nella corda, della quale convien tener conto per sottrarne l'effetto dal resultato. L'asse e la canna saranno di quella materia sulla quale vuolsi sperimentare. Si aggiunge ad un estremo della corda il peso conveniente per far girare la puleggia con movimento lento, e questo peso aggiunto moltiplicato per il rapporto che passa tra il raggio dell'asse e quello della puleggia dà la misura dell'attrito. Conviene moltiplicarlo per questo rapporto onde toglier l'effetto dovuto al braccio di leva con cui agisce.

80. *Resultati d' esperienze.* — I. Cresce anche quest' attrito proporzionalmente alla pressione. Sia r il raggio della puleggia ed r' quello dell'asse, e sia P la pressione R la resistenza che s' incontra per far girare la puleggia sarà

$$R\frac{r}{r'} = fP \text{ e perciò } f = \frac{R}{P}\frac{r}{r'}$$

e la regola per determinare il coefficente d'attrito è di moltiplicare il rapporto tra la trovata resistenza e la pressione per l'altro rapporto del raggio della puleggia al raggio del suo asse.

II. Ancor quest' attrito è minore di quello di prima specie, ma molto più grande di quello di seconda. L'unica differenza che passa fra questo e quello di prima specie sembra consistere nel confricarsi continuamente le superfici nei medesimi punti, e ridursi perciò quelle molto levigate.

III. Se l'asse è di ferro e la puleggia di ottone si ha $f = {}^1/_7$. Se co-

me suol farsi frega il ferro sull' ottone quando è unto da molto tempo $f = 1/_9$, quando l' unto è rinnovato si riduce $1/_{12}$. Tra legni e legni unti quest' attrito è anche minore che tra metalli e metalli egualmente unti.

IV. L' attrito degli assi non dipende punto dalla velocità; almeno essa v' influisce sì poco che nella pratica non può valutarsi.

V. La lunghezza dell' asse non ha influenza sull' intensità dell' attrito, e per questa può intendersi ripetuto quello che si è stabilito per l' estensione della superficie nell' attrito di prima specie. Solo è da avvertirsi che gli assi piccoli mandan fuori più presto l' unto fresco e riducono la spalmatura a semplice untuosità. E che l' estensione dell' asse può influire per il solo effetto dell' aderenza, il quale trascurabile quando le pressioni sono grandi, deve valutarsi negli strumenti delicati, come negli orologi ove perciò gli assi si fan piccoli.

VI. Qui pure si ottiene gran vantaggio collo spalmare d' unto le superfici. Può dirsi che l' unto recente scema l' attrito della metà. Esso poi ricresce a misura che l' untuosità si consuma, ma ciò accade più lentamente che nell' attrito di prima specie. In seguito diremo quali sieno le sostanze untuose da preferirsi.

VII. Nell' esperienze del Coulomb, i cui resultati posson vedersi nella seguente tavola, l' asse era di 47^{mm} in diametro e la pressione variò da 25 a 200 kil. Sfortunatamente queste esperienze non abbracciano una parte dei corpi impiegati nel giuoco delle macchine come sarebbero l' acciaio, il ferro fuso, il bronzo, il metallo delle campane, il carpine, il sorbo. Onde in difetto di meglio l'attrito di questa specie potrà supporsi eguale a quello del ferro per i due primi, dell' ottone per i due successivi, e della quercia per gli ultimi. Si può anche osservare che paragonando le cifre della tavola di prima specie con quelle di questa, combinano presso a poco quando si tratta di sostanze analoghe spalmate di grasso, o untuose, o ridotte a spigoli rotondeggianti, lo che permetterà di completare i numeri di questa tavola servendosi di quelli dell' attrito sulle superfici piane. L' esperienze fatte dal Morin nel 1834 portano a resultati alquanto differenti da quelli del Coulomb, e questa differenza lascia dei dubbi che richiamano l' attenzione degli sperimentatori su questo soggetto.

TAVOLA
SULL' ATTRITO DEGLI ASSI IN MOTO
nelle loro canne.

Esper. di Coulomb.	*coef. f*
Asse di ferro in canna di rame.	0,155
lo stesso intonacato di sevo. .	0,085
» di sugna vecchia	0,12
» con intonaco secco e superfici untuose	0,127
» di olio	0,13
» con intonaco che aveva servito molto tempo senza che fosse cessato il moto.	0,15
Asse di ferro in canna di legno con intonaco di sevo	0,05
Asse di quercia verde, e legno di guaiaco con intonaco di sevo	0,036
» superfici untuose.	0,06
» con intonaco usato da molto tempo	0,07
Lo stesso asse con canna d' olmo e intonaco di sevo. . . .	0,03
» con intonaco secco, e superfici untuose	0,05

Asse di bosso, canna di guaiaco, e intonaco di sevo 0,045
» con intonaco secco, e superfici untuose. 0,07
Lo stesso asse con canna d'olmo, e intonaco di sevo . . . 0,035
» con superfici untuose . . . 0,05

Esperienze di Morin.

Asse in fonte sù cuscini in fonte o di bronzo, e assi di ferro sù cuscini in fonte, o di bronzo, con unto d'olio, di sugna, di sevo, o di untume molle delle ruote, usati nel modo ordinario . . . . . . da 0,07 a 0,08
» rinnovato in un modo continuo 0,054
» con i medesimi unti e bagnati d'acqua 0,08
» con intonaco d'asfalto . . 0,054
» superfici untuose. 0,14
» untuose e bagnate d'acqua 0,14
Asse in fonte sù cuscini di bronzo: superfici untuose . . 0,16
» untuose e bagnate d'acqua. 0,16
» poco untuose, e alquanto corrose 0,19
Asse in fonte sù cuscini di legno guaiaco. 0,18
» con unto d'olio, e di sugna rinnovato continuamente 0,09
» superfici untuose. 0,10
» untuose di sugna e piombaggine. 0,14
Asse di ferro sù cuscini di bronzo: superfici untuose e bagnate d'acqua 0,19
» pochissimo untuose 0,25
Asse di ferro sù cuscini di guaiaco, con olio, o sugna . . . 0,11
» superfici untuose. 0,19
Asse di bronzo sù cuscini di bronzo con olio 0,10
» con sugna 0,09
Il medesimo asse sù cuscini di fonte con olio, o sevo rinnovati continuamente da 0,045 a 0,052
Asse in guaiaco sù cuscini di fonte. con sugna. 0,12
» superfici untuose. 0,15
Asse di guaiaco sù cuscini dello stesso legno con sugna rinnovata continuamente 0,07

81. *Osservazione.* — Allorchè si conosce la pressione prodotta da un corpo sovra l'altro col quale soffre attrito, si moltiplicherà il coefficente d'attrito notato nelle tavole, per la pressione, e si avrà l'attrito o resistenza che si incontra in quel dato movimento. Interessa conoscere tutte le particolarità che determinan la posizione di quel corpo, per es.° il grado di levigatezza della superficie, se vi sono stati spalmati unti e quali, la specie di attrito che si produce; perchè senza questi dati le tavole non determinano il coefficente d'attrito. E quando i dati non corrispondono a quelli delle tavole farà duopo, o istituire a bella posta delle esperienze per conoscere l'attrito nel caso speciale di cui si tratta, o contentarsi di un'approssimazione con prendere l'indicazione della tavola che più si avvicina a quella cercata.

APPLICAZIONI

82. *Danni, e vantaggi che si ottengono per l'attrito, e lavoro del medesimo.* — L'attrito ha per resultato il logoramento de' corpi che si fregano: è una causa di distruzione delle macchine: dà il modo d'agire alle polveri che si usano per pulire le superfici, alle lime ed altri analoghi strumenti che adopransi per ridurre i solidi. Considerato come una forza diretta costantemente secondo la tangente alla superficie di contatto, e perpendicolare alla pressione, le applicazioni che se ne fanno tendono ad evitare o diminuire la perdita di

forza che dalla resistenza passiva dell'attrito proviene, ovvero a dispor questa resistenza nel modo il più vantaggioso servendosene come potenza attiva per conseguire un qualche intento. Dall'attrito infatti viene una dannosa consumazione di potenza, e di lavoro meccanico ogni qual volta si vuole il movimento, ma quando si ricerca la stabilità se ne rileva sommo vantaggio. Non si camminerebbe con sicurezza se i nostri piedi non incontrassero l'attrito del suolo, e non avrebbero le fabbriche quella stabilità che presentano alle spinte orizzontali se non esistesse l'attrito. Per conoscer poi la perdita di lavoro che è cagionata dall'attrito convien saper calcolare l'effetto di una tal resistenza. Il calcolo però è facile avendo noi avvertito, che deve aversi per una resistenza costante. In fatti sapendo che l'attrito di prima specie si effettua per uno spazio S, si dovrà moltiplicare la resistenza per questo spazio, ed il prodotto f P S sarà il lavoro meccanico dell'attrito. Questo lavoro s'impiega in logorare i corpi e smoverne le particelle, e quando sono essi perfettamente elastici nell'imprimere moti vibratorj indipendenti dalla velocità dello strisciamento, che ora sensibili ora inattesi si estinguono col distruggersi scambievolmente o col propagarsi ai corpi circonvicini. Per l'attrito di seconda specie il calcolo del lavoro si farà come per quello di prima, e la formula che lo esprime sarà f P S. Per quello di terza specie il cammino circolare che è descritto dai punti dell'asse, viene determinato dal numero delle circonferenze percorse nella loro rivoluzione; onde essendo $2\pi r$ la circonferenza dell'asse, n il numero delle rivoluzioni, f, e P il coefficente d'attrito e la pressione, sarà $n \cdot 2\pi r f$P il lavoro meccanico. Questa formula mostrando che il lavoro cresce proporzionalmente alla grossezza degli assi, sebbene l'attrito ne sia assolutamente indipendente, fa conoscere che bisogna diminuire il diametro di essi quanto lo permette la loro solidità. Ma siccome l'attrito non varia al cambiar dell'estensione della superficie in contatto, e la pressione diminuisce in ciascun punto quando cresce quest'estensione, ed anche diminuisce il logoramento di ciascun punto; così vi è vantaggio nell'allungare un poco gli assi e i cuscinetti, lo che si fa nelle ruote da vettura, ed ove si voglia conservare resistenza nell'asse.

83. *Diminuzione dell'attrito*. — Rondelet nell'arte di fabbricare riferisce l'esperienza seguente. Una pietra da taglio del peso di 540 kil. richiede per essere trascinata sovra un altra simile rozzamente tagliata e posta orizzontale, uno sforzo di 379 kil. La stessa pietra trascinata su pezzi di legno venne mossa da una forza di 326 kil., e tratta sovra un tavolato mentre sovra altro tavolato era essa collocata, fu mossa con 303 kil. insaponate le due tavole che strisciavano l'una sull'altra non abbisognò che uno sforzo di 91 kil. Posata sopra a cilindri o curri di 3 pollici di diam. vi occorsero solo 17 kil. Finalmente rotando i cilindri sopra a pezzi di legno la pietra si smosse con 14 kil., e posti i cilindri fra due piani di legno bastarono 11 kil. E qui potrebbe aggiungersi che se il Rondelet avesse usato cilindri di ferro mossi sovra un piano di ferro orizzontale, non sarebbero occorsi per muovere la pietra più che 3 kil., onde vedesi come in diversi modi possa diminuirsi l'attrito e ridursi quasi in

sensibile col farlo di seconda specie fra sostanze ben solide. Potrà stabilirsi che l'attrito si diminuisce ne'seguenti modi.

I. Quando due superfici han da girare l'una sull'altra, una di queste si ridurrà conica o sferica; ciò deve farsi nei perni che girano sovra il suo dado, lasciando all'olio una specie di ricettacolo ove possa trattenersi per sola aderenza, onde essere a poco alla volta tirato sotto la superficie che soffre l'attrito. Nelle grandi macchine questi seni sarebbero più nocivi che utili. Anche negli assi orizzontali si riduce l'estremità appuntata, e si fa appoggiare in un piccol foro regolando la pressione con una vite nei meccanismi delicati.

II. Nei piccoli apparati si usano i cuscinetti o appoggi in pietra dura per aver minor corrosione e minor attrito. Nei grandi si fanno di ferro fuso o di pietra o di altra materia molto solida; quando l'asse è d'acciaio si usanó i cuscini di ottone, e di rame o di stagno se vuolesi un moto dolce e regolato, e preme di non corrodere il pernio. A quest'ultimo scopo negli strumenti d'astronomia il rame che forma il cuscino s'incava ad angolo acuto (Tav. III fig. 8) onde il pernio abbia due linee soltanto di contatto col cuscino, e cada a basso la polvere che fra mezzo può insinuarsi, la quale è cagione della corrusione.

III. Si puliscono e si rendono levigate molto le superfici che si hanno da fregare.

IV. Si spalmano con quell'unto che è più adattato a diminuire l'attrito, cercando di rinnovarlo a misura che si consuma. Alla canna ove gira l'asse delle ruote de'vagoni si fa nella parte superiore un'apertura, ed ivi si adatta un piccol recipiente, che ha da contenere il grasso necessario a rinnuovare continuamente l'unto; così pure un recipiente pieno d'olio si adatta ai cilindri delle macchine a vapore perchè si mantenga l'unto allo stantuffo. Fra le materie da usarsi per spalmare gli assi è ottima la polvere di steatite impastata con olio e sevo, e quella pur sottilissima di carburo di ferro o piombaggine mescolata con poche gocce d'alcool. L'untume molto molle purificato, fatto con grasso di maiale e piombaggine nella proporzione di $^1/_5$ di piombaggine, ha il difetto di addensarsi presto e non lasciare dopo che un'untuosità inferiore a quella dei grassi puri. Il bitume d'asfalto, o catrame minerale, secondo Morin si avvicina molto all'unto con piombaggine che ho rammentato, ed aderisce fortemente alla superficie e perciò offre qualche vantaggio. I catrami composti di resine, ed olj essenziali son suscettibili d'indurare presto, e di aumentare la corrosione quando non venganó spesso rinnovati. Gli untumi di una solidità simile al sevo, e alla sugna sono principalmente impiegati per i legni, e i ferri taglienti perchè addolciscono l'attrito senza lasciarsi assorbire. Sono usati gli olj i più fluidi per i meccanismi leggeri come nell'orologeria; ma depurati da ogni acido, e muscillaggine. La presenza dell'acqua sugli assi, coperti d'antichi grassi non fa che impedire col suo rinnovamento continuo, che le superfici si scaldino, e che i grassi si liquefacciano. L'acqua, ed anche l'olio si adoprano spesso per dimiuuire il riscaldamento anche negli strumenti da taglio.

V. Si procura di ridur l'attrito a quello di seconda specie. Noi abbiamo già mostrato il gran vantaggio

che ricavasi dall'uso dei cilindri o curri, quando si devono trascinare dei corpi molto pesanti: si preparano tre cilindri (Tav. III. fig. 9) di ugual diametro, due dei quali si pongono sotto il corpo, e fatto questo scorrere su di essi, vi si pone sotto il terzo per la parte anteriore mentre il primo sta per sfuggire dalla parte posteriore; quindi mentre il corpo si avanza si ripone sotto il primo e ne esce il secondo, e così si seguita tenendosi sempre sostenuto su due cilindri il corpo.

VI. Spesso non possono adoprarsi i curri, ed allora si ha ricorso alle ruote che non differiscono molto da quelli per l'effetto quando sono bene imperniate. Un esempio ne abbiamo nella combinazione di ruote che ponesi sopra la macchina immaginata da Atwood (Tav. III fig. 10) per determinare le leggi del moto dei gravi: l'asse della ruota principale, il quale si vuole che giri con pochissimo attrito, riposa per ciascuna delle sue due estremità sopra due circonferenze di ruote imperniate con molta mobilità: quando gira l'asse della prima, e trova una resistenza nello sfregare la circonferenza delle altre, comunica moto alle ruote secondarie, e questo moto tende a mantenerla in movimento. Si conosce il vantaggio delle ruote secondarie col provare che un determinato urto fa muovere la ruota primaria per moltissimi giri quando le altre sono mobili, e per pochi quando si tengono ferme. Con tuttociò il vantaggio che recano le ruote non è sì grande come quello dei curri, perchè oltre l'attrito di seconda specie che ha luogo sulla circonferenza della ruota deve anche valutarsi quello di terza che si effettua sull'asse delle ruote. Consimile disposizione si ha ogni qualvolta si adoprano le ruote per trasportare i corpi, come quando si muniscono di rotelle le guide lungo le quali striscia un pezzo di una macchina.

VII. L'uso di far le piccole rotelle di bronzo, e le grandi cerchiate di ferro all'esterno, e con un cerchio d'ottone al foro centrale, rende l'attrito minore sovra gli assi che io suppongo di ferro, e sovra il corpo che striscia alla loro circonferenza. Nelle ruote da vettura la coesione tra il fango ed il cerchio di ferro si rende assai sensibile; e perciò dobbiamo anche qui commendare il vantaggio delle strade a rotaje di ferro, perchè non vi ha luogo questa coesione, perchè in esse non cede il punto che è aggravato, e per la levigatezza della loro superficie. I vantaggi che in tali strade si sono ottenuti circa l'attrito vi rende il movimento mirabile a segno che serve anche la forza di un solo uomo per mandarvi un treno pesantissimo. Quindi è molto agevolata la via per trovare dei motori su tali strade, e scorgesi che potenza molto minore di quella del vapore, e della pressione atmosferica potrà somministrare convenienti locomotive.

85. *Dei modi di accrescere l'attrito, e dei freni.* — Fin qui abbiamo detto come l'arte tenta diminuire l'attrito, ora conviene parlare di quei casi nei quali giova aumentarlo. Quando le vetture passano da una strada orizzontale ad una molto inclinata per discesa è necessario impedire che acquistino una accelerazione, la quale potrebbe divenire pericolosa. Si può giungere a questo scopo in due maniere, o impedendo alle ruote di girare sul loro asse, e lasciandole strisciare contro il terreno, o diminuendo la loro velocità

col presentar ad esse un nuovo attrito di primo genere. Pel primo metodo servirà porre un regolo che passi tra le razze delle ruote e sotto le stanghe del barroccio, ma così l'attrito che si fa in un sol punto del cerchio, e lo consuma rapidamente, e pone la ruota fuori di stato di servire. Si rimedia a quest'inconveniente col mezzo della scarpa di ferro S (Tav. III fig. 11) che inviluppa una porzione del contorno della ruota e va a collocarsi tra essa e il terreno: la scarpa è rattenuta da una catena fermata nella parte anteriore della vettura, e strascicata sovra il terreno impedisce il moto della ruota. Quando il terreno presenta grandi irregolarità come buche o pietre di considerabile grossezza è facile che la scarpa esca dalla ruota ed allora si riproduce il pericolo; e lo stesso accaderebbe se si strappasse la catena che tiene la scarpa legata alla partita anteriore della vettura. La seconda maniera è più semplice, e consiste nell'usare un arco di legno guarnito di metallo situato dietro alle ruote maggiori della vettura, e congegnato in modo che possa a piacimento accostarsi a queste con una certa pressione (Tav. III. fig. 12). Il congegno è diverso secondo l'importanza della vettura, e nella massima semplicità questo freno consiste in una stanga di legno che legata al mezzo con una fune è dal vetturale pressata alle ruote passando la fune in una puleggia unita alla sala del barroccio; altre volte la stanga porta due porzioni di arco che si pressano alle ruote con un tirante il quale agisce al mezzo della stanga e termina con una vite alla parte anteriore della vettura. Al vagone che sulle strade a rotaje porta l'approvisionamento della locomotiva, alle ruote motrici della locomotiva, e ad una o più carrozze intermedie del treno, esistono dei freni i quali posti all'occorrenza levano il moto al convojo, ed in diversi punti della sua estensione onde evitare gli urti fra i diversi vagoni che lo compongono. Questi freni sebben sempre presentino un cerchio di legno che va ad addossarsi alla circonferenza della ruota, dovendo esser posti contemporaneamente ai due lati del vagone ed a più ruote, meritano di essere studiati per il meccanismo col quale si collegano, e funzionano al girare di una sola vite. Io ne riporterò i disegni parlando delle macchine a vapore, qui servirà ritenere che quando la pressione di essa aumenta crea una resistenza d'attrito proporzionale, e ben presto la ruota perde quasi affatto il suo movimento. Questo mezzo di fregamento che si può moderare o aumentare a piacere, è per molti riguardi preferibile a quello della scarpa: ed è al presente adottato quasi generalmente per le diligenze, e per le vetture da trasporto, non che nelle locomotive, ed in molti macchinismi.

Nelle grandi macchine e soprattutto nei molini a vento e nella macchina chiamata Grua è di somma importanza il potere fermare o almeno moderare a piacere il movimento. Ciò si fa coll'uso dei freni. Un freno può esser composto di un grand'arco di circolo di legno A (Tav. III fig. 13) guarnito esternamente di una lastra di ferro. Un estremità di quest'arco è fissa, e l'altra imperniata in un piccolo braccio di leva. Quando si fa forza sul braccio grande di questa leva B si obbliga il freno ad avvicinarsi ad una grande ruota C che partecipa del movimento generale della macchina. Si esercita contro questa ruota una pressione considerabi-

lissima e la resistenza dovuta a questa pressione basta per produrre l'effetto desiderato. L' esperienze eseguite sull'attrito (74) metteranno in tutti i casi in stato di conoscere per una data pressione le resistenze dovute all'attrito dei freni dei quali si vorrà far uso.

Avverto che il freno deve esser messo ad una parte ben solida della macchina, e nel pressarlo devono aversi in considerazione gli urti che soffron fra loro i differenti organi di essa; affinchè posto con troppa sollecitudine, non produca la rottura nelle parti più deboli del meccanismo. Il riferito esempio dei treni delle locomotive ci fa comprendere il vantaggio che si ha nel moltiplicare i freni. Pure sempre l'uso de' freni é da posporsi al regolamento della forza motrice: quello dà sempre un consumo di potenza, e questo la utilizza: quello cimenta la resistenza dei meccanismi, e questo la conserva. Solo quando non si può dominar la forza motrice si usano i freni; spesso si póngon questi per agir prontamente, e subito dopo si procura di regolare la forza motrice.

86. ***Freno di Prony, ed uso del medesimo per misurare il lavoro delle macchine.*** — Il Prony ha immaginato un freno che dà il mezzo più adattato per misurare la quantità di lavoro che può essere trasmesso da un albero girevole di una macchina. Questo è formato (Tav. III fig. 14) di due porzioni di collare che abbracciano l'asse e lo stringono per mezzo di viti che le congiungono fra loro. Ogni collare ha una leva BO, DE di egual peso, ed uno abbraccia la parte superiore dell'albero, l'altro la inferiore: il collare inferiore porta all'estremità della lunga leva un peso P. Ecco il modo di usare questo strumento. Situate le leve in una posizione orizzontale, essendo preso l'albero fra i collari ma non ancora chiuso, si fermano in questa posizione ambedue, e si fa muovere la macchina. Quando il moto è impresso si chiudono le madreviti *m*, *m'* del freno in guisa tale da produrre un urto notevole contro l'asse. Allora ne viene una modificazione nella velocità della macchina, e si aspetta che essa sia divenuta di un certo valore e costante. La costruzione del freno si presta ad ogni necessario accostamento; e per ottenerlo non fa d' uopo che di chiudere e premere più o meno le madreviti. All'ostacolo invincibile che impediva alle leve di girare coll'asse C si sostituisce il peso P situato alla estremità di DE, il quale s'aumenta sino a che produca lo stesso effetto dell' ostacolo invincibile che ha rimpiazzato; vale a dire sino a che vincendo l'attrito esercitato dall'albero girevole contro la testa delle leve, mantiene esse leve in posizione orizzontale. Ottenuto una volta quest'effetto si comprende che la quantità di lavoro o d'azione realmente trasmessa all' albero girevole, ha per misura il prodotto del peso che è alla leva, e della velocità che prenderebbe esso peso durante un secondo, se fosse mosso attorno all'albero col braccio di leva per raggio. Supponiamo per es. che si trattasse di valutare la forza trasmessa dall'albero orizzontale d'una ruota idraulica; sia la velocità di questa 18 giri per minuto e col freno si sia ridotta a 3 soli giri per minuto cioè siasi diminuita di 15 giri; il carico del freno 100 kil., e la lunghezza del braccio di leva $3^m,20$. La circonferenza che corrisponde a questo raggio sarà $20^m,10$ e perciò la velocità del peso in un minuto uguale

a $15 \times 20^m,10 = 301^m,5$ e per 1″ sarà $= 5^m,025$. Questa quantità moltiplicata per 100 kil. dà $502,5^k$ inalzati ad un metro per la quantità di lavoro distrutta dal freno. Ma questa era $^{15}/_{18}$ del lavoro che produceva la ruota: dunque il lavoro meccanico trasmesso in un secondo dalla ruota sul suo albero, valutato l'attrito dei perni e la resistenza dell'aria sarà $^{18}/_{15}.502,5 = 603^{km}$. Contando come si fa ordinariamente il *caval-vapore* per 75^{km} in un secondo, si vede che la ruota possederebbe una forza di 8 circa di questi cavalli. Generalmente chiamato Q il lavoro meccanico vinto dal freno, P il peso di cui il freno è gravato, n il numero de' giri che ha impediti nel tempo t; con m rappresentando il numero de' giri che si compievano senza il freno, con π il rapporto del diametro alla circonferenza, e con R il braccio di leva col quale agisce il peso; il lavoro totale della macchina sarà

$$\frac{m}{n} Q = \frac{m}{n} \frac{2\pi n P R}{t} = \frac{2\pi m P R}{t}$$

Il Poncelet ha modificato il freno del Prony sostituendo al pezzo superiore una striscia di lamiera larga 16 centim. che abbraccia l'albero per $^2/_3$ la quale diminuisce i grandi urti. Sempre tra l'albero e il legno del freno devono frapporsi strisce di lamiera o di rame per prevenire l'effetto del riscaldamento sù legni in contatto. Coriolis osserva con ragione che un tal mòdo di misurare la forza non sodisfa tutte le condizioni che si potrebbero desiderare, poichè il moto d'un organo ricevitore di forza motrice, per quanto esso sia ben costruito, e sebbene ogni precauzione si sia presa onde la forza motrice giunga regolarmente, non è mai del tutto uniforme; d'onde risultano oscillazioni fortissime nella leva. Pur tuttavolta un tal metodo è assai comodo, quando non si abbiano gli apparati dinamometrici di Morin (*Int.* 199), e non si possa usare l'inalzamento dei pesi (*Int.* 198). Quest'ultimo metodo non può offrire qualche sicurezza se non quando ci sia dato disporre di luoghi elevatissimi. Infatti se l'ascensione de' pesi è troppo limitata, essa non può servire ad osservazioni regolari, ed esatte.

87. *Consumo di lavoro per l'attrito dell'asse nelle ruote molto pesanti, e risparmio di lavoro nell'uso de coltelli.* — Si sono introdotte in più macchine grandi ruote di ferro fuso che servono a render regolare il moto, e fan da volanti, o organi ricevitori di forza viva. Or credo conveniente richiamar l'attenzione sull'enorme consumo di lavoro che può resultare dal solo attrito degli assi di tali gigantesche ruote. Sonovi volanti che non pesano meno di 20000^k, e fan da 50 a 60 rivoluzioni per minuto. L'attrito dell'asse che è di fonte sul bronzo bene ingrassato sarà almeno $0,054. 20000 = 1080^k$, e posto che faccia 50 giri al minuto mentre ha un diametro $0^m,2$, il tragitto percorso in questo tempo dalle particelle sfreganti sarà

$$^{22}/_7 \times 0,^m2 = 0^m628,$$

ed il lavoro consumato verrà ad essere

$$1080^k \times 0^m,628 = 678^{km}$$

circa. Convien che l'uso de' volani presenti pur notabil vantaggio nel regolamento del moto, per non dover contare il consumo di un sì gran lavoro prodotto dal solo asse, al qual poi dovrebbesi aggiungere tutto quello che proviene dall'attrito dei denti di roteggio per comunicare tanta velocità, e dalla resistenza che presenta l'aria.

All'incontro un gran risparmio di

lavoro si ha adoprando i coltelli d'acciaio, come si fa nelle bilance, e nelle impernìature che non devon girare, e han da fare soltanto delle oscillazioni. Infatti chiamato s l'arco descritto da un punto fregante, è fPs il lavoro meccanico dell'attrito, ma s è proporzionale al raggio, e nei coltelli il raggio di curvatura è minimissimo.

Movimento delle vetture.

88. *Applicazione all' attrito delle ruote delle vetture.* — Il carico massimo che suol darsi alle diligenze è di 3620 kilogrammi repartito su quattro ruote, delle quali le due davanti hanno $0^m,485$ di raggio, e quelle di dietro $0^m,76$. Il raggio medio degli assi è $0^m,035$, e questi sono di ferro, e stanno con piccol gioco, o storno, nella superficie interna del mozzo della ruota che è d' ottone, e bene ingrassata. Quindi dovremo fare l'attrito degli assi $f = 0,075$; lo che darà per la resistenza tangenziale e totale sofferta dalle quattro ruote $0,075 \times 3620 = 271^k,50$. Queste diligenze camminano con una velocità di 7982^m per ora, o di $2^m,22$ per $1''$, quando i cavalli vanno al trotto, e ciascun punto della ruota venendo successivamente ad applicarsi lungo il cammino, è facile calcolare che le più grandi di esse fanno

$$\frac{2^m,22}{2.\pi.0^m,76}=\frac{2^m,22}{3,1416.1^m,52}=0,465$$

giri per secondo, e le più piccole

$$\frac{2^m,22}{2.\pi.0^m,485}=\frac{2^m,22}{3,1416.0^m,97}=0,728.$$

Se si suppongono egualmente cariche, il lavoro consumato nello stesso tempo dalle prime sarà circa

$$\tfrac{1}{2}\,271,5.2\pi.0^m,035.0,465=13^{km},9$$

e dalle seconde

$$13^{km},9\,\frac{728}{465}=21^{km},7.$$

Si può giungere più facilmente a questo resultato osservando che la velocità o il cammino descritto in un secondo dal punto d'applicazione dell'attrito, o dalla circonferenza dell'asse che è al mozzo, sarà solamente

$$2\pi.\,0^m,035\frac{2^m,22}{2\pi.0,76}$$

$$=0^m,035\,\frac{2^m,22}{0^m,76}=0^m,1022$$

per le grandi ruote, e

$$0^m,035\,\frac{2^m,22}{0,485}=0^m,1602$$

per le piccole; lo che dà immediatamente la quantità del lavoro

$$\tfrac{1}{2}.271^k,5.0^m,1022=13^{km},85,$$

e $\tfrac{1}{2}\,271^k,5.0^m,1602=21^{km},74$

che si accordano respettivamente con le precedenti, e danno un totale

$$13,85+21,74=35^{km},59$$

per il lavoro assorbito dall' attrito riunito delle quattro ruote. Lavoro che sembrerà molto piccolo se si confronta con quello che si produrrebbe senza le ruote; sarebbe allora $f=0,33$ e perciò il lavoro

$$0,33.\,3620.\times2^m,22=2652^{km}.$$

Sotto il punto di vista teorico questa osservazione serve a mostrare il vantaggio che recano le ruote, perchè i calcoli fatti non solo ci mostrano una diminuzione diretta sull' attrito, ma anche una diminuzione di velocità, o del cammino relativo descritto dal punto d' applicazione della resistenza, la quale è determinata dal rapporto tra il raggio dell'asse e quello della ruota. Così per es. mentre nel caso di sopra la velocità o il cammino effettivo del carico è di $2^m,22$ per $1''$ che combina con quello della circonferenza, l' altro dell' asse è $= 0^m,102$ per le grandi ruote, e $0^m,160$ per le piccole cioè circa 22 volte più piccolo per le une, e 14 per le altre. Quanto al punto di

vista pratico converrebbe ancora considerare: 1° la resistenza che l'aria oppone al moto della vettura, 2° l'attrito circolare o laterale che ha luogo contro gli orli interni ed esterni dei mozzi, mentre la vettura prova degli urti o delle oscillazioni trasversali per l'ineguaglianza del terreno: 3° Finalmente l'attrito di seconda specie che nasce dal contatto delle ruote col suolo. Facendo qui astrazione dalla resistenza dell'aria che è debolissima anche per le diligenze che vanno con assai velocità; osservando che la resistenza degli orli dei mozzi è poco sensibile sulle strade convenevolmente livellate; rimane che solo si calcoli l'attrito di seconda specie. Se non si avessero esperienze già fatte sù questo soggetto potrebbero farsi usando il calcolo di sopra descritto per valutare a priori tutte le altre resistenze; allora dall'attrito che vien dato dall'esperienza fatta sopra una vettura detraendo quello calcolato, rimarrà il valore dell'attrito di seconda specie. Noi usando però l'esperienze già fatte da Dupuit porremo in quest'attrito $f = 0,0207$ per le ruote che hanno il raggio$=1^m$ ed avremo la resistenza, supponendo che sia repartita la pressione metà sulle ruote davanti, e metà su quelle di dietro

$$\frac{0,0207 . 3620^k}{2 . 0^m,76} + \frac{0,0207 . 3620^k}{2 . 0^m,485} =$$

$$\frac{74,9340}{2 . 0^m,76} + \frac{74,9340}{2 . 0^m,485} =$$

$$46^k,3 + 77^k,23 = 126^k,563$$

E lo spazio percorso in un seconde è $2^m,22$ perciò il lavoro consumato per quest'attrito di seconda specie nel medesimo tempo sarà

$$126^k,53 \times 2^m,22 = 280^{km},9$$

89. *Far muovere una vettura col girare l'asse di due ruote.* — La gran differenza che passa fra l'attrito di prima specie e quello di seconda fa sì che quando gira l'asse di due ruote della vettura, se questo è fisso alle ruote dovrà muoversi tutta la vettura, perchè altrimenti dovrebbero girare le due ruote di quell'asse strisciando sul suolo. Ora lo strisciare esse sul suolo produce resistenza maggiore che se devono girare tutte le ruote; infatti nello strisciare delle due ruote si ha un attrito di prima specie pel quale sarà $f = 0,33$; e prendendo il caso della vettura sopra descritta, dovremo su queste due ruote supporre la metà della pressione di 3620 kil. cioè 1810 kil., e perciò il loro attrito di prima specie quando girassero coll'asse senza far progredire la vettura sarebbe

$$0,33 . 1810 = 597^k,3.$$

Ora per il calcolo fatto di sopra quando la vettura si muove l'attrito delle ruote col terreno si è sopra calcolato 126,455, quello degli assi delle piccole ruote, e della sala delle ruote grandi, essendo per questa lo stesso che se girasse nelle ruote, abbiamo calcolato $271^k,50$ e perciò tutto l'attrito che deve esser vinto quando si muove la vettura sarà sulle strade ordinarie $126,53 + 271,50 = 398^k,03$ cioè minore assai del precedente.

Per conferma di tuttociò se ne può fare l'esperienza sopra un modello di carrozza, il quale abbia alla parte posteriore un tamburo ove si acchiocciolì una molla. Questa allorchè è lasciata libera faccia girare l'asse delle due ruote grandi che sono al medesimo fissate. Girando queste quando la carrozza riposa sopra un piano orizzontale essa è mossa in avanti: se poi riposa sopra un piano inclinato per elevazione la carrozza oppone al moto anche la sua gravità relativa, e si avrà il movimento solo quando questa gravità sia minore della differenza che

passa fra i due rammentati attriti, e nel caso del calcolo precedente a kil. 199,27. Inoltre la forza che muove la sala delle due ruote fisse, che qui è l'elasticità della molla montata, dovrà esser sufficiente a vincere la resistenza dell'attrito di seconda specie, e più della gravità relativa.

Questo modo di dar movimento alle vetture si usa nelle locomotive a vapore, le quali ricevono la forza che fa girare la sala delle ruote fisse dalla elasticità del vapore. Torneremo a suo luogo a parlare di tali locomotive, e qui solo accenneremo che per esse quando si muovono sù rotaje di ferro, diminuisce più l'attrito di seconda specie per la durezza ed unitezza del piano, che quello di prima, e la differenza fra i due attriti diviene maggiore di quanto abbiamo calcolato di sopra. Tutti i vagoni che sono attaccati alla locomotiva movendosi danno degli attriti che devono sommarsi con quello delle ruote appartenenti alla locomotiva, e sempre questa somma ha da essere minore dell'attrito di prima specie delle due ruote fisse alla sala della locomotiva. La differenza servirà a determinare l'inclinazione del piano o strada che può rimontare la macchina, e la prima somma la tensione che deve avere il vapore. Ben si comprende dover esser grande il peso della locomotiva, perchè quella sola porzione che gravita sulle ruote motrici produce l'attrito, e la cagion del movimento. Suole una locomotiva pesare 8. mila kil., ed essendo a sei ruote, solo il terzo di questo peso produce nelle ruote motrici un'attrito di prima specie o adesione più che conveniente, a trascinare tutto il treno. È dunque superfluo il gran peso della locomotiva e del *tender* per produrre il movimento nel treno; e dover condurre a spasso 14 ovvero 18mila kilogrammi solo per dar punto d'appoggio alla macchina mostra viziosissimo il principio.

90. *Resistenza incontrata dalle vetture nelle strade*. — Il Dupuit e il Morin han fatte moltissime esperienze sovra strade di diversa costruzione ed han ritrovato che la resistenza al moto della vettura, misurata nella direzione del mozzo delle ruote, e parallelamente alla strada resulta

I. Sensibilmente proporzionale alla pressione, in modo che sulle strade lastricate ed a massicciata può rilevarsi il rapporto della resistenza incontrata dal cerchio della ruota alla pressione dalla seguente tavola.

II. Secondo Morin inversamente proporzionale al raggio delle ruote, e secondo Dupuit in ragione inversa della radice quadrata del diametro della ruota.

III. Indipendente dal numero delle ruote secondo il Morin; e così anche secondo Dupuit, meno che sulle superfici molli ed unite, diminuendo in queste al crescer delle ruote.

IV. Indipendente dalla larghezza del cerchio delle ruote, meno che nei terreni compressibili sui quali la resistenza decresce quando la larghezza del cerchio della ruota aumenta.

V. Su terreni compressibili la resistenza è indipendente dalla velocità; e su quelli uniformemente scabri sulle strade lastricate e sulle massicciate per le vetture non sospese aumenta la resistenza colla velocità. L'aumento è alquanto minore per le vetture ben sospese.

VI. Sovra un buon lastrico la resistenza al passo non è che i tre quarti di quella che presentano le migliori strade massicciate. Per le

vetture ben sospese la resistenza al trotto è la stessa sul lastrico che sulla massicciata in buono stato. Ma sovra un lastricó mediocremente mantenuto, mal piano, e a giunte rade la resistenza al trottò anche per le vetture sospese è maggiore di quella che si ha nelle buone strade a massicciata.

TAVOLA
DELLA RESISTENZA INCONTRATA
dalle vetture.

Esperienze di Dupuit per la resistenza del solo cerchio delle ruote.

Carretta con ruote del diametro 1^{m},82 e cerchi della larghezza 0^{m},05 in strada massicciata al passo e al trotto 0,032
» in strada lastricata al passo 0,0201
» al trotto 0,028
Carrettone con rote del diam. 1^{m},85 e cerchi della largh. 0,75 in strada massicciata al al passo e al trotto........ 0,031
» in strada lastricata al passo 0,0205
Carrettone con rote del diam. 1^{m},89 e cerc. della larg. 0^{m},11 in strada massicciata al passo e al trotto............. 0,030
» in strada lastricata al passo. 0,0176
Carrettone con rote del diam. 1^{m},90 e cerchi della larg. 0^{m},14 in strada massicciata al passo e al trotto........... 0,030
» in strada lastricata al passo 0,0166
Legno da vettura con ruote del diam. 1^{m},96, e cerchio di larg. 0^{m},17 in strada massicciata al passo e al trotto........ 0,029
» in strada lastricata al passo 0,0177
Calesse con ruote del diam. 1^{m},48 e cerchi della larg. 0^{m}05, in strada massicciata al passo e al trotto.......... 0,036
» in strada lastricata al passo 0,0240
» al trotto 0,034
Carro a banco con ruote dei diametri 1^{m},50. 0^{m},86, e cerchi della larghezza 0^{m},05 in strada massicciata al passo e al trotto............... 0,036
» in strada lastricata al passo. 0,030
» al trotto. 0,037
Gran diligenza con ruote dei diam. 1^{m},50. 0^{m},95, e cerchi della larg. 0^{m},13 in strada massicciata al passo e al trotto....................... 0,029
» in strada lastricata al passo 0,0160
» al trotto 0,020

Esperienze di Morin per le resistenze cumulate dell' asse e del cerchio delle ruote nelle diligenze da viaggio e nelle carrozze sospese con ruote di 1^{m},15 che vanno al

	passo	*trotto*	*gran trot.°*
Sovra strada massic.			
in buono stato . .	0,021	0,025	0,026
» con sassi scoperti	0,024	0,040	0,045
» con rotaje affond.	0,073	0,080	0,085
» in cattivo stato. .	0,082	0,095	——
Sovra lastrico in b.° stato.........	0,016	0,024	0,027
» in stato ordin.°	0,017	0,027	0,028
Sul tavol.° dei ponti	0,024	0,024	——
Sulla terra serrata coperta di ghiaja .	0,012	0,012	——
» coperta di sabbia e ghiaja......	0,013	0,013	——

91. *Del deperimento che le vetture arrecano alle strade.* — Dovrebbe esser cura dei Governi raccogliere nelle leggi tutte quelle condizioni che dagli scienziati si considerano interessanti circa la forma della vettura per il miglior mantenimento delle strade, poichè enormi spese si fanno per tale ogget-

to, e molte volte non servono a riparare i danni che vi arrecano le ruote delle vetture. Onde con molto sacrifizio dell' industria il piano stradale si riduce in cattivo stato, e potrebbe ciò evitarsi col determinare le costruzioni delle diverse vetture. Viceversa lo studio degli scienziati dovrebbe dai regolamenti di polizia sociale far bandire quegli errori che radicati dalla loro longevità si ritengono sù questo particolare come dommi incontrastabili. Secondo i resultati ottenuti da Morin e da Dupuit

I. La legge della proporzionalità de' carichi colla larghezza dei cerchi (ammessa in ipotesi una repartizione uniforme della pressione sù tutta la larghezza del cerchione) introdotta come base fondamentale per il giudizio sulla conservazione della strada, non è esatta. Con i carichi determinati secondo questa regola le vetture a cerchi larghi rovinan le strade più che quelle a cerchi stretti.

II. A carichi eguali le ruote a cerchi stretti di 0^m,06 producono sulle strade a massicciata dei guasti più rilevanti che quelle a cerchio della larghezza 0^m,115 e 0^m,175. Tra i guasti prodotti dalle ruote di queste due ultime dimensioni vi è pochissima differenza. Non vi è dunque vantaggio per la conservazione delle strade ad esigere cerchioni più larghi di 0^m,12 sulle strade a massicciata, ed a più forte ragione in quelle a lastrico.

III. I grandi barrocci da carico con larghi cerchioni sogliono anche esser molto pesanti, quindi il loro peso è un' aggiunta che non frutta nulla al commercio, che produce deperimento nelle strade, e che rimane eccedente, ed a puro danno quando il carico non è completo.

IV. A voler che l' aumento nella larghezza del cerchione potesse compensare il maggior carico, converrebbe che portasse in tutti i punti. All' incontro il cerchione non tocca mai in tutta la sua estensione e ben presto si riduce a superficie curva anche nel senso della sua larghezza. Onde è stato pensato che sia del tutto inutile far la larghezza del cerchione maggiore di 0^m,114.

V. Quando si può aumentare il carico coll' accrescere la larghezza si finisce col sorpassare la resistenza *maximum* de' materiali che compongono le strade. Cosa importa che il cerchione sia largo quando incontra un sasso isolato, se il carico della vettura sarà bastante a stritolarlo? Converrebbe adunque porre un limite *maximum* al carico, anzichè permettere senza limite gli aumenti di carico con corrispondenti allargamenti di cerchione.

VI. I cerchi troppo stretti dopo che sono usati rendendosi di superficie trasversalmente curva si riducono quasi taglienti, ed allora danneggiano moltissimo la strada. Converrebbe adunque che fosse pur determinato il limite *minimum* nella larghezza del cerchio.

VII. A carichi eguali, ed a larghezza di cerchioni eguale, le vetture a grandi ruote guastano meno di quelle a ruote piccole.

VIII. La repartizione de' carichi sù due o più treni, producendo quella della pressione sul suolo, contribuisce a diminuire i guasti.

IX. Il trasporto di un peso dato con vetture attaccate, che si avanzano in convoio, con larghezza di cerchi 0^m,06 produce minor guasto che se fosse ottenuto con carrettoni e cariaggi a larghi cerchioni, carichi come richiederebbe la proporzione tra i pesi e la larghezza dei cerchi.

X. Le vetture sospese che fanno al trotto da 12000^m a 13000^m per ora guastan meno le strade che le vetture non sospese messe al passo.

XI. Le spese di mantenimento di di una strada ferrata son presso a poco in proporzione della celerità del trasporto sù quella data linea. Scemano quando si usano vagoni portati sopra molle. Le spese per la strada di Darlington, ove i vagoni non sono sospesi sù molle, il trasporto accade lento, di sole mercanzie, e con le cure soltanto che a queste posson convenire, ammontano a circa 9. centesimi di lira fiorentina per il trasporto di 1000^k per 1600^m. Sulla strada da Liverpool a Manchester ove si usano vagoni con molle, il lavoro si fa con cura, e ordinariamente per condurre persone, la spesa ammonta per il medesimo trasporto a 19. centesimi di lira circa.

XII. Le riparazioni occorrenti alle strade ferrate consistono in pezzi di supporto, cuscinetti, biette, e chiodi. Le rotaje (*rails*) di ferro si rompono raramente, ed anche il loro consumo è un effetto minimo. Una rotaja di 15 piedi sulla linea di Liverpool pesava il 10 Maggio 1831 lib. 177 e 10 once; la medesima il 10 Febbrajo 1833 si ritrovò pesare 176 lib. e 8 once; e il carico passato su quella poteva valutarsi tonnellate 600000 (kil. 609389).

91. *Attrito de' vagoni sulle strade rotaje.* — I vagoni che si usano sulle strade rotaje hanno ruote di $0^m,914$ che girano su cuscinetti d'ottone con assi di $0^m,044$ in ferro fuso bene ingrassati continuamente, carichi pesano da 5 a 6 tonnellate, che sono in circa altrettante migliaia di kilogrammi; e molti di questi uniti formano il treno che ha da esser trasportato colla forza del vapore quando si ha la locomotiva, o dalla pressione atmosferica nelle strade a sistema atmosferico. Convien che la forza motrice qualunque si sia vinca la resistenza che incontra al moto il treno, la qual proviene non solo dal peso de' vagoni, ma ancora dallo stato delle strade rotaje, e dalla costruzione più o meno studiata dei vagoni istessi. Sono state fatte da Pambour esperienze sulla resistenza incontrata dai vagoni al moto in due diversi modi, o coll' uso de' dinamometri, o coll' osservare la velocità che acquistano nella caduta per i piani inclinati. Il dinamometro ad un certo punto del treno serviva di comunicazione tra un vagone e l'altro mentre il treno percorreva un tratto perfettamente orizzontale colla velocità di 5 a 6 mila metri l'ora, oscillava l'indice dello strumento dal 5 al 17, e la media in queste grandi oscillazioni dava $3^k,49$ per $1016,^k$ cioè per una tonnellata. Dall'altro metodo sperimentato sovra 131 vettura con gli opportuni calcoli detraendo la resistenza dell'aria potè rilevare per ogni tonnellata la resistenza di $1^k,69$ ovvero $^1/_{575}$ del peso della vettura. Di questo resultato pensa Pambour che si debba far conto ne'calcoli, valutando poi la resistenza dell'aria giusta la determinazione dedotta dalle esperienze le più recenti ed esatte, e tenendo a calculo la lunghezza del prisma formato dal treno in moto, non che degli effetti dell'aria contro la rotazione delle ruote, e contro i pezzi accessori dei vagoni. Lo che egli dice corrispondere a 3^k circa per tonnellata quando si voglia solo valutare la resistenza dell'aria contro il vagone di più gran sezione. Queste regole generali non saranno applicabili a tutti i casi particolari perchè bastano

anche piccole variazioni nella costruzione de' vagoni, nel modo d'ingrassare gli assi, o nei guasti che può aver sofferto la macchina, o la strada dall'uso per portare, una notabil diversità di resistenza.

Che se la strada rotaja presenta una curva, molte cagioni di resistenza si aggiungono al movimento del treno. Essendo due a due le ruote fissate ad una medesima sala, la differenza di lunghezza tra le due rotaje costringe la ruota esterna a percorrere un cammino più lungo, ed a strisciare perciò in ogni istante sulla rotaja. A questo strisciamento in ragione della lunghezza delle rotaje se ne aggiunge un'altro che producesi nel senso della larghezza perchè le ruote devono in ogni istante abbandonare la linea tangenziale per la quale tendono ad andare. Lo che fa appoggiare il ribordo della ruota nella rotaja, e perciò si genera nuova resistenza. Il Poussin giudica che questo eccesso di resistenza sovra le rotaje che han per raggio di curvatura 122^m percorse con una velocità moderata, possa essere metà più di quella che s'incontra nel percorrere la linea retta.

Possono esservi ancora assai altre cause capaci di aumentare la resistenza al moto del treno, e le principali tra queste saranno: la resistenza che oppone il vento di contro o in traverso: il difetto di parallelismo nelle ruote de' vagoni; il non esser con precisione normali gli assi delle ruote alle rotaje; l'ineguaglianza del diametro delle ruote: il non esser la sala precisamente perpendicolare al piano della ruota: il non esser ben centrata la ruota: un cattivo accoppiamento di vagoni che porti la linea del tiro fuori del lor centro di gravità: le scosse prodotte dalle congiunzioni delle diverse rotaje; l'ondulazione che prende il convojo. Una strada di ferro vuol'esser considerata come una macchina di precisione, che non ammette alcuna grossolana fattura senza notabil diminuzione dei vantaggi che le son propri, e senza porre a pericolo di gravi accidenti. A misura che si progredirà nell'arte di ovviare il *maximum* di queste resistenze, grandiose scoperte sono da attendersi sulla locomozione itineraria.

Della rigidezza delle funi.

93. *In qual caso ha luogo la rigidezza delle funi.* — Per quanto sieno facilmente flessibili le corde di canapa che hanno un piccol diametro, allorquando se ne costruiscono di diametro grande si rende subito sensibile la lor resistenza alla flessione: fatta passare una di tali corde o canapi sul cilindro di un verricello o sulla gola di una carrucola, non si adatterà precisamente alla superficie, e particolarmente in quel punto ove abbandona la curva della macchina invece di distendersi in linea retta tangente si disporrà in una curva più o meno sensibile, che fa conoscere la rigidezza del canapo. Poniamo che una carrucola fissa deva servire a sollevare un peso, e che non abbia resistenze per l'attrito, e l'unica resistenza nociva sia la rigidezza di quella fune, la quale legato il peso passa sulla gola della carrucola e si ripiega all'altro lato per giungere alla mano dell'operaio, che tirando la fune vuole sollevare il peso (Tav. III fig. 15). Se la rigidezza della fune non esistesse questa rimarrebbe con i suoi tratti rettilinei tangenti per una parte e per l'altra alla circonferenza della carrucola, onde tan-

to il peso quanto lo sforzo dell'operaio avrebbero per braccio di leva il raggio della carrucola. Esistendo la rigidezza mentre l'operaio solleva il peso la fune deve piegarsi per la parte del peso ed è già piegata quando passa alla parte ove è l'individuo: quindi dalla prima parte non rimane in linea retta, e dalla seconda il tratto è rettilineo e tangente: i bracci di leva sono diseguali dai due lati, e minore rimanendo dalla parte dell'operaio, questi per sollevare il peso ha da fare uno sforzo che supera il peso stesso. Ho supposto che non esistessero altre resistenze, tranne la rigidezza, per far meglio comprendere il suo effetto; ma si comprende facilmente anche quando esista l'attrito perchè lo sforzo che occorre per sollevare il peso non solo è sempre maggiore del peso, ma la differenza cresce a misura che si usano corde di diametro maggiore, o per loro costruzione più rigide. Vedremo meglio in seguito come la rigidezza de' canapi possa dar danno nell'uso delle macchine, e come renda difficile, e talvolta impossibile l'uso delle funi quando si ha bisogno di gran flessibilità.

94. *Modo di sperimentare sulla rigidezza delle funi*. — Il celebre Coulomb sperimentò in due modi la rigidezza dei canapi e ne ebbe resultati in tutti concordi. Il primo metodo è quello ingegnoso d'Amontons. Un trave AA′ sostiene 1.° il grande piatto PP′ per mezzo della corda CC′ che a destra ed a sinistra fa un giro intorno al cilindro mobile BB′; 2.° il piccolo piatto q per mezzo della sottil cordicella EE′ che si attacca alla superfice del cilindro BB′ avvolta in senso contrario a CC′. Onde non complicare gli effetti conviene aver cura che i giri delle corde non si tocchino. Il cilindro BB′ tende a discendere per l'azione 1.° del suo proprio peso con un braccio di leva uguale al raggio del cilindro; 2.° del peso del piattello q, con un braccio di leva uguale al diametro del cilindro. Si può dunque aggiungere la metà del peso del cilindro al peso del carico q per avere una forza unica che agisca ad una distanza eguale al diametro del cilindro. Se il peso del cilindro fosse troppo grande se ne diminuirebbe l'effetto con un contrappeso p all'estremità della corda sottile EE′. passata sovra una carrucola fissa r. Ciascuna unità del peso p farebbe equilibrio a due unità del peso del cilindro. Prima di sperimentare la corda CC′ di cui vuolsi conoscere la rigidezza si stirerà onde porla presso a poco in uno strato simile a quello delle corde che servono abitualmente all'uso delle macchine. Per tale oggetto si passa la corda CC′ sovra una carrucola; si attacca un peso sufficente all'una delle estremità della corda; ed alcuni uomini tirando l'altra estremità fanno salire e discendere il peso rendendo la corda un poco dirotta per evitare le irregolarità che si riscontrano sempre nella rigidezza delle corde nuove, e che perciò non permettono di ottenere resultati generali sodisfacenti. Prese queste precauzioni si osserva qual deve essere il peso q per cominciare a far discendere il cilindro BB′ e per conseguenza per vincere la resistenza della corda CC′, e il doppio di questo peso è la misura della rigidezza. Dico il doppio perchè il peso q ha nella sua azione per braccio di leva il diametro del cilindro, mentre la rigidezza ha per braccio di leva il raggio, e converrà raddoppiare q per por la potenza nelle stesse condizioni della resistenza.

L'altro metodo consiste nell' uso del seguente apparato: due sostegni T,T, reggono due regoli (Tav. III fig. 6) di querce posti per taglio col lato superiore bene orizzontale e ben liscio. Tra questi due regoli vi è una apertura longitudinale. Si posano successivamente diversi cilindri sovra le due righe di querce in modo che l'asse dei cilindri si trovi perpendicolare alla direzione delle righe, le quali hanno i loro spigoli attondati. Sul cilindro si passa la fune di cui si vuol conoscere la rigidezza, e a' suoi estremi si sospendono de' pesi eguali. Con essi si ottiene la forza determinata che stira o tende la fune. Finalmente con un piccolo contrappeso attaccato alternativamente agli estremi della fune che pendono alle due parti del cilindro si cerca qual sia la forza necessaria par dare a questo cilindro un movimento continuo uniforme, e per vincere 1.° la rigidezza della fune, 2.° l'attrito del cilindro con le righe Quest'ultimo che può esser conosciuto (76) col ripeter l'esperienza con corda flessibilissima, si detrae e rimane la sola rigidezza della fune.

95. *Leggi della rigidezza delle funi.* — La resistenza che nasce dalla rigidezza delle corde si spiega anch' essa colle dottrine dell' elasticità perchè nel piegarsi la corda alcune fibre han da comprimersi ed altre da allungarsi e questi due effetti non si possono ottenere che con uno sforzo proporzionale all' effetto che si produce nella compressione e nell' allungamento. Si faccia variare il peso che stira una corda la rigidezza ad altre circostanze pari si troverà composta di due parti l'una costante e l'altra che cresce proporzionalmente al peso. La quantità costante deve attribuirsi alla natura ed alla fabbrica della corda. Ciascun filo commettitore trovasi teso da una certa forza e conserva il suo grado di tensione quando la corda è formata perchè viene attorto insieme con gli altri e rattenuto dallo sfregamento scambievole (*Int.* 163). Così in una corda che sostiene un peso, ogni filo è stirato non solo in ragion del peso che sostiene ma ancora secondo il grado di torcitura che conserva. Ora le forze necessarie per piegare una corda devono essere proporzionali alle tensioni perchè queste rendono le fibre più serrate e compresse, ed altrettanto fanno più difficili le loro successive compressioni ed allungamenti. Quindi ne resulta che le tensioni nascono da una quantità costante, e più dal peso di cui la corda è caricata. Questa quantità costante, deve variare col grado di tensione e di torcitura che si dà alle corde nel fabbricarle. Quando esse servono da lungo tempo i fili commettitori si rilasciano e la quantità costante che rappresenta la loro tensione primitiva diminuisce. Chiamiamo H la quantità costante è H' il multiplo della forza Q avremo $H+H'Q$ per la formula della rigidezza della fune, dovendo H,H' essere determinati per mezzo dell' esperienza secondo il genere della fune. Variando il raggio della fune o la sua circonferenza varia la rigidezza non già in proporzione del raggio, ma in una proporzione maggiore che si esprimerà con una partenza h del raggio stesso. Anche variando il raggio del cilindro a cui si avvolge la fune, varia la sua rigidezza in ragione inversa; e per conseguenza chiamando d il diametro della fune, D quello del cilindro sarà la rigidezza proporzionale a $\frac{d^h}{D}$

onde la resistenza proveniente dalla rigidezza dalla corda può rappresentarsi colla formula

$$\frac{d^h}{D}\,(H+H'Q).$$

96. *Resultati d' esperienze* — I. Non sembra che la velocità con cui può esser mossa una fune influisca a diminuire la rigidezza anzi l' aumenta di una quantità piccolissima.

II. L' acqua ed il gelo, ed il catrame di cui s' imbeve la fune servono a renderla più rigida, e colle seguenti tavole se ne potrà calcolare l' effetto.

III. La legge indicata (95) di un termine costante ed uno proporzionale alla pressione non si riscontra con esattezza, e mi è sembrato che nelle funi nuove cresca il valore di H' al crescere dei pesi.

IV. Sgravata una corda del peso che aveva sostenuto, essa non riprende subito il primitivo grado di rigidezza; così anche caricata di un peso maggiore non acquista tutta la rigidezza se non dopo un dato tempo, il quale suole estendersi a circa un quarto d' ora.

V. Per le corde di canapa non impeciate, le quali si dicono corde bianche, secche o imbevute d'acqua, in buono stato, i valori di d^hH, d^hH' passando da una corda all'altra sono presso a poco fra loro come i quadrati dei diametri cioè $h = 2$.

VI. Per queste medesime corde assai usate i valori di d^hH, d^hH' sono tra di loro come le radici quadrate dei cubi de' diametri, vale a dire si ha $h\ ^3/_2$.

VII. Che per le corde impeciate la quantità d^hH' è proporzionale al numero de' fili commettitori di cui la corda si compone.

VIII. La rigidezza sta in ragione inversa del diametro del cilindro al quale si avvolge la fune, e perciò fatta l' esperienza si sogliono moltiplicare i termini della rigidezza per la misura del diametro espresso in metri, onde vengan riferiti al diametro di un metro.

Sù queste basi dalle non molte esperienze di Coulomb si son potute calcolare le tavole seguenti, comprendendovi quanto può esser comunemente interessante per la meccanica. Il diametro del cilindro è supposto $= 1^m$.

TAVOLA
DELLA RIGIDEZZA DELLE CORDE
impeciate.

diametro	*fili commett.*	*valore di* d^hH	*valore di* d^hH'
0^m,0105	6	0^k,021	0^k,002510
0,0129	9	0,041	0,003765
0,0149	12	0,068	0,005020
0,0167	15	0,102	0,006276
0,0183	18	0,132	0,007530
0,0189	21	0,184	0,008785
0,0211	24	0,236	0,010031
0,0224	27	0,294	0,011288
0,0236	30	0,357	0,012551
0,0247	33	0,426	0,013706
0,0258	36	0,504	0,014961
0,0268	39	0,585	0,016216
0,0279	42	0,617	0,017471
0,0289	45	0,770	0,018726
0,0298	48	1,873	0,019981
0,0307	51	1,035	0,021236
0,0316	54	1,150	0,022491
0,0326	57	1,275	0,023746
0,0332	60	1,404	0,025103

TAVOLA

DELLA RIGIDEZ. NELLE CORDE BIANCHE *e in buono stato.*

diametro	valore di d^bH per le corde secche	bagnate	valore di d^bH' tanto per le secche che per le bagn.
met.	kil.	kil.	kil.
0,008	0,035530	0,071060	———
0,010	0,055615	0,111230	0,002455
0,012	0,080086	0,160172	0,003506
0,014	0,109005	0,218010	0,004772
0,016	0,139374	0,278748	0,006283
0,018	0,178191	0,356382	0,007888
0,020	0,222460	0,444920	0,009788
0,022	0,269177	0,518354	0,011844
0,024	0,320542	0,640683	0,014023
0,026	0,375957	0,751914	0,016542
0,028	0,436022	0,972044	0,019185
0,030	0,499535	0,699070	0,022023
0,035	0,679867	1,359734	0,029973
0 040	0,889840	1,779680	0,039053
0,045	1,001070	2,002440	0,043822
0.050	1,390375	2,780750	0,050637
0,055	1,681798	3,353596	0,073624
0,060	1,908140	3,996280	0,088092
0.070	2,719468	5,438036	0,119893
0,080	3,559360	7,118720	0,155811

TAVOLA

DELLA RIGIDEZ. NELLE CORDE BIANCHE *ed assai usate.*

diametro	volore di d^bH per le corde secche	bagnate	valore di d^bH' tanto per le secche che per le bagn.
met.	kil.	kil.	kil.
0,008	0,040525	0,079620	———
0,010	0,055615	0,111230	0,002455
0,012	0,073134	0,146268	0,003209
0,014	0,092154	0,184308	0,004034
0,016	0,125648	0,251296	0.004928
0,018	0,134310	0,268620	0,005880
0,020	0,157279	0,314558	0,006885
0,022	0,181500	0,363000	0,007945
0,024	0,206322	0,413644	0,009054
0,026	0,233087	0,466174	0,010236
0,028	0,270611	0,541222	0,011408
0,030	0,288924	0,577842	0,012642
0,035	0,365485	0,730970	0,015929
0,040	0,444785	0,889570	0,019471
0,045	0,331628	1,063256	0,023229
0,050	0,625365	1,250730	0,028201
0,055	0,716993	1,433986	0,031387
0,060	0,817069	1,634138	0,035768
0,070	0,928788	1,857576	0,045036
0,080	1,357852	2,515704	0,055063

97. ***Regola per l' uso delle precedenti tavole.*** = Si rileverà dalla tavola il valore delle quantità d^bH, d^bH' corrispondente a corda della stessa natura, di eguale stato, e del diametro il più prossimo a quelle della corda proposta: dipoi si moltiplicherà il peso Q da sollevarsi per d^bH, e sommato questo prodotto con d^bH', si dividerà la somma per il diametro medio del cilindro al quale si avvolge la corda includendovi anche il diametro della corda stessa. Quale è la rigidezza di una corda bianca secca nuova di $0^m,030$ che si avvolge ad un cilindro di $0^m,22$ in diametro sotto una tensione di 1000^k? Dalla tavola per le corde che han diametro di $0^m,030$ avremo

$d^bH = 0^k,4995$, $d^bH' = 0^k,0220$

ed essendo $D = 0,220 + 0,030 = 0^m,250$, la rigidità sarà

$$= \frac{0,4995 + 0,0220 \times 1000}{0^m,250} = 89^k,998$$

98. ***Dei nodi e delle legature.*** — Tanto nei nodi quanto nelle legature che si fanno colle funi si ha da vincere la rigidità della fune, e si scorgono sempre applicazioni delle seguenti regole

I.° Che i giri della fune sieno tutti egualmente tesi e in tanto maggior numero quanto più grande è lo sforzo al quale deve resistere la le-

gatura - Quindi ne vien l' uso delle fasciature a giri serrati uno accanto all' altro e paralleli

II.° Che i tratti non possano scorrere -- Onde si ha cura che nelle legature siano i diversi giri diretti secondo il tragitto più corto perchè venendo smossi non debbano trovar posizione nella quale lenteggino

III.° Che lo scorrere della fune sia impedito da un'attrito che superi la forza dalla quale essa è tesa — Si ottiene ciò facilmente anche con semplici allacciature sul solido legato, perchè nelle funi tese l' attrito non è lo stesso al crescere dei punti freganti, e cresce quasi in proporzione di questi non essendo la pressione di un punto diminuita nella proporzione dell' aumento nei punti freganti

IV.° Lo scorrere di alcuni punti della fune, deve fissar più saldamente gli altri — Tutti i nodi e più particolarmente quelli corsoj son fondati su questo principio: perchè a misura che si serrano crescono le resistenze d'attrito, e di rigidità, e queste cresciute nelle parti serrate impediscono il successivo scorrere della fune.

CAPITOLO V.

Della composizione delle forze, dei momenti di rotazione e del centro di gravità.

99. *Ridurre a numeri le funzioni circolari usate in meccanica.* - Proponendomi in questo capitolo di riportare regole e formule che sono di uso frequentissimo nella meccanica non credo dovere scartare nessuno dei due metodi insegnati dai nostri maestri, e suggerirò di far uso tanto del grafico-geometrico quanto di quello algebrico. Al primo che mi servirà d' introduzione unirò que' ragionamenti fisici che sono la base delle teorie, e circa il secondo non mi darò cura che di rendere intelligibili per la pratica le relative formule. E poichè queste contengono quasi sempre delle funzioni trigonometriche per ridurre il mio libro utile a quelle persone che date alla pratica vogliono applicare ai casi particolari della meccanica le formule che saranno da me riportate senza aver ricorso ad altri libri, credo conveniente cominciare da una tavola di valori numerici de' seni e de' coseni appartenenti ad un quadrante. In questa il raggio è supposto eguale all' unità; e sono notati gli archi soltanto di mezzo in mezzo grado, essendo ciò sufficiente per gli usi pratici; come anche i numeri vi fan doppio giuoco convertendosi il seno nel coseno e viceversa quando l'arco è maggiore di 45° perchè dato l'angolo a abbiamo $sen\ a = cos\ (90° - a)$

$$cos\ a = sen\ (90° - a)$$

Nè sarà senza vantaggio il ricordare che dati i seni e i coseni fino a 90° si han quelli di qualunque angolo essendo $sen\ a = sen\ (180 - a)$

$$cos\ a = -\ cos\ (180 - a)$$

Come dati i *seni* e i *coseni* si hanne le *tangenti* e le *cotangenti*, le *secanti* e le *cosecanti* perchè

$$tang\ a = \frac{sen\ a}{cos\ a} \qquad cot\ a = \frac{cos\ a}{sen\ a}$$

$$sec\ a = \frac{1}{cos\ a} \qquad cosec\ a = \frac{1}{sen\ a}$$

Avendosi il raggio eguale ad uno dovrà pure essere $sen.^2 a + cos.^2 a = 1$

$$sec.^2 a - tang.^2 a = 1$$

$$cosec.^2 a - cot.^2 a = 1$$

TAVOLA DEI SENI E DEI COSENI

archi	*seni*	*coseni*		*archi*	*seni*	*coseni*	
0°	0,000	1,000	90	23	0,391	0,921	67
0 ½	0,009	1,000	89 ½	23 ½	0,399	0,917	66 ½
1	0,017	1,000	89	24	0,407	0,914	66
1 ½	0,026	1,000	88 ½	24 ½	0,415	0,910	65 ½
2	0,035	0,999	88	25	0,423	0,906	65
2 ½	0,044	0,999	87 ½	25 ½	0,431	0,903	64 ½
3	0,052	0,999	87	26	0,438	0,899	64
3 ½	0,061	0,998	86 ½	26 ½	0,446	0,895	63 ½
4	0,070	0,998	86	27	0,454	0,891	63
4 ½	0,078	0,997	85 ½	27 ½	0,462	0,887	62 ½
5	0,087	0,996	85	28	0,469	0,883	62
5 ½	0,096	0,995	84 ½	28 ½	0,477	0,879	61 ½
6	0,105	0,995	84	29	0,485	0,875	61
6 ½	0,113	0,994	83 ½	29 ½	0,492	0,870	60 ½
7	0,122	0,993	83	30	0,500	0,866	60
7 ½	0,131	0,991	82 ½	30 ½	0,508	0,862	59 ½
8	0,139	0,990	82	31	0,515	0,857	59
8 ½	0,148	0,989	81 ½	31 ½	0,523	0,853	58 ½
9	0,156	0,988	81	32	0,530	0,848	58
9 ½	0,165	0,986	80 ½	32 ½	0,537	0,843	57 ½
10	0,174	0,985	80	33	0,545	0,839	57
10 ½	0,182	0,983	79 ½	33 ½	0,552	0,834	56 ½
11	0,191	0,982	79	34	0,559	0,829	56
11 ½	0,199	0,980	78 ½	34 ½	0,566	0,824	55 ½
12	0,208	0,978	78	35	0,574	0,819	55
12 ½	0,216	0,976	77 ½	35 ½	0,581	0,814	54 ½
13	0,225	0,974	77	36	0,588	0,809	54
13 ½	0,233	0,972	76 ½	36 ½	0,595	0,804	53 ½
14	0,242	0,970	76	37	0,602	0,799	53
14 ½	0,250	0,968	75 ½	37 ½	0,609	0,793	52 ½
15	0,259	0,966	75	38	0,616	0,788	52
15 ½	0,267	0,964	74 ½	38 ½	0,623	0,783	51 ½
16	0,276	0,961	74	39	0,629	0,777	51
16 ½	0,284	0,959	73 ½	39 ½	0,636	0,772	50 ½
17	0,292	0,956	73	40	0,643	0,776	50
17 ½	0,301	0,954	72 ½	40 ½	0,649	0,760	49 ½
18	0,309	0,951	72	41	0,656	0,755	49
18 ½	0,317	0.948	71 ½	41 ½	0,663	0,749	48 ½
19	0,326	0,946	71	42	0,669	0,743	48
19 ½	0,334	0,943	70 ½	42 ½	0,676	0,737	47 ½
20	0,342	0,940	70	43	0,682	0,731	47
20 ½	0,350	0,937	69 ½	43 ½	0,688	0,725	46 ½
21	0,358	0,934	69	44	0,695	0,719	46
21 ½	0,367	0,930	68 ½	44 ½	0,701	0,713	45 ½
22	0,375	0,927	68	45	0.707	0,707	45
22 ½	0,383	0,924	67 ½				
	coseni	*seni*	*archi*		*coseni*	*seni*	*archi*

Composizione e risoluzione delle forze.

100. *Composizione e risoluzione di due forze concorrenti, e formule relative.* — Dal punto A (Tav. IV fig. 1) ove supponesi esistere il corpo che è contemporaneamente sollecitato dalle due forze P, P′ concorrenti e omogenee condotte due rette AB, AC respettivamente sulla direzione delle forze e lunghe in proporzione della loro intensità, e compito il parallelogrammo ABDC, la diagonale AD rappresenta in direzione e in intensità la resultante R delle due forze proposte, nel modo stesso che queste sono rappresentate dai due lati concorrenti nel punto A (*Int.* 119). La figura ABDC è chiamata parallelogrammo delle forze, ed anche dicesi ABD triangolo delle forze, perchè la componente P′ che era rappresentata da AC lo può egualmente essere da BD che è lato eguale del parallelogrammo. Quindi date le componenti e la loro direzione si potrà graficamente determinare la resultante col costruire il parallelogrammo, o il triangolo delle forze. Parimente si potrà colla geometria risolvere il quesito inverso: data la resultante determinare le componenti. Se non che il problema sarebbe indeterminato se non fossero assegnati i dati necessari a determinare la costruzione del parallelogrammo o del triangolo. Volendo replicare a questi quesiti col calcolo si useranno le seguenti formule che dipendono dalla dottrina del parallelogrammo

I. Per il caso generale

$$P : P' : R :: sen\,\widehat{P'R} : sen\,\widehat{PR} : sen\,\widehat{PP'}$$

$$R = \sqrt{(P^2 + P'^2 + 2PP'\cos\widehat{PP'})}$$

Esempio. Riceva una palla da un martello un urto tale da farli percorrere 3^m in $1''$, e contemporaneamente da un altro martello un secondo urto che solo li farebbe percorrere 5^m in $1''$, e le direzioni dei due urti facciano fra di loro un'angolo di 42°. Avremo

$$R = \sqrt{(3^2 + 5^2 + 2.\,3.\,5.\,\cos.\,42^\circ)} = \sqrt{56{,}35} = 7{,}5$$

e conseguentemente

$$3 : 5 : 7{,}5 :: sen\,\widehat{P'R} : sen\,\widehat{PR} : sen\,42^\circ$$

cioè

$$sen\,\widehat{P'R} = \frac{3\,sen\,42^\circ}{7{,}5} = 0{,}267;$$

$$sen\,\widehat{PR} = \frac{5\,sen\,42^\circ}{7{,}5} = 0{,}45$$

e $\widehat{P'R} = 15^\circ{,}5$; $\widehat{PR} = 26^\circ{,}5$

vale a dire che la palla per gli urti contemporanei dei due martelli si muoverà con una velocità di $7^m{,}5$ in $1''$, e terrà una direzione deviata per $15^\circ{,}5$ dalla direzione del primo urto, e di $26^\circ{,}5$ deviata da quella del secondo.

II. Se le due forze P, P′ sono eguali avremo $\widehat{PR} = \widehat{P'R}$

$$R = 2P\cos{}^1/_2\,\widehat{PP'}$$

Esempio. Una pietra legata con una corda vien fatta trascinare sul suolo da due uomini, attaccato ciascuno ad un capo della fune, mentre i due tratti di fune fanno angolo eguale. Si domanda quanta è la forza perduta per la divergenza dei due capi mentre il loro angolo ha i valori 10°, 150°? Abbiamo per il primo caso $R = 2P\cos 5^\circ = 1{,}99P$, e per il secondo $R = 2P\cos 75^\circ = 0{,}52P$, e siccome la forza de'due uomini è 2P può dirsi che si perde nel primo caso solo 0,01 della forza di un'uomo, e nel secondo quasi la forza di un uomo e mezzo. Mentre dunque una piccola divergenza dà un danno presso che trascurabile, si ha grandissimo quando la divergenza è molta.

III. Se le due forze P, P′ concorrono ad angolo retto

$$sen\ \widehat{PR} = cos\ \widehat{P'R} = \frac{P'}{R}$$

$$sen\ \widehat{P'R} = cos\ PR = \frac{P}{R}$$

$$R = \sqrt{P^2 + P'^2}$$

Esempio. Una vettura che pesa 2000^k, vien tirata sovra una strada orizzontale massicciata e in cattivo stato con una forza di 165^k. Si domanda quanto è lo sforzo che fa contro gli ostacoli che incontra sul terreno, e in qual direzione vi agisca — Si ha per lo sforzo

$$R = \sqrt{(2000^2 + 165^2)} = 2006,^k7,$$

e per la direzione

$$sen\ \widehat{P'R} = \frac{2000}{2006,7} = 0,996$$

il quale corrisponde ad un' angolo di 85° fatto colla linea orizzontale

IV. Se una forza R vuol risolversi in due P,P′ dati gli angoli $\widehat{PR}$, $\widehat{P'R}$ che han da far le due componenti con la forza proposta avremo

$$P = R\,\frac{sen\ \widehat{P'R}}{sen\ (\widehat{PR} + \widehat{P'R})}$$

$$P' = R\,\frac{sen\ \widehat{PR}}{sen\ (\widehat{PR} + \widehat{P'R})}$$

Esempio. Sovra due travi che agiscono in un piano verticale inclinati l'un contro l'altro, e appoggiati sul suolo, riposa un grave di 3460^k. Uno di essi declina dalla verticale 28°, l'altro per 37.° Si domanda quanto sforzo si fa sù ciascun trave — Abbiamo per il primo

$$P = 3460\,\frac{sen:\ 37^\circ}{sen:\ 65^\circ} = 2299^k$$

e per il secondo

$$P' = 3460\,\frac{sen\ 28^\circ}{sen\ 65^\circ} = 1790^k$$

V. Data una componente P e l'angolo che fa con questa la forza proposta R

$$P' = \sqrt{(R^2 + P^2 - 2PR\ cos\ \widehat{PR})}$$

$$sen\ \widehat{P'R} = \frac{P}{P'}\ sen\ \widehat{PR}$$

Esempio. Nell' esempio precedente si voglia che il primo trave, il quale declina dall' a piombo per 28 sostenga solo 2000^k. Si domanda quanto il secondo dovrà declinare, e quanto dovrà sostenere — Abbiamo per il carico

$$P' = \sqrt{(3460^2 + 2000^2 - 2.\ 3460.\ 2000\ cos\ 28^\circ)} = 1936,^k$$

e per la posizione

$$sen\ \widehat{P'R} = \frac{2000}{1936}\,sen\ 28^\circ = 0,484$$

e perciò declinerà per 29°.

VI. Sia proposto di risolvere una forza R che formi con due assi ortogonali delle x, e delle y gli angoli $\widehat{Rx}$, $\widehat{Ry}$, in due forze P,P′ parallele respettivamente a questi due assi. Avremo

$$P = R\ cos\ \widehat{Rx} = sen\ \widehat{Ry}$$

$$P' = R\ cos\ \widehat{Ry} = R\ sen\ \widehat{Rx}$$

Esempio. Un corpo discende per piano verticale e obliquamente all'orizzonte con velocità di 7^m al 1″. L'inclinazione del moto devia dall' orizzontale per 30° — Si domanda quanto in 1″ sarà il corpo abbassato, e quanto si sarà orizzontalmente allontanato — Siccome preso l'asse delle x orizzontali e quello della y verticale si ha $\widehat{Rx} = 30^\circ$, ottenghiamo $P = 7^m\ cos\ 30^\circ = 6^m,1$; $P' = 7\ sen\ 30^\circ = 3^m,5$.

101. *Composizione e risoluzione di tre forze concorrenti non disposte nel medesimo piano, e formule relative.* — Sieno le tre forze P,P′P″ rappresentate respettivamente dalle rette (Tav. IV fig. 2) AB, AC, AD; si vuol determinare la loro resultante. Fatto il parallelogrammo ABEC per compor le prime due forze, e considerata in lor luogo la resultante che vien rappresentata dalla diagonale AE, si comporrà questa con la terza forza P″, e l'altro parallelogrammo AEFD darà nella sua diagonale AF la resul-

tante R delle tre forze proposte. Ora è facile accorgersi che AF è diagonale del parallelopipedo che ha per tre lati le tre rette che rappresentavano le tre forze P, P′, P″. Agevol cosa è dunque con una costruzione geometrica trovare la resultante quando son date le tre forze componenti, e viceversa trovare le tre componenti di una data forza, purchè il problema sia reso determinato coll'assegnare i dati necessari alla costruzione del parallelepipedo. Che se poi si voglia la soluzione per mezzo del calcolo, eccone le formule

I. Per il caso generale, avvertendo che in queste come nelle precedenti formule si deve prendere il *cos.* col segno negativo quando l'angolo è ottuso

$$R=\sqrt{(P^2+P'^2+P''^2+2PP'\cos\widehat{PP'}+2PP''\cos\widehat{PP''}+2P'P''\cos\widehat{P'P''})}$$

$$\cos\widehat{PR}=\frac{P^2+PP'\cos\widehat{PP'}+PP''\cos\widehat{PP''}}{RP}$$

$$\cos\widehat{P'R}=\frac{P'^2+PP'\cos\widehat{PP'}+P'P''\cos\widehat{P'P''}}{RP'}$$

$$\cos\widehat{P''R}=\frac{P''^2+PP''\cos\widehat{PP''}+P'P''\cos\widehat{PP''}}{RP''}$$

Esempio. Con tre molle d'acciajo fo allo stesso tempo sovra un medesimo globo d'avorio tre differenti pressioni una di 4^k, la seconda di 5^k, la terza di 7^k. Inoltre so che le prime due pressioni han direzioni fra loro inclinate di 40°, la prima colla terza di 30°, e la seconda colla terza di 28° — Qual sarà la pressione resultante, e la sua direzione? — Dalle formule qui riportate otterremo

$$R=\sqrt{(4^2+5^2+7^2+2.4.5.\cos 40^\circ+2.4.7.\cos 30+2.5.7.\cos 28^\circ)}$$
$$=\sqrt{231,346}=15^k,21$$ per la pressione resultante, e per la sua direzione

$\cos\widehat{PR}=0,916$, e $\widehat{PR}=25^\circ,5$

$\cos\widehat{P'R}=0,939 \quad \widehat{P'R}=20^\circ$

$\cos\widehat{P''R}=0,968 \quad \widehat{P''R}=14^\circ,5$

II. Se le tre forze concorrenti sono fra loro respettivamente perpendicolari

$$R=\sqrt{(P^2+P'^2+P''^2)}$$

$$\cos\widehat{PR}=\frac{P}{R},\ \cos\widehat{P'R}=\frac{P'}{R},\ \cos\widehat{P''R}=\frac{P''}{R}$$

Esempio. Ci vien detto che un corpo nel suo moto si avanza in 1″ verso l'alto di 12^m, di 17^m verso la parte anteriore, e di 8^m sulla destra. Qual tragitto percorrerà in 1″, e come la via che tiene sarà inclinata alle tre direzioni notate? Abbiamo

$$R=\sqrt{(12^2+17^2+8^2)}=22,293,$$

$$\text{e } \cos\widehat{PR}=\frac{12}{22,293}=0,538=\cos 57^\circ,5$$

$$\cos\widehat{P'R}=\frac{17}{22,293}=0,762=\cos 40^\circ,5$$

$$\cos\widehat{P''R}=\frac{8}{22,293}=0,350=\cos 69^\circ$$

cioè gli angoli domandati sono 57°,5; 40°,5; 69°; e lo spazio percorso $22^m 293$.

III. Se una forza R, che fa con tre assi ortogonali delle x, delle y e delle z (Tav. IV fig. 3) respettivamente gli angoli $\widehat{Rx}$, $\widehat{Ry}$, $\widehat{Rz}$, vuol risolversi in tre forze X, Y, Z parallele ai tre assi, queste saranno

$$X=R\cos\widehat{Rx}$$
$$Y=R\cos\widehat{Ry}$$
$$Z=R\cos\widehat{Rz}$$

Esempio. L'inversa dell'esempio precedente. Una forza che in 1″ fa percorrere $22^m,293$ con inclinazione rapporto ai tre assi ortogonali di 57°,5; 40°,5; 69°, darà per sue componenti parallele ai tre assi

$$X=22^m,293\times\cos 57^\circ,5=12^m$$
$$Y=22^m,293\times\cos 40^\circ,5=17^m$$
$$Z=22^m,293\times\cos 69^\circ.=8^m$$

IV. Dato un sistema di tre forze X, Y, Z parallele respettivamente a tre assi ortogonali delle x, delle y e delle z si voglia ridurre ad un'altro sistema di tre forze X′, Y′, Z′, parallele ad un'altro sistema di assi ortogonali che diremo delle x', delle y', e delle z', si avrà

$X' = X \cos \widehat{xx'} + Y \cos \widehat{yx'} + Z \cos \widehat{zx'}$
$Y' = X \cos \widehat{xy'} + Y \cos \widehat{yy'} + Z \cos \widehat{zy'}$
$Z' = X \cos \widehat{xz'} + Y \cos \widehat{yz'} + Z \cos \widehat{zz'}$

Esempio. Avendosi le tre forze dell' esempio precedente che producono i movimenti in 1″ di 12^m, 17^m, 8^m, e sono parallele ai tre assi ortogonali delle x, delle y, e delle z. Si voglia sapere quali movimenti produrranno rapporto ad un' altro sistema di assi ortogonali che chiamiamo delle x', y', z', essendo l' asse dell' x' parallelo a quello delle x, l' altro dell' y' inclinato di 60° da quello dell' y, e di 150 da quello delle z, e per conseguenza l' ultimo delle z' parimente di 60° inclinato da quello delle z e di 30° da quello delle y — Applicando le formule precedenti si otterrà

$X' = 12^m. \cos 0 + 17^m \cos 90° + 8^m \cos 90° = 12^m$;
$Y' = 12^m. \cos 90° + 17^m \cos 60° + 8^m \cos 150° = 1^m,572$;
$Z' = 12^m. \cos 90° + 17^m \cos 30° + 8^m \cos 60° = 18^m,722$.

102. *Composizione e risoluzione di più forze concorrenti, e formule relative.* — Date più forze P, P′, P″ P‴ ... (Tav. IV fig. 4) concorrenti con la dottrina del parallelogrammo delle forze riman facile trovare la loro resultante. Infatti composte fra loro le prime due forze P, P′ e trovata per mezzo del parallelogrammo ABFC la resultante X; si comporrà questa colla terza P″, e il parallelogrammo AFGD assegnerà la resultante Y; quindi composta nello stesso modo questa colla quarta P‴ darà il parallelogrammo AGHE la resultante R di tutte e quattro le forze. Che se fossero state più che quattro, egualmente si sarebbe proseguito fino all'ultima. È da notarsi che senza costruire i precedenti parallelogrammi si sarebbe trovata egualmente la retta AH che rappresenta la resultante R col disegnare un poligono ABFGH i cui lati sien retti eguali e paralleli a quelle linee che rappresentano le forze proposte; e il lato che chiude il poligono rappresenta allora la resultante. Nè preme che la direzione di tutte le forze concorra in un medesimo punto, purchè facendo la composizione di esse a due a due si abbia la concorrenza.

Una forza potrà esser risoluta in più altre, per esempio in quattro, e si potrà trovare un' infinito numero di combinazioni che sodisfanno al quesito, perchè una medesima retta può rappresentare la diagonale di un infinito numero di parallelogrammi. Il problema può però rendersi determinato; e lo sarà quando sieno date tutte le condizioni necessarie a costruire il poligono delle forze, che si è sopra rammentato.

Si abbia un sistema di più forze P, P′, P″, P‴ ... conosciute in intensità e in posizione relativamente a tre assi ortogonali delle x delle y e delle z per gli angoli $\widehat{Px}$, $\widehat{Py}$.. $\widehat{P'x}$ ... ec. che formano cogli assi stessi, e si voglia ridurre ad un sistema di tre forze X, Y, Z respettivamente parallele ai tre assi. Avremo

$X = P \cos \widehat{Px} + P' \cos \widehat{P'x} + P'' \cos \widehat{P''x} + P''' \cos \widehat{P'''x} + ..$
$Y = P \cos \widehat{Py} + P' \cos P'y + P'' \cos P''y + P''' \cos \widehat{P'''y} + ...$
$Z = P \cos \widehat{Pz} + P' \cos \widehat{P'z} + P'' \cos \widehat{P''z} + P''' \cos P'''z + ...$

Queste formule valgono anche pel caso che le forze proposte non sieno correnti, ed abbiano qual si voglia direzione.

Esempio. Si abbiano due forze del valore di 1080,^{k}, e 2340^k le quali fanno colla direzione verticale ove prendo l'asse delle x gli angoli 17°, 29°, e con una volta sul piano orizzon-

tale da oriente a ponente ove prendo l'asse delle y gli angoli 49°.48°, e con un'altra retta, la quale rappresenta il terzo asse delle z gli angoli 70°, 8°. Volendole risolute in tre parallele ai tre assi avremo

$$X = 1080 \cos 17° + 2340. \cos. 29° = 2219^k,58$$

$$Y = 1080. \cos 49° + 2340. \cos 58° = 1358^k,28$$

$$Z = 1080 \cos 70° + 2340. \cos 8° = 2685,96$$

103. *Composizione e risoluzione di due forze parallele, e formule relative.* — La resultante di due forze parallele che hanno la medesima direzione è eguale alla loro somma, è parallela e volta nel medesimo senso delle componenti, ed il suo punto d'applicazione è intermedio ai punti d'applicazione delle componenti, e distante dai medesimi in ragion reciproca della loro intensità. Quando le due forze parallele proposte han direzione opposta, la resultante è eguale alla loro differenza, rimane volta nel senso della componente maggiore, e il suo punto d'applicazione è sul lato di questa forza, distante dai punti d'applicazione delle componenti in ragion reciproca della loro intensità (*Int.* 101). Chiamate pertanto P, P′ le due componenti, ed R la resultante; a la distanza dei lor punti d'applicazione; p, p' le distanze del punto d'applicazione della resultante da quelli ove sono respettivamente applicate le forze P, P′ si avrà

I. Nel caso delle componenti volte pel medesimo senso

$$R = P + P'$$
$$a = p + p'$$
$$p : p' :: P' : P$$

II. E per il caso che abbiano le componenti direzioni opposte e sia $P > P'$

$$R = P - P'$$
$$a = p' - p$$
$$p : p' :: P' : P$$

III. Che se vorrà decomporsi la forza R in due P, P′ si avrà un infinito numero di soluzioni, ammenochè non si determinino altre condizioni: per es.° sia dato anche il valore della componente P e la sua distanza p. Allora o sarà $P < R$ ovvero $P > R$. Nel primo caso ricadendo nelle formule del (I) si avrà

$$P' = R - P$$
$$p' = \frac{P}{P'} p$$

IV. Nel secondo caso ricorrendo le formule (II) avremo

$$P' = P - R$$
$$p' = \frac{P}{P'} p$$

V. Sien dati i soli punti d'applicazione delle due componenti e la resultante R. Comprendono fra di loro quello della resultante? avremo (I)

$$P = \frac{p'}{p + p'} R$$
$$P' = \frac{p}{p + p'} R$$

VI. Rimangono ambedue i punti d'applicazione sovra uno stesso lato di quello appartenente alla resultante? avremo (II)

$$P = \frac{p'}{p' - p} R$$
$$P' = \frac{p}{p' - p} R$$

Nello stesso modo che dalle formule (I) (II) ho dedotto quelle convenienti ai casi contemplati, potranno pur dedursi quelle che ad altri converranno. Ho già altrove (*Int.* 126) dati esempj d'applicazione di queste dottrine, e siccome sono semplicissime parmi inutile maggiormente sù quelli estendermi.

104. *Composizione, centro, e risoluzione di più forze parallele.*

Formule relative. — Come si è detto di due forze parallele così si agirà per comporre le due prime fra le più forze proposte, ed egualmente la resultante di quelle si comporrà con la terza forza, e se ne otterrà una resultante che appartiene a tutte e tre le forze, ed in tal modo seguitando potrà aversi la resultante finale delle forze proposte. Sieno tre le forze P, P′, P″, volte nel medesimo senso (Tav. IV fig. 5), uniti fra loro i punti A, B d'applicazione delle prime due si dividerà nel punto C la distanza AB in due parti CA, CB reciprocamente proporzionali alle forze P, P′, e si intenderà applicata in C una forza = P + P′. Di poi si unirà il punto C col punto D, e si dividerà la retta CD in ragion reciproca dell'intensità delle forze P+P′, P″, ed il punto E di divisione sarà quello d'applicazione della resultante R, la quale è = P+P′+P″.

Ogni sistema di forze parallele nelle quali sia determinato il punto d'applicazione, o che come suol dirsi sia di forma invariabile, ha un punto pel quale passa sempre la resultante delle forze comunque vari la direzione delle forze istesse. A questo punto si dà il nome di centro di forze parallele, ed è chiaro essere il punto d'applicazione della resultante perchè desso non dipende dalla direzione delle componenti, ma solo dai punti d'applicazione di queste e dalle loro intensità.

I. Si determinerà la posizione del centro delle tre o più forze P, P′, P″... o col metodo che abbiamo indicato insegnando a comporre queste tre forze, ovvero riferendo il sistema a tre assi ortogonali, e indicando con x, y, z; x', y', z', x'', y'', z'' ... le coordinate dei punti d'applicazione delle forze componenti (Tav IV fig. 3). Nel qual caso le coordinate del centro delle forze parallele son date dalle formule

$$X = \frac{Px + P'x' + P''x'' + \dots}{P + P' - P'' \dots}$$

$$Y = \frac{Py + P'y' + P''y'' + \dots}{P + P' + P'' \dots}$$

$$Z = \frac{Pz + P'z' + P''z'' + \dots}{P + P' + P' \dots}$$

Esempio. — Si vuol determinare il centro di quattro forze parallele, le intensità delle quali sono 20^k, 40^k, 12^k, 8^k, e i respettivi punti d'applicazione sono determinati dalle respettive coordinate 2^m, 1^m, 0^m, 0^m; -4^m, -2^m, 5^m, 5^m; 5^m, 1^m, 4^m, 1^m, si avrà per il valore delle coordinate che determinano la posizione del centro

$$X = \frac{20.\,2 + 40}{80} = 1^m$$

$$Y = \frac{-80 - 80 + 56 + 40}{80} = -1^m\,{}^1/_{20}$$

$$Z = \frac{100 + 40 + 48 + 8}{80} = 2^m\,{}^9/_{20}$$

II. Le quattro equazioni

$$R = P + P' + P'' + \dots$$

$$RX = Px + P'x' + P''x'' + \dots$$

$$RY = Py + Py' + P''y'' + \dots$$

$$RZ = Pz + P'z' + P''z'' + \dots$$

possono essere usate per la risoluzione di una forza in più forze parallele, quando non si voglia adeprare il metodo inverso a quello accennato al principio di questo §. Conviene però che sieno date tante condizioni che il numero delle incognite non superi quello delle equazioni, altrimenti il problema sarebbe indeterminato. Chi dicesse che un certo numero di componenti devono essere fra loro eguali: quali han da essere i punti d'applicazione di esse componenti: quale è il rapporto fra certe componenti o il valore di alcuna di esse, ec. darebbe con queste condizioni luogo ad altre equazioni, le quali colle precedenti potrebbero completare il nu-

mero conveniente a render determinato il problema.

Esempio — Voglia risolversi una forza di 1600^k in tre parallele applicate a tre punti determinati, si useranno le tre prime equazioni ove le incognite saranno P, P', P''. Venga detto che il punto ove ha da applicarsi la P è distante dall' origine dell'ascisse per $2^m,5$ ed è determinato da un applicata di 3^m. Quelli della P' e della P'' han respettivamente per ascisse $1^m.-3^m$, e per applicate $2^m,8.-7^m$, essendo l'origine delle ascisse al punto ove sta applicata la forza proposta a risolversi. Si avrà

$$1600^m = P + P' + P''$$
$$0 = 2^m,5\,P + P' - 5^m\,P''$$
$$0 = 3^m\,P + 2^m,8\,P - 7^m\,P''$$

d' onde

$$P = 161\,{}^{21}/_{139}\quad P' = 978\,{}^{58}/_{139}\quad P'' = 460\,{}^{60}/_{139}$$

APPLICAZIONI

105. *Considerazioni sulle porzioni delle componenti angolari che vengono elise, e del loro effetto entro ai corpi.* — Nell'applicare le dottrine sulla composizione e decomposizione delle forze, come può dirsi d' indicibil vantaggio al meccanico il poter avere acquistato sul soggetto tal franchezza da conoscere ad un tratto quale è la resultante che ne singoli casi viene a sostituirsi alle componenti, e viceversa quali le componenti che provengono da una sola forza; così deve ritenersi che conduce a gravi errori il perder di vista la differenza che esiste tra l' azione delle componenti e quella della resultante. Posto che il corpo o il sistema de' corpi ove si fanno agire le forze fosse matematicamente invariabile non avrebber luogo le considerazioni che io sono per esporre; ma poichè i corpi sono compressibili ed estendibili, friabili, ed elastici, ed i sistemi han legami di una determinata resistenza, ogni forza che tende a comprimere, espandere, stirare, o rompere produce nell' interno del corpo o del sistema un effetto che nella pratica non può esser trascurato.

Una componente angolare per generare parte della resultante, sempre presenta una porzione di forza che si distrugge da altra eguale ed opposta porzione proveniente da una seconda componente. Ed è sempre da notarsi quanta è l' intensità di queste forze elise, e come il loro effetto tenda a comprimere o stirare il corpo per dedurre se questo potrà resistere alla loro azione, o se verrà ad esserne deformato. Per conoscere sperimentalmente qual porzione delle componenti è distrutta si possono adoprare gli apparati dinamometrici disposti in modo che essi soffrano la compressione o la distensione che si farebbe sul corpo che ha da esser sollecitato dalle forze componenti. Semplicissimo è però il metodo geometrico per mezzo del parallelogramme delle forze. Siano P, P' le due componenti (Tav. IV fig. 6) ed R la resultante, rappresentate respettivamente dalle rette AB, AC, AD. Si decomponga AB in due forze una normale alla resultante R e l' altra nella direzione di essa che rappresento con AE, AF, e parimente si decomponga AC in una forza AE' normale ed in una AF' coincidente alla resultante. Avremo in conferma della dottrina del parallelogr. $AF + AF' = AD$, cioè la somma delle due forze coincidenti eguaglia la resultante, e le due forze opposte che tendono a produrre sul trave una distensione sono eguali $AE = AE'$, e tutto perchè il triangolo ABF è eguale all' altro CDF'. Che se il parallelogr.° avesse avuto ot-

tuso l'angolo formato da una componente e dalla resultante si sarebbe ottenuto (Tav. IV fig. 7) AF — AF′= AD, e AE=AE′ vale a dire non solo le forze provenienti dall'urto dei martelli avrebbero prodotto una compressione nel corpo che è collocato in A coll'intensità dovuta alla porzione di forza elisa AE ma anche sulla direzione della resultante si ha distruzione di forza data da AF′.

I travi, particolarmente quelli che servono da catene, sono sottoposti a forze che tendono a stirarli; i piediritti o pilastri sostenendo degli archi opposti soffrono oltre alla pressione d'alto in basso delle compressioni laterali, nei diversi pezzi delle macchine; ed in un'infinità di casi posson trovar luogo queste considerazioni. Ad apprezzare gli effetti della compressione, e dello stiramento occorreranno i principj e i dati che abbiamo esposti sulla resistenza assoluta de' solidi nel capitolo primo.

106. *Considerazioni sulla differenza che passa fra l'effetto delle componenti parallele, e della loro resultante* — A due o più forze parallele si sostituisce la resultante e viceversa, purchè una verga perfettamente rigida unisca i lor punti d'applicazione, ma se la rigidità sarà imperfetta questa sostituzione non può farsi senza attendere nella figura del corpo, sul quale le forze agiscono, una alterazione diversa da quella che si sarebbe ottenuta se la sostituzione non avesse avuto luogo.

Un trave sia ai due estremi premuto da due forze parallele e volte nel medesimo senso di 1000^k ciascuna, e al mezzo sia sollecitato in direzione opposta e parallela da una forza di 800^k. La resultante di tutte queste forze sarà una di 1200^k diametralmente opposta a quest'ultima, e se si intendesse applicata la resultante e non le componenti non si troverebbe cagion di rottura nel legno, seppur non fosse per essere spinte le particelle del mezzo nell'atto in cui si comunica il moto (*Int.*102) secondo la direzione della resultante. All' incontro considerando l' azione delle componenti, si ha che, come se il trave fosse appoggiato ai due estremi, e premuto nel mezzo dalla terza componente, son spinte le particelle in senso contrario a quello che si diceva poco avanti, e il solido si troncherà se non è capace di una resistenza respettiva maggiore di quella che occorre a sostenere appoggiato agli estremi un carico di 800 kil. al suo mezzo. In tali considerazioni l'uso delle dottrine sulla resistenza respettiva (54 e segg.) servirà a togliere ogni dubbio.

107. *Dei gravi posati sù piani inclinati, ed in generale dei corpi animati da forze che han direzione obliqua ai piani resistenti sù quali questi si appoggiano.* — Siccome si dà il nome di piano inclinato a quello che si eleva con un cert' angolo sul piano orizzontale, quando si posano dei gravi sù piani inclinati, la forza di gravità rimanendo obliqua ad essi in parte tende a produrvi pressione ed in parte a sollecitare lungo i medesimi al moto i gravi che vi sono posati. Per valutare questi due effetti convien risolvere il peso del corpo che noi chiameremo gravità assoluta in due forze una parallela e una normale al piano, e diremo la prima *gravità relativa* e la seconda *pressione*. Sia AB il profilo di un piano inclinato BC la proiezione orizzontale del medesimo, ed AC quella verticale: queste tre rette AB, BC, AC sogliono indicarsi co' nomi lunghezza base e altez-

za del piano. Il corpo M sarà sollecitato dal suo peso che rappresenteremo colla verticale GQ, e fatto il parallelogrammo delle forze GQ′ QQ″ ove GQ′ e GQ″ sono una parallela, è l'altra normale al piano, rileveremo che

1.° Tanto la gravità relativa quanto la pressione saranno forze costanti, perchè in qualunque punto sul piano si trovi il corpo il parallelogrammo verrà ad esser lo stesso e a quelle rimarrà il medesimo valore, chè è in rapporto costante con gli elementi del piano inclinato.

2.° Infatti il triangolo GQQ″ simile all'altro BAC dà GQ : QQ″ (=GQ′) : GQ″ :: AB : AC : CB, cioè la gravità assoluta, sta alla relativa, e alla pressione, come la lunghezza del piano sta all'altezza e alla base. Si può aver conferma di questo interessantissimo teorema anche per mezzo dell'esperienza: sovra un piano ben levigato si collocherà un cilindro girevole attorno al suo asse, con una staffa si legherà quest' asse ad una cordicella, e condotta questa in direzione parallela al piano si passerà sovra una puleggia: quindi all'estremo della corda attaccato un piattello, in questo si porranno tanti pesi quanti ne occorreranno affinchè il corpo non rotoli lungo il piano.. Chiamando pertanto g la gravità assoluta e g' quella relativa p la pressione, A l'altezza, B la base del piano inclinato avremo

$$g' = \frac{A}{L} g \qquad p = \frac{B}{L} g$$

Nell'applicare queste dottrine non si deve credere che tutta la gravità relativa possa produr moto nei corpi posati sù piani inclinati giacchè l'attrito ne diminuisce una notabil porzione. Esso si calcola dalla pressione moltiplicata per il coefficente f d'attrito, e per conseguenza la forza che tende a produrre il moto sará

$$\frac{A - fB}{L} g$$

Questa formula ci mostra, che lo stato prossimo al moto, o il punto nel quale la gravità relativa è per vincere l' attrito, si avrà quando $A - fB = 0$, cioè quando

$$f = \frac{A}{B} = tang\, ABC = cot\, BAC$$

onde a ragione si stabiliva (72) dalla tangente dell' angolo d' elevazione del piano sul quale lentamente cade un grave che vi è posato dedursi il valore del coefficente d' attrito tra la materia del corpo e quella del piano; e parimente a ragione l' ampiezza di quell' angolo si dice *angolo limite d' attrito*. Indifferente sará prender l' angolo ABC di elevazione, o l' altro suo complemento BAC di declinazione dalla verticale, purchè invece della tangente prendasi la cotangente.

Che se un' altra forza solleciti il corpo sul piano inclinato (e lo stesso può dirsi quando ne agissero di più) sarà facile scorgere l' effetto contemporaneo di ambedue col decomporre egualmente la seconda in una normale e l' altra parallela al piano; e sempre la normale produrrà un'attrito o resistenza al moto, e la parallela tenderà a produrre il moto nel senso in cui agisce. Supponiamo che la forza seconda sia orizzontale, e si opponga alla discesa del corpo, è chiaro che per questa l' altezza del piano fa da base e viceversa. Onde chiamata F la forza per analogia di quello che sopra abbiam detto rileviamo essere la porzione di forza che agisce

$$\frac{B \mp fA}{L} F$$

Ho usato al secondo termine il dop-

pio segno per considerare tanto il caso che l'attrito si opponga alla salita quanto l'altro che si opponga alla discesa. Per noi converrà il secondo, ed otterremo la tendenza del corpo alla discesa detraendo questa forza da quella ottenuta colla formula precedente, e sarà

$$\frac{A - fB}{L} g - \frac{B + fA}{L} F$$

Dalla quale deducesi che il moto non potrà esistere quando è

$$(A - fB) g = (B + fA) . F$$

ovvero

$$F = \frac{A - fB}{B + fA} g$$

e poichè la base divisa per l'altezza è la tangente dell'angolo della declinazione del piano dalla verticale che dirò m, stabiliremo che ad impedire il moto di discesa occorre che si abbia

$$F = \frac{1 - f \ tang\ m}{tang\ m\ f} g$$

108. *Applicazione alla nautica.* — La navigazione prodotta da un vento laterale ci presenta un caso per applicare le dottrine sulla decomposizione delle forze concorrenti. Sia AB l'asse di una nave, e la retta MN rappresenti la proiezione di una vela appoggiata ad un'albero in O. Rappresentando OR in grandezza e in direzione la forza con cui il vento urta la vela si costruisca il parallelogrammo rettangolo OCRD di cui OR sia la diagonale. La forza OR resta decomposta in due OC, OD, la prima delle quali essendo nella direzione della vela non produce veruno effetto per far progredir la nave, la seconda perpendicolare alla vela è la sola che la gonfia e la spinge insiem coll'albero. Per avere la forza che fa progredire la nave conviene nuovamente decomporre OD in due, una OE nel senso dell'asse di simmetrica della nave, che dà il moto e chiamasi *rotta*, l'altra OF perpendicolare a quest'asse. Questa spinge in traverso, e produce il moto laterale, e chiamasi *deriva*. Il costruttore di navi, e il navigante devono combinare i modelli e le manovre in modo che la forza produca la massima possibil rotta colla minima *deriva*. A modello di nave determinato può domandarsi qual debba essere la posizione della vela perchè si abbia la rotta massima sotto un vento la cui direzione fa un'angolo m colla linea AB di simmetria della nave. Sia n l'angolo incidente del vento sulla vela, e R la forza del vento. Avremo $OD = R\ sen n$, $OE = R\ sen n . sen (m - n)$. Di quest'ultima forza che dà la rotta deve trovarsi il valor massimo, facendo variare l'angolo n, e perciò posta eguale a zero la derivata di quell'espressione si ha

$$sen\ m\ (cos^2 n - sen^2 n) = cos m . 2\ cos n . sen\ n$$

e

$$tang\ m = \frac{2\ cos n\ sen\ n}{cos^2 n - sen^2 n}$$

Adunque quando la direzione del vento è coincidente coll'asse AB potrà avere n i valori 0°, 90°; e quando fa angolo retto coll'asse si dovrà porre $n = 45°$; passerà dunque n per tutti i valori da 0° fino a 90° mentre il vento dall'essere a prua gira fino ad essere in poppa

109. *Pressioni che un carico può produrre su due o più sostegni.* — La dottrina sulla decomposizione di una in più forze parallele determina queste pressioni in tutti que' casi nei quali si conoscono le condizioni occorrenti (104). Assegnati i punti d'applicazione delle due componenti nelle quali si ha da risolvere una forza il problema è determinato; ed anche quando le componenti parallele son tre se non restano sulla medesima retta. Ed in questi ca-

sì per conoscere le pressioni prodotte da un carico in due o tre punti non si ha da fare che la decomposizione delle forze parallele e il valore delle componenti sarà quello delle pressioni cercate. Qui è da notarsi che oltre all'uso delle formule (104), si ha a disposizione anche il metodo grafico, perchè proposto che

I. Una forza applicata in O (Tav. IV fig. 10) si deva decomporre due applicate in A, A′ non si farà che divider la forza in parti inversamente proporzionali alle rette OA, OA′.

II. Parimente proposto che quella forza si abbia a decomporre in tre applicate ai punti A, B, C, si dividerà prima in due inversamente proporzionali ad OA, OA′; e quella parte che è proporzionale ad OA la quale dovrebbe essere applicata al punto A′ si dividerà nuovamente in due forze inversamente proporzionali alle rette A′B, A′C per applicarle ai punti B, C. Ma poichè può dimostrarsi che nelle proporzioni stabilite stanno anche le aree dei triangoli ABC, BOC, AOB, AOC, ne viene che le tre componenti in cui si risolve la forza applicata in O sono proporzionali alle aree dei tre triangoli che si ottengono dall'unire i tre punti d'applicazione delle componenti tra loro, e col punto d'applicazione della resultante. E rappresentando col triangolo intero la resultante ciascuna componente vien rappresentata dal triangolo che rimane di contro al punto ove essa deve essere applicata. La dimostrazione della proporzionalità tra i notati triangoli e le forze può farsi sperimentalmente con foggiare in una piastra di ottone egualmente grossa i quattro triangoli per servirsi di questi come contrappesi che rappresentino le forze: quindi disporre sovra una puleggia un filo (Tav. IV fig. 10) che porti ad una parte un contrappeso u, ed all'altra il triangolo abc eguale a quello ABC della figura 9, ma fatto in legno talmente contrappesato che rimanga co' suoi tre vertici in un piano orizzontale: finalmente attaccare al vertice b il triangolo d'ottone AOC, a quello a l'altro BOC, a quello c il terzo AOB, e sotto al contrappeso u il triangolo totale d'ottone ABC. Fatto ciò si troverà che tutto l'apparato rimane in equilibrio, lo che dimostra la proposizione. Per esercizio degli studiosi aggiungerò anche la dimostrazione matematica. Le regole stabilite sopra per risolvere la resultante R nelle tre componenti P, P′, P″, chiamando X la forza che verrebbe applicata in A′ (fig. 9) danno

$$R : X :: AA' : AO$$
$$X : P' :: BC : A'C$$
$$P : X :: A'O : AO$$
$$X : P'' :: BC : A'B$$

e da queste combinandole due a due si rilevano le altre

$$R : P' :: AA' \times BC : AO \times A'C$$
$$P' : P'' :: AO \times A'C : AO \times A'B$$
$$P : P' : A'O \times BC : AO \times A'C$$

e perciò $R : P : P' : P'' :: AA' \times BC : A'O \times BC : AO \times A'C : AO \times A'B$, e moltiplicando tutti i termini della seconda parte per $\frac{1}{2}$ *sen* BA′C si ha la misura dei triangoli, onde

$$R : P : P' : P'' :: ABC : OBC : OAC : OAB$$

III. Venga proposto di risolvere una data forza R in quattro P, P′, P″, P‴, applicata a quattro punti non situati in uno stesso piano. Stando alle equazioni riferite (104) il problema comparisce determinato; e designando con A, B, C, D (Tav. V fig. 5) i punti assegnati, e con G quello ove sta applicata la resultante, ne resulta di dover dividere la forza data in quattro respettivamente proporzionali alle quattro pirami-

di, che si formerebbero unendo il punto d'applicazione della resultante con quelli delle componenti, e questi fra di loro per modo che designando le piramidi con i punti de loro vertici si avrà

$$R : P : P' : P'' : P''' :: ABCD : GBCD : GACD : GABD : GABC$$

IV. Una tal soluzione potrà trovare applicazione quando si voglia che le componenti producano l'effetto della resultante qualunque sia la direzione delle forze, e perciò anche nel caso che si abbia la considerazione del centro delle forze parallele, cioè possa ciascuna forza girare attorno al suo punto d'applicazione mantenendo fra di loro il parallelismo. Che se come richiede il nostro argomento si tratti di forze o pressioni tutte verticali, e non ammetta il sistema alcuna rotazione il problema potrà dirsi indeterminato perchè il punto d'applicazione di una forza non può mai considerarsi come fuori del piano che contiene i punti d' applicazione dell' altre, essendo indifferente considerare applicata la forza ad un qualunque punto della sua direzione (*Int.* 102), e perciò anche a quello ove la sua direzione incontra il piano ove giacciono i punti d' applicazione dell' altre. Parimente il problema nostro delle pressioni sarebbe indeterminato anche nel caso di tre sole componenti, e di due, se il piano o la linea de' punti d'applicazione coincida col piano o linea verticale ove suppongonsi agire le forze. Eguale indeterminazione si avrebbe se i tre punti delle tre componenti fossero sovra una stessa retta. Come anche indeterminato sarebbe il problema sempre quando non si conoscessero che i punti d'applicazione delle componenti, e il lor numero fosse maggiore di tre. Questa indeterminazione però in natura non sussiste, e mentre si vedono edifizj sorretti da più di tre punti d'appoggio non si può ritenere che indeterminata sia la pressione che que' punti sostengono. Noi non conosciamo le condizioni particolari che determinano le pressioni, pure possiam farcene idea ricordandoci che quando tutti o alcuni punti fossero precisamente in identica situazione la pressione sarebbe in ciascuno eguale: che essendo alcuni punti in identica situazione, se tra quelli ve n' ha uno che non resiste a quel grado di pressione che li toccherebbe per ugual reparto, sarà esso aggravato solo quanto porta la sua resistenza, e la parte eccedente verrà distribuita fra gli altri punti: che alcuni appoggi possono esser meglio calzati ed altri meno, onde quando i primi sono in forza gli altri cominceranno ad agire: che finalmente i punti d' applicazione delle componenti possono aversi come riposati su tante molle, le quali verranno compresse a proporzione del peso sopracaricato, e tutte si porranno in una determinata tensione. Per queste, e per molte altre cagioni il problema si fa poi nei casi particolari sempre determinato, abbenchè non sappiasi *a priori* stabilire la proporzione del reparto del carico.

V. Fra le condizioni atte a rendere il problema determinato può esservi quella che il sistema sia sconnesso, e che tra i punti d'appoggio non si debbano considerare che quelli addetti all'unico sistema fisso. Chi collocasse il carico sovra di un trave AB (Tav. IV fig. 12), e poi facesse portare l'estremità di questo da altri travi, e così seguitando senza connettere solidamente fra loro i travi, onde formino un solo sistema inva-

riabile, la decomposizione del carico sarà estremamente facile perchè dovran considerarsi ad uno alla volta i travi AB, DC, EF, GH, IK, LM, NO, QR, XY, ST, UV, e non si avrà che a risolvere una forza in due (103), e similmente in due una delle trovate componenti, e così seguitare finchè porta la disposizione usata de' pezzi.

110. *Quantità di lavoro di una forza sovra una resistenza che non le è direttamente opposta* — Il punto d'applicazione della potenza P non possa muoversi che nel senso della resistenza la quale faccia un'angolo (Tav. IV fig. 13) CAB colla direzione AB della potenza. Decomporremo questa in due forze P′, P″ rappresentate da AC, AD una in senso opposto alla resistenza e l'altra normale alla medesima. Ora se il corpo venga mosso per un tragitto Aa in un tempo piccolissimo sarà soltanto $P' . Aa$ il lavoro meccanico prodotto dalla potenza P sulla resistenza. E poichè condotta la retta ab perpendicolare ad AC avremo i triangoli Aab, ABC simili ne dedurremo $P' . Aa = P . Ab$. Ora osservo che la componente P′ ovvero AC non è che la proiezione della potenza P cioè AB sulla direzione della resistenza, e concludo che in due modi può esprimersi il lavoro elementare di una forza il cui punto d'applicazione è mosso in direzione differente dalla sua propria: 1.° per il prodotto della componente opposta alla resistenza, o projezione della forza sulla direzione del moto, nel piccol cammino realmente percorso; 2.° per il prodotto della forza nella proiezione del cammino percorso fatta sulla sua direzione.

111. *Relazione tra il lavoro della resultante e quello delle componenti.* — Non vi sarebbe bisogno di dimostrazione per far comprendere che il lavoro della resultante è eguale alla somma dei lavori delle componenti cospiranti meno la somma dei lavori delle componenti che agiscono in opposta direzione, perchè se la resultante non producesse il medesimo lavoro delle componenti sommate non potrebbe essere ad esse sostituita. Contuttociò a far meglio comprendere questo interessante teorema comincio dal parlare delle forze concorrenti. Siano AC, AD (Tav. IV fig. 15) le componenti, AB la resultante, sia la direzione del moto sulla retta Ae, ed Aa il piccolo spazietto percorso in un tempo minimissimo. Proiettando sulla direzione del moto i punti B, C, D si avrà che il lavoro della resultante è $Ab . Aa$, e quello delle componenti $Ac . Aa$, $Ad . Aa$. Ma $Ab = Ac \pm bc$, ove ho messo il doppio segno per comprendere i due casi che le proiezioni delle componenti cospirino o sieno opposte; e $bc = Ce = Ad$: onde fatta questa sostituzione e moltiplicando tutti i termini per lo spazietto Aa, abbiamo $Ab . Aa = Ac . Aa \pm Ad . Aa$.

Se le forze saranno parallele rappresentata la resultante con CR (Tav. IV fig. 14) e le componenti con BQ, AP, e supposto che la direzione del moto sia sulla retta $B'p$, e Cc indichi lo spazietto percorso. Potremo considerare applicate le componenti ai punti B′, A′, e allora rappresentarle colle rette B′Q′, A′P′ eguali alle precedenti BQ, AP. Proiettati i punti Q′, R, P′ sulla direzione del moto avremo per il lavoro della resultante $Rr . Cc$, e per quello delle componenti $Q'q . Cc$, $P'p . Cc$. Ma $CR = B'Q' \pm A'P'$ cioè la somma o la differenza secondo che le componenti son volte nel medesimo senso, o in senso opposto; e i triangoli RCr, $Q'B'q$, $P'A'p$ sono simili onde sarà

anche $Rr = Q'q \pm P'p$. Nella quale equazione moltiplicati tutti i termini per lo spazietto Cc si ottiene la rammentata relazione tra il lavoro della resultante e quello delle componenti, cioè $Rr \cdot Cc = Q'q \cdot Cc + P'p \cdot Cc'$

Momenti di rotazione

112. ***Momenti riferiti ad un centro, ad un asse, o ad un piano.*** — L'energia di una forza per produr moto rotatorio si calcola dal valor della forza moltiplicato per la distanza della sua direzione dal punto intorno al quale si effettua la rotazione (*Int.* 105). Onde un tal predotto chiamasi *momento di rotazione*, come quel punto dicesi centro dei momenti.

Che se i momenti invece di esser riferiti ad un punto saranno riferiti ad un'asse, cioè se prenderemo le distanze di tutte le direzioni delle forze da un'asse, e questo sarà l'asse intorno al quale ruota il corpo, potremo applicare le stesse conclusioni, giacchè tutti i piani perpendicolari a quell'asse han da girare nello stesso tempo, e nulla interessa che la direzione della forza giaccia sopra uno o sovra un'altro di questi piani. Quando però fosse fuori del piano perpendicolare all'asse di rotazione converrebbe decomporre la forza in una che giacesse nel piano, ed in una che li fosse normale; e sola la prima componente produrrebbe la rotazione.

Si dicono i momenti riferiti ad un piano quando si moltiplicano le forze per le distanze dei lor punti d'applicazione dal piano. E qui distingueremo il caso che le forze sieno fra di loro parallele ed abbiano direzione parallela al piano, dall'altro nel quale sono parallele fra di loro, ma non così al piano. Nel primo è la stessa cosa riferire i momenti al piano, o ad un'asse di rotazione che giaccia in quello; nel secondo si dovrebbe far la decomposizione di ciascuna forza in una parallela e l'altra normale al piano, e solo delle componenti parallele sarebbero a calcolarsi i momenti, ma poichè questi rimarrebbero tutti nello stesso rapporto con quelli che si hanno senza far la decomposizione, può alcune volte questa trascurarsi, e se non come concetto fisico, almeno come resultato di calcolo (ne vedremo in seguito il vantaggio) potranno anche in questo caso i momenti delle forze proposte riferirsi al piano. Finalmente accada che le forze non sieno fra loro parallele, ed allora sarebbe un errore il riferire i momenti ad un piano nel modo che ho detto.

113. *Il momento della resultante è eguale alla somma o alla differenza dei momenti delle componenti, secondo che esse tendono ad aggirare il sistema nel medesimo senso o in senso contrario.* — Prenderemo a dimostrare questo interessantissimo teorema prima sulle forze concorrenti, e dipoi su quelle parallele, e parleremo di due sole componenti, perchè da quelle che sono per dire su due, ben facile sarà il dedurre che quando le componenti fosser più il momento della resultante sarà eguale alla somma dei momenti delle componenti che aggirano il sistema in una direzione, meno la somma dei momenti di quelle che lo aggirano in direzione opposta.

Rappresenti (Tav. V. fig. 2) ABDC il parallelogrammo delle forze disegnato sovra un piano orizzontale, e sul medesimo si ponga un pernio O verticale girevole, al quale sieno unite tre verghe OC', OB', OD', perpendicolari respettivamente alle linee AC

AB, AD del parallelogrammo. Si applichi a quel sistema di verghe in C in B in D con tre fili passati sovra carrucole tre pesi P, P', R che rappresentino le due componenti e la resultante indicata dal parallelogrammo con le rammentate linee; se non che mentre P, P' tirano le respettive verghe nel senso delle componenti, R tiri la verga OD' in direzione opposta alla resultante. Avremo 1°: il sistema starà in equilibrio onde il momento della resultante produce lo stesso effetto dei momenti delle componenti, 2°: per mezzo delle divisioni che sono sulle verghe conosciute le misure di queste e moltiplicate per il peso respettivo si ottiene che il momento della resultante è eguale alla differenza dei momenti delle componenti cioè

$$R \times OD = P' \times OC' - P \times OB',$$

Ripetendo l'esperienza col prendere il pernio O in modo che le due componenti tendano a girare il sistema pel medesimo verso, lo che accade quando rimane il pernio fuori dell'angolo BAC delle componenti si troverà non solo l'equilibrio, ma eziandio il momento della resultante eguale alla somma de' momenti delle componenti.

Mi piace unire alla dimostrazione sperimentale anche quella geometrica. Nel parallelogrammo delle forze (Tav. V fig. 1) ABDC dal centro dei momenti O si abbassino le perpendicolari OB', OC', OD' sui lati AB, AC che rappresentano le componenti P, P' e sulla diagonale che rappresenta la resultante R. Si conducano pure le rette OB, OA, OC, OD. Dai triangoli che ne resultano avremo la relazione

$$OAC \pm OAB = (DBA \pm OBD) \pm OAB = ODA$$

ove deve prendersi il primo segno + fuori di parentesi quando il centro O rimane fuori dell'angolo BAC delle componenti, e quello secondo − quando è nell'angolo; e deve esser preso il segno di sopra o di sotto tra le parentesi secondochè il punto O rimane fuori delle parallele AB, CA, o dentro. Ora invece dei triangoli ponendo il doppio della loro misura cioè il prodotto della base per l'altezza, e ponendo le forze invece delle linee che le rappresentano si avrà $P' \times OC' \pm P \times OB' = R \times OD'$ la somma, cioè, o la differenza dei momenti delle componenti eguaglia il momento della resultante.

Sovra una verga MN (Tav. V fig. 3) girevole attorno al pernio O si applichino in due punti A, B le forze P, P'. Si cerchi il punto C (103) ove dovrebbe applicarsi la lor resultante, e sulla parte opposta della verga presa una distanza OC' = OC si ponga in C un peso R eguale alla somma dei due precedenti. Avremo 1:° che la verga rimane in equilibrio, 2:° rilevate dalle divisioni che sono sulla verga le distanze OA, OB, OC, e moltiplicate queste per i respettivi pesi si trova il momento della resultante eguale alla somma de' momenti delle componenti, cioè

$$R \times OC = P \times OA + P' \times OB.$$

Se il punto O rimanesse nell'intervallo AB si avrebbe il momento della resultante eguale alla differenza dei momenti delle componenti. Per quelli che non contenti dell'esperienza desiderano la dimostrazione matematica, osservo (Tav. V fig. 3) essere nella quantità

$$P' \times (CB + CA \pm OA) \pm P \times OA$$

espressa la somma dei momenti delle componenti o la differenza secondochè il punto O rimane fuori dell'intervallo AB, o dentro. Ma per la dottrina della composizione delle forze parallele (103) si ha $CB = \frac{P}{P'} CA$

e sostituito questo valore si riduce la espressione precedente a

$(P+P') \times (CA \pm OA) = R \times OC$

la somma, cioè, o la differenza dei momenti delle componenti eguaglia il momento della resultante. La dimostrazione che io ho data per i momenti riferiti ad un centro basta anche per il caso che siano riferiti ad un'asse OO'; infatti tirate le rette AA', CC', BB' perpendicolari all'asse e alla direzione delle forze si avrà

$$OA : OC : OB :: AA' : CC' : BB'$$

e per conseguenza essendo

$$R \times OC = P' \times OB \pm P \times OA$$

dovrà aversi $R \times CC' = P' \times BB' \pm P \times AA'$

114. *Relazione tra il momento di rotazione, e il lavoro meccanico* — Nel corpo che ha concepito moto rotatorio attorno ad un' asse gli spazj percorsi dalle diverse particelle non sono che archi i quali appartengono ad un medesimo angolo col vertice nel centro di rotazione; e per conseguenza questi archi, o spazj percorsi, sono proporzionali alla distanza delle particelle del corpo dal centro. Ma abbiam detto che il prodotto dello spazio percorso nella forza è il lavoro meccanico di essa, e il prodotto della distanza della direzione della forza dal centro di rotazione per la forza stessa è il momento di rotazione: Dunque in un medesimo corpo il momento di rotazione è in un rapporto costante col lavoro meccanico. Pertanto non farà sorpresa se stabiliti alcuni teoremi per i momenti di rotazione li applicheremo al lavoro meccanico e viceversa

Dedurremo pertanto in forza delle dimostrazioni precedenti che anche nel moto rotatorio il lavoro meccanico della resultante è eguale alla somma dei lavori di quelle componenti che cospirano in questo moto, meno la somma dei lavori delle componenti che contrariano il moto.

115. *Momenti di un sistema di forze riferiti a tre assi ortogonali, e formule relative* — Se un corpo sarà sollecitato da molte forze tendenti ad aggirarlo in differenti direzioni potremo formarci idea del loro effetto col decomporre ciascuna forza in tre parallele a tre assi ortogonali; onde ne avremo tre sistemi di forze parallele, ed indico con $\sum X$, $\sum Y$, $\sum Z$ le somme delle componenti respettivamente parallele agli assi delle x, y, z. Ora la forza X non potrà aggirare il sistema che attorno agli assi ai quali non è parallela cioè delle y e delle z, lo stesso può dirsi delle altre, e per conseguenza i momenti che tendono ad aggirare il sistema attorno all'asse delle x saranno quelli delle forze Y e Z, attorno all'asse delle y saranno quelli delle X e delle Z, e attorno all'asse delle z saranno quelli delle X e delle Y. Dal che deducesi

I. Le somme dei momenti che aggirano i sistemi attorno ai tre assi indicate con $M_{(x)}$ $M_{(y)}$ $M_{(z)}$ si ha

$$M_{(x)} = \sum (Zy - Yz)$$
$$M_{(y)} = \sum (Xz - Zx)$$
$$M_{(z)} = \sum (Yx - Xy)$$

Esempio. Si han due forze 400^k, 780^k

Fa con i tre assi delle	x	y	z
la prima angoli. . .	25°	80°	66°
la seconda	60°	50°	54°

e i punti d'applicazione sono determinati dalle ordinate

per la prima . . .	4^m	7^m	-8^m
per la seconda. .	-2^m	16^m	15^m

Le tre componenti saranno (102)

della prima $X = 400 \cos 25° = 362^k$
$Y = 400 \cos 80° = 69^k$
$Z = 400 \cos 66° = 162^k$

della seconda $X' = 780 \cos 60° = 390^k$
$Y' = 780 \cos 50° = 501^k$
$Z' = 780 \cos 54° = 458^k$

ed i momenti saranno

$M_{(x)} = 162 . 7 + 458 . 16 + 69 . 8 - 501 . 15 = 1499$

$M_{(y)} = - 362 . 8 + 390 . 15 - 162 . 4 + 458 . 2 = 5822$

$M_{(z)} = 69 . 4 - 501 . 2 - 362 . 7 - 390 . 16 = - 9600$

Ruota adunque il sistema attorno all'asse delle x nel senso in cui lo spingono le forze parallele alle z e con un momento prodotto da 1499ᵏ che agiscono con una leva di un metro. Attorno all'asse delle y come lo spingono le forze parallele alle x con un momento di 5822ᵏ che agiscono con braccio di leva di un metro. Attorno all'asse delle z ruota nel senso dell'azione delle forze parallele alle x' con un momento di 9600ᵏ e collo stesso braccio di leva $= 1^m$. Onde la rotazione attorno al terzo asse è quasi tripla di quella attorno al secondo, e questa è quasi tripla dell'altra attorno al primo asse.

II. Si abbia un'altro sistema di assi ortogonali che dirò delle x', y', z' con origine comune al precedente, e sieno $\widehat{xx'}, \widehat{yy'}, \widehat{zz'}$... gli angoli che formano fra di loro gli assi, potremo esprimere i momenti relativi agli assi del secondo sistema per quelli relativi al primo sistema per mezzo delle formule

$$M_{(x')} = \cos \widehat{xx'}\, M_{(x)} + \cos \widehat{yx'}\, M_{(y)} + \cos \widehat{zx'}\, M_{(z)}$$

$$M_{(y')} = \cos \widehat{xy'}\, M_{(x)} + \cos \widehat{yy'}\, M_{(y)} + \cos \widehat{zy'}\, M_{(z)}$$

$$M_{(z')} = \cos \widehat{xz'}\, M_{(x)} + \cos \widehat{yz'}\, M_{(y)} + \cos \widehat{zz'}\, M_{(z)}$$

Di qui rilevasi che quando il moto rotatorio non esiste attorno agli assi del primo sistema non può esistere neppure attorno agli assi del secondo sistema.

Esempio. Si voglia che l'asse della z' coincida coll'asse delle z, e che rimanendo le medesime forze dell'esempio precedente sia eguale a zero la somma dei momenti riferiti all'asse delle x' chiameremo α l'angolo che fa quest'asse con quello delle x e l'equazioni precedenti diventeranno

$$M_{(x')} = \cos \alpha\, M_{(x)} + \operatorname{sen} \alpha\, M_{(y)} = o$$

$$M_{(y')} = - \operatorname{sen} \alpha\, M_{(x)} + \cos \alpha\, M_{(y)} = \frac{1}{\sqrt{(M^2_{(x)} + M^2_{(y)})}} (M^2_{(y)} - M^2_{(x)})$$

$$M_{(z')} = M_{(z)}$$

determinando colla prima equazione i valori

$$\cos \alpha = \frac{M_{(y)}}{\sqrt{(M^2_{(x)} + M^2_{(y)})}}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{M_{(x)}}{\sqrt{(M^2_{(x)} + M^2_{(y)})}}$$

e sostituendo i valori numerici dell'esempio precedente

$$M_{(x')} = o$$

$$M_{(y')} = \frac{5822^2 - 1499^2}{\sqrt{(1499^2 + 5822^2)}} = 3010,7 =$$

$$M_{(z')} = - 9600$$

III. Che se vuolsi anche mutar l'origine degli assi ortogonali per ottenere le somme dei momenti riferite ai nuovi assi si adopreranno le seguenti formule, ove k, k', k'', sono le coordinate dell'antica origine riferite alla nuova

$$M_{(x')} = (k' \cos \widehat{xz'} - k'' \cos \widehat{xy'}) \sum X + (k' \cos \widehat{yz'} - k'' \cos \widehat{yy'}) \sum Y + (k' \cos \widehat{zz'} - k'' \cos \widehat{zy'}) \sum Z + \cos \widehat{xx'} M_{(x)} + \cos \widehat{yx'} M_{(y)} + \cos \widehat{zx'} M_{(z)}$$

$$M_{(y')} = (k'' \cos \widehat{xx'} - k \cos \widehat{xz'}) \sum X + (k'' \cos \widehat{yx'} - k \cos \widehat{yz'}) \sum Y + (k'' \cos \widehat{zx'} - k \cos \widehat{zz'}) \sum Z + \cos \widehat{xy'} M_{(x)} + \cos \widehat{yy'} M_{(y)} + \cos \widehat{zy'} M_{(z)}$$

$$M_{(z')} = (k \cos \widehat{xy'} - k' \cos \widehat{xx'}) \sum X + (k \cos \widehat{yy'} - k' \cos \widehat{yx'}) \sum Y + (k \cos \widehat{zy'} - k' \cos \widehat{zx'}) \sum Z + \cos \widehat{xz'} M_{(x)} + \cos \widehat{yz'} M_{(y)} + \cos \widehat{zz'} M_{(z)}$$

116. *Ruote su' piani inclinati* — La gravità assoluta, quella relativa, e la pressione sul piano, sono (107)

$$g \quad g' = \frac{A}{L} g \quad p = \frac{B}{L} g$$

la seconda forza che è parallela al piano agisce con un braccio di leva eguale al raggio R della ruota onde il suo momento sarà

$$g \frac{AR}{L}$$

L'attrito sull'asse delle ruote, chiamando f'' il coefficiente d'attrito per gli assi, sarà la pressione moltiplicata per questo coefficente, e per ottenere il momento dovrà moltiplicarsi per il raggio r dell'asse, ed avremo

$$g \frac{Bf'' r}{L}$$

Finalmente designando con f''' il coefficente d'attrito di seconda specie, questa resistenza che è anch' essa un momento si valuterà colla espressione

$$g \frac{Bf'''}{L}$$

onde la forza che sollecita le ruote sul piano inclinato si esprimerà col riunire le tre precedenti, cioè

$$\frac{g}{L} \left(AR - Bf''r - Bf''' \right)$$

Di qui si rileva che si avrà un'angolo limite per l'attrito delle ruote sù piani inclinati, e questo quando siano in atto di girare da per loro le ruote sul piano, cioè quando

$$\frac{A}{B} = \frac{f'' r - f'''}{R}$$

e che la tangente di quest' angolo limite starà in ragione inversa del raggio della ruota.

Sulle buone strade a massicciate per vetture che han ruote di $1^m,15$ (90) l'angolo limite è a circa il tre per cento.

Nelle strade a rotaje di ferro percorse da vagoni ben costruiti si trova quest' angolo quando la pendenza è del tre per mille (91 *bis*). In queste strade si può ritenere che la pressione non diversifica dalla gravità assoluta perchè le rotaje si pongono sempre a minimissima pendenza. Infatti quando la pendenza fosse di $^1/_{100}$ che anche è troppo per strade rotaje la base del piano inclinato starebbe alla lunghezza nel rapporto di 99995 : 100000, cioè han differenza trascurabile. Perciò in queste massimamente, ma anche in alcune delle strade comuni a poca pendenza invece di valutar l'attrito come ho fatto di sopra, si moltiplica tutto il carico per il coefficente d'attrito, e si ha $gf''r$ per l'asse, e gf''' per il cerchio della ruota.

117. *Trovare colla dottrina de' momenti la posizione della resultante in un sistema di forze parallele* — Essendo il momento della resultante per rapporto ad un piano, eguale alla somma, o differenza de' momenti delle componenti, chiamiamo $\sum C$ questa somma o differenza, D la distanza del punto d'applicazione della resultante R dal piano de' momenti. Si avrà $R.D = \sum C$ dalla quale equazione rilevasi

$$D = \frac{\sum C}{R}$$

e trovata questa distanza D da due piani paralleli alle direzioni delle forze non devono che a quelle due distanze intendersi condotti due piani paralleli ai proposti, e il luogo della loro intersezione sarà la direzione della resultante. Il più delle volte i piani si prendono fra di loro perpendicolari perchè rimane allora più facile il ritrovamento del luogo d'intersezione. Sieno infatti (Tav. V fig. 3) AX, AY le proiezioni dei due piani non si ha che prendere la distan-

za trovata dal piano della Y sull'asse AX e sia AB, quindi inalzare in B una perpendicolare a quell'asse, e determinarvi in AC la lunghezza della seconda distanza trovata (Tav. IV fig. 3.)

118. *Trovare il centro di tre forze parallele, e eguali, applicate ai tre vertici di un triangolo* — Siano le tre forze eguali rappresentate ciascuna da P, applicate ai tre vertici del triangolo ABC (Tav. V fig. 4). Si prenda la base AB del triangolo per asse dei momenti, allora non esisteranno i momenti delle due forze applicate in A, B; chiamata R la resultante, ed X la sua distanza da AB; ed abbassata la perpendicolare Cc si avrà $R\,X = P.\,Cc$ ma $R = 3P$ onde $X = {}^1/_3\,Cc$. E siccome si poteva prendere per asse dei momenti un qualunque lato, ne viene che il centro cercato è al terzo della distanza di ciascun lato dal vertice opposto.

Si poteva egualmente determinare col comporre le due forze applicate ai vertici B, C, la cui resultante 2P verrebbe applicata al punto D metà del lato BC, e quindi componendo questa resultante 2P coll'altra forza P applicata in A; e la resultante allora si troverá ai due terzi della retta AD partendosi dal vertice. Questo centro come vedremo coincide col centro di gravità del triangolo.

119. *Trovare colla dottrina dei momenti il centro di un sistema di forze parallele* — Ritenuto come abbiam sopra (117) stabilito

$$D = \frac{\Sigma C}{R}$$

che la distanza del punto d'applicazione della resultante dal piano dei momenti è eguale alla somma dei momenti delle componenti divisa per la resultante. Siccome suppongo si conoscano le componenti e le loro posizioni relativamente ai tre piani ortogonali che son rappresentati dai tre assi (Tav. IV fig. 3) AX, AY, AZ potremo ad uno alla volta riferire i momenti a ciascuno di questi piani, e dedurre le tre distanze respettive da essi del punto d'applicazione della resultante, che é il centro del sistema. E con le trovate distanze per determinarlo si prenderà sull'asse delle x la distanza AB dal piano YZ; quindi inalzata in B una normale all'asse, vi si prenderà BC eguale alla distanza dal piano XZ, finalmente elevata in C una normale al piano XY sù quella prenderemo la CD eguale alla distanza trovata da quel punto, e D sarà il centro cercato.

È manifesto che le formule (104) date dietro alla dottrina della composizione delle forze parallele combinano con quella simbolicamente qui accennata, come deduzione della dottrina de' momenti di rotazione.

120. *Trovare il centro di quattro forze parallele eguali applicate ai vertici di una piramide triangolare* — Presa per piano de' momenti una faccia sono zero i momenti delle tre forze che in quella stanno applicate e la distanza del punto ove è applicata la resultante da quella faccia è eguale al momento della quarta forza divisa per la resultante cioè per la somma delle quattro forze; onde viene ad essere quel centro distante da ciascuna faccia per un quarto della distanza che passa tra essa, e il vertice opposto.

Parimente anche qui dirò che si poteva rispondere colla dottrina della composizione delle forze parallele. Trovato come abbiam detto (118) la resultante delle tre forze di una faccia essere applicata sulla linea condotta da un vertice alla metà del lato opposto, e precisamente ai due terzi di questa linea a partirsi dal

vertice: si unisca questo punto col vertice opposto della piramide e sù quella linea starà il centro cercato a tra quarti al partirsi dal vertice, perchè al vertice abbiamo una forza, ed all'altro estremo abbiamo tre forze eguali. Similmente come ho detto del triangolo, si vedrà che la posizione di questo centro coincide con quella del centro di gravità della piramide.

Centro di gravità

121. *Centro di gravità delle figure simmetriche* — Ritengasi che il centro di gravità di un corpo è il centro (*Intr.* 129) delle forze parallele di gravità che animano i suoi elementi, e il centro di gravità di un sistema di corpi, è centro dei pesi appartenenti a quei corpi. Per conseguenza avendosi (Tav. V fig. 3 *bis*) dei corpi a due a due equiponderanti ed equidistanti dal punto A, in questo sarà il centro di gravità del sistema. Questo è il principio da applicarsi ogni qual volta si vuole col ragionamento determinare il centro di gravità ne' corpi. Ne consegue che le linee materiali o figure simmetriche attorno ad un punto, ad un asse, ad un piano, hanno il loro centro di gravità in quel punto, sù quell'asse, sù quel piano; e che i solidi di rivoluzione han sul loro asse di ravvolgimento il centro di gravità. Suppongo qui, ed in seguito se non avverto diversamente, che i corpi siano di materia omogenea e di uniforme densità in tutte le loro parti.

122. *Centro di gravità dei perimetri e in genere delle linee materiali, e formule relative* — La semplicità che mostra la linea retta per lasciar distinguere che il centro di gravità rimane alla metà della sua lunghezza, non si ritrova nella combinazione di più linee rette, e molto meno delle curve. Trattandosi di perimetri di poligoni, o combinazioni di linee rette materiali ed omogenee, la ricerca del lor centro di gravità richiede che si riguardino pesanti i punti di mezzo di ciascuna linea retta in proporzione della lunghezza di essa linea, e come un sistema di pesi o forze parallele se ne faccia la composizione a due a due. Così nel perimetro del triangolo ABC (Tav. V fig. 4) presi i due punti D, E, alla metà dei lati si considereranno gravati da pesi proporzionali ai lati cui appartengono: uniti questi, si prenderà sulla retta DE un punto che la divida in parti reciproche ai lati adiacenti; quindi si unirà quel punto col punto di mezzo del terzo lato, e considerando nel primo concentrato il peso dei lati AC, CB, e nel secondo il peso del solo lato BC si dividerà la retta che unisce questi due punti in parti reciprocamente proporzionali a questi pesi. Che se si avesse un perimetro di un maggior numero di lati si proseguirebbe la composizione ad uno per volta finchè non fosse fatta di tutti. Circa il centro di gravità del perimetro di un triangolo, siccome si può ai tre vertici intender collocate tre forze eguali alla semisomma dei pesi de' lati adiacenti; stabiliremo che quando il triangolo è equilatero (118), il centro di gravità del perimetro rimarrà ai due terzi della linea che si può condur da un vertice alla metà del lato opposto; e quando è scaleno il centro resterà sulla linea che dal vertice va a quel punto che divide il lato opposto in ragion reciproca delle semisomme dei pesi de' lati che concorrono negli altri due vertici. Circa alle linee curve riporterò le seguenti formule

I. Sia l una linea curva piana, ed x, y le coordinate. Il centro di gravità sarà determinato relativamente agli assi delle x, e delle y dalle coordinate

$$X = \frac{\int x dl}{l} \qquad Y = \frac{\int y dl}{l}$$

e se l' arco è simmetrico attorno all' asse delle x servirà a determinarlo la sola X

Per applicare queste formule convien conoscere l'equazione della curva e sostituire il valore di l espresso per x, e y; o quello di y per l' x.

Esempio — Il centro di gravità di un' arco di circolo trovasi sul raggio che divide l' arco per metà, e la sua distanza dal centro del circolo è quarta proporzionale dopo l'arco, la sua corda, e il raggio, onde per la mezza circonferenza si ha

$$X = \frac{2}{\pi} R$$

II. Se la linea curva l è a doppia curvatura converrà riferire la posizione a tre assi, e si useranno le formule

$$X = \frac{\int x dl}{l} \qquad Y = \frac{\int y dl}{l} \qquad Z = \frac{\int z dl}{l}$$

III. Se della curva non si conosce l' equazione, o si preferisce di non farne uso, potrà ritrovarsi con approssimazione il centro di gravità adoprando le formule.

$$X = \frac{\sum x l'}{\sum l'} \qquad Y = \frac{\sum y l'}{\sum l'} \qquad Z = \frac{\sum z l'}{\sum l'}$$

cioè considerando spezzata la curva in elementi o piccole porzioni che rappresento con l'; e prendendo la somma de'momenti di questi elementi riferiti ai tre assi delle x, y, z se la linea proposta è a doppia curvatura, o ai due assi delle x, y, se è piana; e quindi dividendo la somma trovata per la somma degli elementi. E qui è da avvertirsi che avendo scelti gli elementi assai grandi conviene prender la distanza del lor punto di mezzo dall' asse dei momenti per approssimarsi di più al vero.

125. *Centro di gravità de' poligoni, e in genere delle superfici materiali, e formule relative* — Nel triangolo (Tav. V fig. 4) si scorge che il centro di gravità deve esistere sulla retta che va da un vertice alla metà del lato che li sta di contro, perchè supposto che sia diviso il triangolo in tante linee parallele a quel lato, i centri di tutte quelle linee rimangono sulla retta rammentata. Ma condotte nel triangolo ABC due rette AD, BE dai vertici A, B, alla metà dei lati opposti si hanno i triangoli simili ABC, EDC, come anche gli altri AOB, EOD, e si ottiene

AO : OD :: AB : DE :: BC : DC :: 2 : 1

dunque AO = $^2/_3$ AD, il centro di gravità O del triangolo rimane ai due terzi della retta condotta da un vertice alla metà del lato opposto.

Per trovare il centro di gravità di un poligono, lo divideremo in triangoli, e determinato colla regola stabilita il centro di gravità di ciascun triangolo, intenderemo che in questi centri sieno raccolti i pesi de' respettivi triangoli, ed allora avremo un sistema di pesi, i quali comporremo colla regola che più volte (103) abbiamo rammentata.

Nel fissare il centro di gravità di un trapezio ho in animo di mostrare un esempio di determinazione del centro di una figura per mezzo dei centri di due figure, dalla differenza delle quali deriva la proposta. Il trapezio MNPQ (Tav. V fig. 4 *bis*) abbia la linea GC, che divide per metà i due lati paralleli, rappresentata con a. Sia MN = $2p$, PQ = $2q$. È chiaro che il centro di gravità esiste sulla GC. Si compia il triangolo SPQ e il suo centro rimanga in O essendo SO = $^2/_3$ SC.

il centro dell' altro triangolo SMN rimanga in A essendo SA = $^2/_3$ SG. In B sia il centro di gravità del trapezio: si tratta di scoprire la lunghezza GB. Ora decomponendo la forza che è applicata in O in due proporzionali alle aree del triangolo piccolo e del trapezio, applicate in A e B, avremo $\frac{OB}{OA} = \frac{p.CS}{(p+q)a}$

e siccome dai triangoli simili SGM SCQ si rileva $CS = \frac{ap}{q-p}$

e si ha $OA = {}^2/_3\,(CS - CS) = {}^2/_3\, a$

otterremo $OB = {}^2/_3 \frac{ap^2}{(q+p)(q-p)}$

$$SB = {}^2/_3\, a + {}^2/_3 \frac{ap}{q-p} + {}^2/_3 \frac{ap^2}{(q+p)(q-p)}$$

$$GB = SB - SC = \frac{a}{3}\left(2 + \frac{2p}{q-p} + \frac{2p^2}{q^2-p^2} - \frac{3p^2}{q-p}\right)$$

e fatte le riduzioni

$$GB = \frac{a}{3} \times \frac{p+2q}{p+q}$$

Per altre superfici determinate da curve possono tornare utili le seguenti formule.

I. Quando la superficie è piana riferita a due assi, le coordinate del centro di gravità saranno

$$X = \frac{\int xydx}{S} \qquad Y = \frac{{}^1/_2 \int y^2dx}{S}$$

essendo $S = \int ydx$.

Esempi. Un segmento di circolo ha il centro di gravità sul raggio che lo divide per mezzo, e la sua distanza dal centro del circolo è $^1/_{12}$ del cubo della corda diviso per l'area del segmento. Onde nel mezzo circolo questa distanza sarà $^4/_3 \frac{R}{\pi}$

Un mezzo circolo di raggio R da cui è stato tolto un altro mezzo circolo concentrico di raggio R', cioè un mezzo anello della larghezza R-R', ha il centro di gravitá distante dal centro de' circoli $\frac{4}{3\pi}\,\frac{R^3-R'^3}{R^2-R'^2}$

Una mezza ellisse il cui diametro parallelo alle y è $2b$, ha il suo centro di gravità distante dal centro per

$$^4/_3 \frac{b}{\pi}$$

Una mezza ellisse da cui sia stata tolta altra mezza ellisse concentrica ha il centro di gravità, e sull'asse delle x a $\frac{4}{3\pi}\,\frac{ab^2 - a'b'^2}{ab - a'b'}$

Un settore circolare ha il centro di gravità sul raggio che lo divide per mezzo, e distante dal centro del circolo $\frac{^2/_3\, R \times corda}{arco}$

cioè questa distanza è quarta proporzionale dopo l'arco, la sua corda e due terzi del raggio.

L'area di una parabola compresa tra la linea delle ascisse e l'ordinata ha il suo centro di gravità determinato dalle coordinate

$$X = {}^3/_5\, x \qquad Y = {}^3/_8\, y$$

L'area di un circolo compresa tra la linea delle ascisse e l'ordinata, ha il centro di gravità determinato dalle coordinate

$$X = \frac{^1/_3\, x^3}{S} \qquad Y = \frac{^1/_2 R^2 x - {}^1/_6\, x^3}{S}$$

essendo S l'area circolare cioè

$$S = {}^1/_2\, arco \times R - {}^1/_2\, yx$$

II. Quando la superficie è comunque curva, e se ne conosce l'equazione si adopreranno nella determinazione del centro di gravità le formule $X = \frac{\iint xdxdy}{S}$

$$Y = \frac{\iint ydxdy}{S} \qquad Z = \frac{\iint zdxdy}{S}$$

Se la superficie fosse di rivoluzione, il centro di gravità rimarrà sull' asse e distante dall' origine per

$$X = \frac{\int xyds}{\int yds}$$

avendosi qui la superficie $S = 2\pi \int yds$

Esempi — Il centro di gravità di una callotta, o di una zona sferica è

al punto di mezzo dell'asse respettivo.

Quello della superficie di un cono retto è ai due terzi dell'asse partendosi dal vertice

Quello di una superficie convessa di una paraboloide rimane ai $^5/_8$ del suo asse.

III. Qui pure accenneremo un metodo per ritrovare il centro di gravità di una superficie il cui perimetro non sia determinato da equazione. Questo consiste, come si è detto per le linee, in considerare divisa la superficie in tante piccole striscie di una larghezza h terminate alla parte superiore da curva parabolica, e con lati $y\,y'\,y''\,y'''$.....; trovare i momenti di queste riferiti ai due assi delle x, e delle y; a dividere la somma de' momenti per la somma delle striscie. La elegante formula stabilita dal Sinson giusta questi principi per determinare le coordinate del centro di gravità è

$$h\,\frac{o.y+1.4.y'+2.2y''+3.4.y'''\ldots ny^{(n)}}{y+4.y'+2y''+4y'''\ldots y^{(n)}}$$

ove scorgesi bene la legge perchè nel denominatore, tolto il primo e l'ultimo termine che hanno per coefficente l'unità, gli altri alternativamente hanno il 4 e il 2: il numeratore è eguale al denominatore se non che i termini son moltiplicati per la serie de' numeri naturali. — Per semplicizzare le striscie possono aversi per rettangoli.

124. *Centro di gravità de' poliedri, e in genere dei solidi, e formule relative.* — Le piramidi ed i coni hanno il centro di gravità ai tre quarti della retta che si può condur dal vertice al centro di gravità della base. Per principiare a dimostrar ciò sulla piramide triangolare, consideriamo divisa la piramide (Tav. V fig. 5) ABCD in tante superfici materiali parallele alla base: è manifesto che il centro di tutte queste superfici, e perciò dell'intera piramide rimane sulla retta AO′ condotta dal vertice al centro della base. Fatto il medesimo discorso quando si considera per vertice il punto D, sulla retta DO condotta dal vertice S al centro di gravità O del triangolo ABC dovrà pure esistere il centro di gravità della piramide: onde non può essere che nel punto G incontro delle due rette AO′, DO. Infatti condotte le rette AE, DE, OO′, si avranno i triangoli EOO′, EDA simili, come pure gli altri AGD, OGO′, e se ne dedurrà AG : GO′ :: AD : OO′ :: AE : OE :: 3 : 1 cioè AG = 3GO.

La dimostrazione si estende facilmente a qualunque altra piramide, perchè come abbiamo supposto nella piramide triangolare si può la proposta supporre che venga composta da tante superfici materiali e parallele alla base, le quali tutte avranno il centro di gravità sulla retta che dal vertice va al centro di gravità della base, e su questa perciò esisterà il centro di gravità dell'intera piramide. D'altronde divisa la base in triangoli, e la piramide in più piramidi triangolari, ciascuna di queste avrà il suo centro di gravità a tre quarti dell'altezza, e per conseguenza condotto a questo punto un piano parallelo alla base, come contiene tutti i centri di gravità delle singole piramidi triangolari, così anche dovrà contenere il centro di gravità della piramide totale. Ma dovendo essere il centro, tanto sulla retta che sul piano, giacerà nel loro incontro, che è ai tre quarti della retta condotta dal vertice al centro della base.

Valendo questo discorso qualunque sia il numero de' lati nel poligono che è base della piramide, anche il cono che può dirsi una piramide ad infinito numero di lati nella base, avrà il suo centro di gravità ai

tre quarti della retta che dal vertice va al centro della base.

Un poliedro qualsivoglia può decomporsi in piramidi, ciascuna delle quali sappiamo ove ha il centro di gravità. Dunque comprendendo raccolto nel centro delle singole piramidi tutto il loro peso avremo nel poliedro un sistema di pesi noti, e applicati a punti conosciuti, e potremo determinarne il punto d'applicazione della resultante con uno de' tre metodi rammentati ai §§. 104; 104. II; 119.

Quando si avesse un sistema di corpi, la determinazione del centro di gravità non è differente da quella usata per il sistema delle precedenti piramidi.

Che se trattasi di solidi a superfici curve, o di materia non uniformemente densa, potremo usar per la determinazione del centro le formule seguenti.

I. Riferiti gli elementi del corpo a tre assi ortogonali le tre coordinate del centro di gravità saranno

$$X=\frac{\int x dV}{V} \qquad Y=\frac{\int y dV}{V} \qquad Z=\frac{\int z dV}{V}$$

ove $dV = dxdydz$ e $V = \int\int\int dxdydz$.

Che se il solido sarà di rivoluzione, il centro è sull'asse alla distanza dall'origine

$$X=\frac{\int xy^2dx}{\int y^2dy}$$

Esempi. Prese le ascisse dal vertice della curva che rotando genera il solido, dalla precedente formula sostituendovi il valore di y espresso per x coll'equazione della curva si ha

Per un segmento sferico di raggio a

$$X=\frac{8a-3x}{12a-4x}.x$$

Per un settore sferico

$$X = {}^1/_8\,(2a+3x)$$

Per l'emisfero

$$X = {}^5/_8\,a$$

Per un segmento di paraboloide

$$X = {}^2/_3\,x$$

Per un segmento d'ellissoide chiamando a il semiasse di rivoluzione si ha come nel segmento sferico

$$X=\frac{8a-3x}{12a-4x}.x$$

Per un segmento d'iperboloide il valore di X è sempre compreso tra i $^2/_3$ e i $^3/_4$ di x, e precisamente si ha

$$X=\frac{8a+3x}{12a+4x}.x$$

II. Le precedenti formule generali servono anche per il caso che la densità non sia uniforme purchè si ponga sotto i segni integrali la densità q, la quale rappresenti per ogni elemento la densità. Allora nell'integrazione conviene esprimere questa densità q in funzione delle x, y, z. Che se il solido è di rivoluzione la formula si ridurrà

$$X=\frac{\int qxy^2dx}{\int qy^2dx}$$

Esempi — Supponiamo che la densità vada uniformemente diminuendo a misura cha cresce l'altezza x, e si abbia $q = m(b-x)$, per un cilindro, o per un corpo nel quale non si tenga conto delle dimensioni laterali come sono i differenti mezzi, si avrà

$$X=\frac{3b-2x}{6b-3x}x$$

cioè il centro di gravità sarà compreso sempre tra la metà e i due terzi dell'altezza.

La densità di una verga varj come la potenza n*sima* della distanza dal suo estremo origine delle coordinate. Chiamata b la sua lunghezza, il suo centro di gravità sarà determinato da

$$X=\frac{n+1}{n+2}\,b.$$

Fatto $n = 2$ la densità della verga andrà crescendo in ragion duplicata della distanza dal suo principio e la formula diverrà $^3/_4\,b$. Lo che si comprendeva anche dal solo confronta-

re la verga con una piramide omogenea, e questa osservazione basti a far intendere, che può con certe considerazioni talvolta riportarsi ad un corpo omogeneo la ricerca proposta sovra un corpo di sostanza diversamente densa.

III. Che se vorremo per approssimazione trovar le coordinate del centro di gravità di un volume come si è detto per le linee e per le superfici (122 III, 123 III), intenderemo diviso il volume in tante fette, delle quali riguardate come superfici materiali o come composte da solidi di cui si sa la posizione del centro, si ritrova il lor centro di gravità, e dopo supponendo ivi raccolto un peso proporzionale al loro respettivo volume si riferiranno i momenti di questi pesi o volumi elementari a tre piani coordinati, e si dividerà la somma de' momenti per il volume proposto.

Esempio — In questo metodo che è spessissimo di uso in pratica sarà utile trattenersi, e perciò mi propongo trovare il centro di gravità del volume della parte sommersa della carena di un vascello. Supponiamo che essendo il vascello in quiete, la chiglia sia orizzontale e il piano verticale condotto per questa divida il vascello (Tav. V fig. 6) in due parti perfettamente simmetriche. Il centro di gravità rimarrà in questo piano, e la questione sarà ridotta a trovare la distanza di questo punto da due rette che giacciano in questo piano una a livello dell'acqua nella direzione della chiglia, e l'altra normale a questa. Proponiamoci in primo luogo di trovare la distanza da quest'ultima: s'immagini divisa la parte sommersa da piani orizzontali in fette di una grossezza eguale e assai piccola, e rappresenti una di queste CH*hc*, si tirino le sezioni D*d*, E*e*, F*f*, G*g* equidistanti e tanto vicine che non sia troppo errore considerare per rette le curve DE, EF..., e si divida colle diagonali C*d*, D*e*... la superficie materiale in triangoli, avremo per rapporto alla C*c* i momenti de' triangoli espressi come qui appresso

quello di C*cd* è $AL \times \frac{Cc}{2} \times \frac{1.\ AL}{3}$

quello di CD*d* è $AL \times \frac{Dd}{2} \times \frac{2.\ AL}{3}$

quello di D*dc* è $AL \times \frac{Dd}{2} \times \frac{4.\ AL}{3}$

quello di DE*e* è $AL \times \frac{Ee}{2} \times \frac{5.\ AL}{3}$

quello di EE*f* è $AL \times \frac{Ee}{2} \times \frac{7.\ AL}{3}$

quello di EF*f* è $AL \times \frac{Ff}{2} \times \frac{8.\ AL}{3}$

e così di seguito ove si vede che il numero che moltiplica AL nel momento dell'ultimo triangolo é sempre eguale al triplo del numero dell'ultima sezione trasversa meno 4. Sommando tutti questi momenti si ha un fattore comune $AL^2 \times$ per la somma formata dal sesto della prima e dell' ultima sezione moltiplicato per il triplo del numero delle sezioni diminuito di quattro, e dalla seconda sezione, dal doppio della terza, dal triplo della quarta... e così di seguito fino alla penultima. Come si è detto di una delle fette in cui si era inteso diviso il volume sommerso del vescello, così può ripetersi di tutte le fette, e trovate le somme de' momenti relativi ai triangoli in cui son divise, si farà di tutte queste una somma unica. Questa dovrà esser divisa per il volume, che è quanto dire per la somma de triangoli meteriali. Ma dal quadro precedente si vede che questa somma è AL moltiplicato per la metà delle due sezioni estreme, e per la somma

delle sezioni intermedie. Dunque si potrà nel calcolo togliere un fattore AL dal divisore e dal dividendo, e rappresentando le n rette Dd, Ee... con p, q, r.., u, e aggiungendo uno, due... apici per quelle che appartengono alle differenti sezioni la formula che dà la distanza del centro di gravità dal piano di Cc, o dalla linea normale alla chiglia sarà

$$\frac{\mathrm{AL}(\alpha+\beta+\alpha'+\beta'\ldots)}{\frac{p+u}{2}+q+r\ldots+\frac{p'+u'}{2}+q'+r'\ldots}$$

essendo $\alpha = \frac{1}{6}(p+u)(3n-4)$

$\alpha' = \frac{1}{6}(p'+u')(3n-4)$, ec.

$\beta = q+2r\ldots, \beta' = q'+2r'\ldots$, ec.

Per ricercare l'altra distanza dalla chiglia non si deve fare che la divisione in fette con piani normali, e con ragionamento analogo e formula consimile verrà determinata anche questa distanza del centro di gravità dalla linea a livello dell'acqua parallela alla chiglia. Siccome la forma del vascello non permette che la precedente linea de' momenti sia a contatto con tutte le fette orizzontali senza che rimanga, una porzione del corpo del vascello al lato opposto di questa linea sarà facile prenderla in parte esterna e in parte interna al vascello, o in altro modo fare il conguaglio conveniente.

APPLICAZIONI

125. *Trovare la misura delle superfici, e de solidi che si posson riguardar generati col moto di una linea, o di una superficie.* — Sia una linea materiale che con il suo raggirarsi attorno ad un'asse generi una superficie, o anche una superficie che generi un solido di rivoluzione: ogni punto o particella della linea, o della superficie genererà un circolo, che può riguardarsi come formato da una serie di particelle materiali disposte in circonferenza: ed il complesso di tanti circoli, quante sono le particelle della linea o superficie generatrice, darà luogo alla formazione della superficie o solido di cui si vuole la misura. Ora il volume di ciascun circolo elementare è quello di un cilindro che ha per base l'ampiezza del punto, o particella che lo ha generato, e per altezza la circonferenza del circolo; giacchè non è desso che un sol filo di particelle il quale si addirizzerà e si piegherà senza che abbia luogo dilatazione o compressione cioè variazione di volume. Chiamiamo a, a', a''... le particelle della linea o superfice generatrice, ed r, r', r'' le loro respettive distanze dall'asse di rotazione saranno $2\pi ar$, $2\pi a'r'$, $2\pi a''r''$,... i volumi elementari, ed il volume totale del solido potrà esprimersi con

$$2\pi\,(ar + a'r' + a''r'' + \ldots)$$

Ma la quantità tra parentesi può anche aversi per la somma de' momenti delle singole particelle riferiti all'asse di rotazione, la quale dovendo eguagliare il momento della resultante sarà eguale a $\mathrm{R}\sum a$; ove $\sum a$ rappresenta la somma degli elementi cioè la linea o la superficie generatrice, ed R la distanza dell'asse dal centro di gravità nel quale la massa può aversi per concentrata. Quindi $2\pi \mathrm{R}\sum a$ sarà la misura della superficie o solido che è stato generato: lo che indica essere essa eguale alla linea o superfice generatrice moltiplicata per la circonferenza che descrive nel movimento il suo centro di gravità.

Come ho detto di una circonferenza che sia descritta da ogni particella, può egualmente estendersi a qualunque porzione di arco; ed anche quando dopo di aver descritto una

porzione di arco col raggirarsi attorno di un'asse, cominciasse a ravvolgersi attorno ad un' altr'asse; o ancorchè molte volte, e se si vuole ad ogni istante, mutasse l'asse di rotazione, cioè si movesse perpendicolarmente ad una qualsivoglia linea direttrice, siccome quel che è vero per ciascuna parte non può non esserlo per tutto l'intiero, sempre in tutti questi casi il teorema avrebbe luogo. E potrà generalmente stabilirsi che ogni superficie piana o curva, ed ogni solido generato dal moto di una linea o d' una superficie sarà eguale al prodotto della linea o superficie nel cammino percorso dal suo centro di gravità.

Ho considerato il caso che il moto della linea o superficie tutto s' impieghi per generare, cioè la linea o superficie rimanga in tutte le posizioni che va a prendere sempre normale alla direttrice (così chiamasi la linea percorsa dal centro di gravità). Posto che le rimanga parallela non si avrebbe alcuna generazione, e se le resta obliqua sempre egualmente, facile è conoscere che invece di suppor mossa la linea o superficie proposta deve ritenersi che si muova la sua proiezione fatta in un piano perpendicolare alla direttrice. Questo torna lo stesso che dire che si consideri come linea o superficie generatrice quella che effettivamente si muove, e come direttrice il viaggio che percorre il centro di gravità soltanto perpendicolarmente ad essa, il quale è facile determinarsi colla decomposizione del moto del centro di gravità in due uno normale, ed in uno parallelo alla generatrice. Premesso ciò il teorema precedente è applicabile anche quando la generatrice rimane obliqua alla direttrice, e per aver la misura della quantità generata dovrà moltiplicarsi la generatrice per lo spazio percorso dal centro di gravità in direzione normale a quella.

Questo metodo semplicissimo viene impiegato dagli architetti istruiti per calcolare i volumi e quantità di pietre, di legno, di ferro ec. che compongono le scale a chiocciola, le volte annulari ec: dagli ingegneri di ponti, argini, e strade per calcolare gli sterri e gl' interni: dagli artiglieri per valutare il volume e solidità delle lor bocche da fuoco: dai matematici per ritrovare la posizione dei centri di gravità di alcune curve, o di alcune superficie; in una parola è di frequentissima applicazione e mostra uno de' più belli esempj del reciproco soccorso che si arrecano le due scienza la Fisica e la Geometria.

126. *Spinta de' terrapieni.* — Le terre si dispongono con una certa inclinazione onde possano reggersi da per loro, e quando li si vuol dare inclinazione minore han bisogno di esservi ritenute, e producono una spinta contro i ritegni. Questa spinta proviene dalla tendenza che hanno le diverse falde di terra a scorrere sovra le sottoposte, e noi la insegneremo a valutare nel caso che debbano le terre esser ritenute in un terrapieno ABM (Tav. V fig. 7) tagliato a piombo in AB, ove segue la spinta contro il muro di rivestimento che supporremo le sostenga. Consideriamo la spinta del triangolo di terra ABC ponendo l'altezza $AB = a$, e l'angolo $BAC = m$ e g' per il peso specifico della terra avremo il triangolo

$ABC = {}^1/_2\, AB \,.\, BC = {}^1/_2 a^2 \tang m$, e il suo peso ${}^1/_2\, g'a^2 \tang m$ può questo triangolo ritenersi come un corpo che cada per il piano inclinato AC, e che vi sia rattenuto dallo sforzo dalla spinta che in direzione oriz-

zontale soffre il muro BA, allora questa spinta abbiamo insegnato essere (107) $g\,\frac{1-f\,tang\,m}{tang\,m+f}$

ed essendo ora $g = \frac{1}{2}\,g'a^2\,tang\,m$ avremo $\frac{1}{2}\,g'a^2\,\frac{1-f\,tang.m}{1+f\,cot\,m}$

Considerando il peso del triangolo raccolto nel centro di gravità G che rimane ai due terzi della retta BD condotta dal vertice B alla metà del lato opposto AC, e tirata la retta EF parallela al piano inclinato si vede che in E è applicata la resultante delle spinte parziali, onde essendo $AE = \frac{1}{3}\,a$ il momento della spinta sarà $\frac{1}{6}g'a^3\,\frac{1-f\,tang\,m}{1+f\,cot\,m}$

Ora siccome invece di scorrere il triangolo CBA potrebbe egualmente scorrere un'altro triangolo cBa, conviene esser certi che il massimo momento della spinta si ottiene da tutto il triangolo CBA. Ad assicurarcene serve il riflettere che facendo $Ba = y$, $Aa = a - y$ si ha per il braccio di leva della spinta

$$\frac{1}{3}\,y + a - y = a - \frac{2}{3}\,y,$$

e per il momento di essa

$$(a-\frac{2}{3}y)\,.\,\frac{1}{2}\,y^2g'\,\frac{1-f\,tang\,m}{1+f\,cot\,m}$$

e posta eguale a zero la derivata di questa quantità abbiamo $y=a$.

Rimane che si veda quale ha da essere il valore dell'angolo m affinchè la spinta e il suo momento abbiano valor massimo. È chiaro che sì per l'una che per l'altro determineremo questo valore col porre a zero la derivata della quantità $\frac{1-f\,tang\,m}{1+f\,cot\,m}$

lo che ci dà $tang\,m=-f+\sqrt{1+f^2}$. Sostituito questo valore trovasi che l'espressione della spinta riducesi

$$\frac{1}{2}a^2g'(-f+\sqrt{1+f^2})^2=\frac{1}{2}\,a^2g'\,tang^2m$$

e del momento di essa

$$\frac{1}{6}a^3g'(-f+\sqrt{1+f^2})^2=\frac{1}{6}a^3g'tang^2m$$

Inoltre possiamo avvertire che l'angolo che ha per tangente

$$-f+\sqrt{1+f^2}$$

è precisamente la metà dell'angolo che ha per cotangente f, il quale è l'angolo limite d'attrito (107) cioè l'angolo della scarpa che prenderebbe la terra naturalmente da se, quando non fosse sostenuta da verun rivestimento. Posto adunque che AM rappresenti l'inclinazione naturale in cui si porrebbe la terra, la linea AC che determina quel triangolo di terra che esercita la massima spinta contro il muro di rivestimento divide per metà l'angolo MAB. Le terre più scorrevoli (*Int.* 174) si reggono sotto un declivio di 60°, ed hanno per lor peso specifico 1350ᵏ, ed a quelle forti basta anche il declivio di 54° e il peso specifico è di 1428ᵏ. Onde per le une porremo $m = 30°$, e per le altre $m = 27$. Quindi riserbandomi di tornare in seguito sù questo soggetto stabilirò le seguenti formule

Per i terrapieni di terre sabbiose spinta $\frac{1}{6}a^2\,g' = 225^k\,a^2$

Momento della spinta $\frac{1}{8}\,a^3g'=79^ka^3$

Per i terrapieni di terre forti spinta $\frac{1}{8}a^2g' = 178\frac{1}{2}\,a^2$

Momento della sp. $\frac{1}{24}\,a^3g'=56\,\frac{1}{6}a^3$

127. *Spinte e pressioni de' travi carichi*. — I tetti, i ponti di legno, e le diverse armature che si preparano per reggere le costruzioni presentano travi o spranghe, che si appoggiano ad alcuni punti fissi, e col loro carico li spingono o premono. Fa duopo conoscere tali spinte e pressioni per decidere se potranno esser tenuti in equilibrio, e se è sufficiente la resistenza de' solidi ad evitar le rotture. A tale oggetto non si fa che applicare le dottrine del centro di gravità e della risoluzione delle forze. Nella ricerca della som-

ma delle pressioni verticali che si fanno sugli appoggi sottoposti non vi ha bisogno di alcuna considerazione perche è data dal peso, onde se un solo di tali appoggi esiste esso lo sostien tutto, e se più se lo repartono colle note leggi (104). Per le spinte orizzontali, o in direzione obliqua, occorre far più studiate risoluzioni di forze, sebbene la regola per determinarle è sempre data dalla direzione che ha da avere la spinta cercata.

Se un trave CD (Tav. V. fig. 8) appoggiato coll' estremo C al piano verticale CO, vien coll'altro B posato sul piano orizzontale OD, e fermato con un ostacolo che è in D, il quale l'impedisca di strisciare lungo il piano. La pressione verticale sull' appoggio D sarà tutto il peso o carico del trave che io chiamo P.

La forza che tende a cimentare la resistenza rispettiva del trave sarà applicata al suo centro G di gravità. Ad averne la intensità converrà risolvere il peso P in due forze una normale e l' altra nella direzione del trave; e verrà data dalla prima componente che, chiamando m l' angolo DCO, sarà P*sen m*.

La forza che cimenta la resistenza del trave all' incurvamento per compressione si otterrà risolvendo P in due forze parallele applicate ai due estremi C, D, e la componente che rimane in C la quale è

$$\frac{P \cdot GD}{CD}$$

dovrà esser nuovamente risoluta in due forze una nel senso di CD, e l' altra normale. La prima di queste componenti la quale è eguale a

$$P \cos m \frac{GD}{CD}$$

darà la forza cercata, e si ridurrà $^1/_2$ P *cos m* quando il trave sia omogeneo, o il suo carico rimanga su di esso uniformemente distribuito.

La spinta che il trave esercita orizzontalmente contro i due punti C, D si otterrà decomponendo il peso P in una forza normale al muro CO, ed in un' altra che passi per il punto D. Ciò si ottiene col rappresentare il peso per mezzo della retta GP e formare il parallelogrammo PAGE, quindi trasportando la componente PE in DE' risolverla nuovamente in una DS orizzontale, e nell' altra DR verticale. Chiaro è che GP = DR = P, e che chiamando a la lunghezza del trave e b la porzione DG

$$PA = DS = P \cdot \frac{TD}{CO} = \frac{b}{a} P \tang m$$

cioè il ritegno D soffre come già avevamo detto una pressione verticale eguale al peso intero del trave, ed ambedue i punti C, D soffrono spinta orizzontale eguale ed opposta, la quale generalmente si esprime con

$$\frac{b}{a} P \tang m$$

e si riduce $^1/_2$ P *tang m* quando il centro di gravità cade nel mezzo del trave.

Scorrerà pertanto il trave, se in D non vi è ritegno, ogni qual volta sia

$$\frac{b}{a} P \tang m > f P$$

ovvero per i travi omogenei

$$\tang m > 2f,$$

e trattandosi di un carico che possa muoversi lungo il trave da un' estremo all' altro, come un individuo che monta sovra una scala, perchè il trave non scorra dovrà aversi

$$\tang m > f$$

cioè m dovrà esser maggiore di quel limite d' attrito.

Sia il trave in C appoggiato ad un trave eguale ed egualmente disposto BC, siccome alla reazione del muro CO supplisce il trave opposto si

avrà che le spinte orizzontali e verticali contro i due punti D, B avranno il valore che sopra abbiamo determinato. Quando la larghezza BD rimane la stessa, e il carico è uniformente distribuito sù tutta la lunghezza del trave, crescendo l'elevazione del tetto scema la spinta orizzontale su' termini B, D, e cresce quella verticale, perchè abbiamo il carico P proporzionale alla lunghezza de' travi, cioè

$$P = a \cdot CD = \frac{a \cdot DO}{sen\ m}$$

$$\text{Spinta} = P\ tang\ m = \frac{a\ DO}{cos m}$$

CAPITOLO VI.

Dell' equilibrio, considerato principalmente nelle fabbriche.

128. *Condizioni d'equilibrio.* — Abbiamo noi mostrato (*Int.* 140) che ogni qual volta non esiste la resultante delle forze non si ha moto progressivo, e che manca il moto rotatorio allorchè è eguale a zero il momento di quella resultante, e possiam ritenere queste due condizioni come quelle necessarie a determinare l'equilibrio di un corpo, o di un sistema di corpi collegati invariabilmente fra loro. Quando però il sistema sia di forma variabile converrà verificare le due notate condizioni per ogni parte di esso, che possa aversi come rigida.

Agendo molte forze, e con direzioni differenti giova a farsi idea del loro effetto, risolvere ciascuna in altre parallele a due, o a tre assi ortogonali (100. III, 101. III), secondochè agiscono tutte in un piano, o in piani differenti. Ed allora ridotto il sistema delle forze in due o tre sistemi di componenti parallele a quegli assi, convien considerare l'equilibrio di ciascun sistema in particolare, lo che porta a due equazioni di condizione per ciascun'asse, cioè a sei quando gli assi sono tre; vale a dire che la somma delle forze parallele a ciascuno dei tre assi deve essere eguale a zero, e parimente la somma de' momenti di rotazione attorno a ciascuno de' tre assi deve essere eguale a zero. Lo che si suole indicare con i seguenti simboli

$$\Sigma X = o,\ \Sigma Y = o,\ \Sigma Z = o$$

$$M_{(x)} = o,\ M_{(y)} = o,\ M_{(z)} = o$$

Che se il moto progressivo e quello rotatorio non han luogo per un sistema di assi ortogonali, dalle formule riportate deducesi non potere aver luogo neppure per un qualsivoglia altro sistema (114. III).

Più che dell' equilibrio astratto noi dobbiam curarci di conoscere quando il moto non esiste ancor dipendentemente dall' attrito: quindi gioverà dire che non solo si ha equilibrio quando le precedenti quantità sono eguali a zero, ma anche quando avessero un valore positivo o negativo minore dell' attrito. E lo stato prossimo al moto si otterrebbe se questo valore fosse eguale all'attrito.

Equilibrio de' muri.

129. *Equilibrio ne' muri di rivestimento.* — Poniamo che si tratti di un terrapieno che deve esser sostenuto da un muro a piombo e di sezione rettangolare. Abbiamo trovato (126) che la spinta di un terrapieno è $^1/_2\ a^2 g\ tang^2\ m$, ed il suo momento $^1/_6\ a^3\ g\ tang^2 m$. Il muro

avrà di peso per ogni unità di lunghezza abg' chiamata a l'altezza, b la larghezza, e g' il peso specifico. Onde la resistenza che esso oppone ad essere smosso per moto progressivo chiamando f' il coefficente d'attrito sarà $f'abg'$, e per moto rotatorio $\frac{1}{2}ab^2g'$. Per conseguenza avremo nello stato prossimo al moto le due equazioni: per il moto progressivo

$$\tfrac{1}{2}a^2 g \tang^2 m = f' abg'$$

per il moto rotatorio

$$\tfrac{1}{6}a^3 g \tang^2 m = \tfrac{1}{2}ab^2g'$$

dal confronto di queste due equazioni si scorge che quando è

$$\frac{b}{a} < \tfrac{2}{3}f'$$

riman più facile il moto rotatorio che quello progressivo. Onde attenendoci nella pratica alla seconda equazione dedurremo che deve essere

$$b = 0{,}57\ a \tang m \sqrt{\frac{g}{g'}}$$

Sia l'altezza del muro $a + a'$ cioè il terrapieno sopravanzi di a' il muro, come suole spesso avvenire. Posto che abbiasi $a = 2a'$ si ottiene

$$b = 0{,}7\,(a+a')\tang m \sqrt{\frac{g}{g'}}$$

la qual formula può essere applicabile da $a' = 0$ fino ad $a' = \frac{1}{2}a$, perchè dal confronto di questa colla precedente si scorge che la stabilità data dalla seconda formula è maggiore di quella data dalla prima.

Nel caso che il muro sopravanzi il terrapieno, si potrà trascurare l'effetto dell'eccesso a' quando questo è piccolo, ma quando è grande come se giungesse ad essere $2a' = a$, allora la formula riducesi

$$b = 0{,}2\,.\ a \tang m \sqrt{\frac{g}{g'}}$$

130. *Regole per la pratica.* — Per ottener maggiore speditezza nelle operazioni pratiche riporterò la tavola seguente, nella quale i valori di b, o della grossezza de' rivestimenti à parete verticale, sono assegnate per le diverse terre e per i diversi muramenti, estratta da una memoria di Poncelet sulla spinta delle terre.

Nella tavola i valori $f=0{,}6$, e $f=1{,}4$ corrispondono il primo alle terre le più leggere, e il secondo alle terre più forti; $f = 1$ è relativo alle terre medie che prendono un'inclinazione naturale di 45°.

Per servirsi della tavola si determinerà coll'esperienza l'inclinazione naturale che prendono le terre da sostenersi, il peso g del metro cubo delle medesime, e il peso specifico g' del muramento, e si sceglierà nella tavola stessa il valore di b che più da vicino corrisponde ai dati proposti. Che se tutti differissero moltissimo vi si avvicinerà con un valor proporzionale.

Nel caso che non si abbia sopracarico al muro si useranno i numeri della prima linea.

Se trattasi dei muri a secco li si darà $\frac{5}{4}$ della grossezza che si assegnerebbe a quelli in muramento.

Esempio I. Qual deve esser la grossezza di un rivestimento verticale di 5.^{m} in altezza, che ha da sostenere un sopracarico di 3.^{m} di terra il di cui metro cubo pesa 1350.^{k}, essendo quello del muramento 2250.^{k} ed $f = 0{,}60$. Si ha

$$\frac{g'}{g} = \frac{2250}{1350} = \frac{5}{3} \qquad \frac{a'}{a} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

e dalla tavola si rileva

$$x = 0{,}617 \times 5^m = 3^m{,}085.$$

II. Qual deve essere la grossezza di un muro alto 4.^{m} che ha da sostenere un terrapieno al pari del muro stesso, formato di terra che pesa per ogni metro cubo 1500^k, essendo il peso del muramento 2250 e l'attrito $f = 1$? La tavola darà

$$x = 0{,}270 \times 4 = 1^m{,}080$$

TAVOLA DELLE GROSSEZZE IN FRAZIONE DELL'ALTEZZA PER I MURI DI RINVESTIMENTO VERTICALI CON SOPRACARICO DI TERRA E SENZA

valore di $\frac{a'}{a}$	valore di *b* per $\frac{g'}{g}=1$ $f=0,6$ il sodo essendo		valore di *b* per $\frac{g'}{g}=1$ $f=1,4$ il sodo essendo		valore di *b* per $\frac{g'}{g}=1,5$ $f=1$ il sodo essendo			valore di *b* per $\frac{g'}{g}=5/8$ $f=0,6$ il sodo essendo		valore di *b* per $\frac{g'}{g}=5/8$ $f=1,4$ il sodo essendo	
	= 0	= 1,2*a*	= 0	= 0,2*a*	= 0	= 0,2*a*	Totale	= 0	= 0,2*a*	= 0	= 0,2*a*
0,0	0,452	0,452	0,258	0,258	0,270	0,270	0,270	0,350	0,350	0,198	0,198
0,1	0,498	0,507	0,282	0,290	0,303	0,306	0,303	0,393	0,398	0,222	0,229
0,2	0,548	0,563	0,309	0,326	0,336	0,342	0,326	0,439	0,445	0,249	0,262
0,3	0,604	0,618	0,338	0,361	0,368	0,375	0,343	0,485	0,489	0,274	0,283
0,4	0,665	0,670	0,369	0,394	0,399	0,405	0,357	0,532	0,522	0,303	0,299
0,5	0,726	0,717	0,402	0,423	0,436	0,431	0,368	0,579	0,549	0,332	0,314
0,6	0,778	0,754	0,436	0,450	0,477	0,457	0,377	0,617	0,572	0,360	0,328
0,7	0,824	0,790	0,472	0,476	0,512	0,481	0,385	0,645	0,593	0,387	0,343
0,8	0,847	0,820	0,510	0,501	0,544	0,504	0,391	0,668	0,610	0,413	0,357
0,9	0,903	0,848	0,541	0,524	0,575	0,523	0,398	0,690	0,624	0,437	0,371
1,0	0,930	0,873	0,571	0,546	0,605	0,540	0,405	0,707	0,636	0,457	0,384
1,2	0,983	0,916	0,632	0,586	0,654	0,574	0,441	0,737	0,655	0,498	0,410
1,4	1,023	0,945	0,684	0,624	0,696	0,602	0,416	0,762	0,672	0,537	0,428
1,6	1,056	0,970	0,730	0,658	0,734	0,622	0,420	0,780	0,685	0,566	0,445
1,8	1,084	0,990	0,772	0,690	0,769	0,640	0,423	0,797	0,697	0,594	0,461
2,0	1,107	1,004	0,812	0,714	0,795	0,655	0,425	0,811	0,705	0,622	0,475
2,5	1,151	1,037	0,902	0,778	0,848	0,690	0,431	0,833	0,722	0,680	0,506
3,0	1,180	1,060	0,981	0,835	0,892	0,717	0,435	0,852	0,731	0,726	0,531
3,5	1,203	1,074	1,047	0,883	0,928	0,738	0,438	0,862	0,737	0,765	0,551
4,0	1,222	1,984	1,105	0,926	0,957	0,753	0,442	0,872	0,742	0,800	0,568
4,5	1,237	1,093	1,158	0,962	0,981	0,768	0,444	0,878	0,747	0,833	0,583
5,0	1,247	1,101	1,206	0,994	1,002	0,779	0,445	0,883	0,751	0,862	0,596
5,5	1,254	1,109	1,250	1,021	1,019	0,788	0,447	0,886	0,756	0,885	0,607
6,0	1,259	1,116	1,290	1,047	1,054	0,796	0,448	0,891	0,759	0,903	0,617
7,0	1,269	0,122	1,357	1,087	1,059	0,811	0,449	0,898	0,764	0,941	0,633
8,0	1,276	1,128	1,415	1,121	1,079	0,822	0,451	0,903	0,768	0,968	0,646
9,0	1,280	1,133	1,465	1,153	1,095	0,830	0,452	0,906	0,770	0,992	0,657
10,0	1,283	1,137	1,508	1,182	1,109	0,839	0,452	0,909	0,771	1,013	0,667
15,0	1,298	1,150	1,662	1,271	1,149	0,864	0,455	0,917	0,777	1,088	0,696
20,0	1,309	1,156	1,757	1,327	1,171	0,878	0,456	0,922	0,780	1,129	0,712
25,0	1,312	1,160	1,821	1,363	1,185	0,887	0,457	0,921	0,782	1,146	0,725
30,0	1,316	1,162	1,866	1,389	1,194	0,894	0,458	0,926	0,783	1,174	0,730
infinito	1,337	1,175	2,144	1,541	1,245	0,927	0,461	0,934	0,789	1,279	0,739

131. *Considerazioni per le diverse qualità di terra, e per il caso che sia bagnata.* — La sabbia, la terra vegetabile, e la terra sciolta penetrate dall' umidità non subiscono alterazione notabile. La terra melmosa, e quella detta saponacea si sciolgono, e divengono suscettibili di colare quasi come farebbe un fluido. La spinta di questa specie di terre deve esser calcolata colle formule che convengono al caso de' fluidi dando al peso dell' unità di volume il valor conveniente. Le terre argillose e principalmente l' argilla pura, anche prima che divengano colanti aumentano di volume per l' acqua che imbevono. Ed un terreno omogeneo che aumenta di volume agisce contro un rivestimento nello stesso modo che farebbe un fluido di peso specifico eguale a quello di questo terreno: così sebbene i terreni argillosi secchi o leggermente umidi abbiano una gran coesione e sembrino richiedere rivestimenti poco grossi, pure essi a cagione del loro gran peso specifico divengono per le loro spinte i più pericolosi quando sono penetrati dall' acqua.

Comunque vario possa esistere nei diversi strati il terreno che ha da esser sorretto con rivestimento, sempre la spinta sarà minore di quella che produrrebbe quella specie unica che ha minor forza di coesione, e di attrito. Nè esiste alcun caso nel quale l' azion delle terre possa sorpassare quella di un fluido che abbia la stessa gravità specifica.

132. *Trasformazione de' profili a superficie verticale in profili a superficie esterna inclinata.* — Posto che il muro di rivestimento abbia la superficie interna verticale, e quella esterna inclinata possiam riguardarlo come composto di due muri uno a sezione rettangolare la cui base sia b' ed uno a sezione triangolare appoggiato al precedente con base in fondo $= p$. Allora nella formula per il moto rotatorio (129) invece di $\frac{1}{2}\, ab^2 g'$ dovremo sostituire

$$g'a\,(\tfrac{1}{2}\, b'^2 + b'p + \tfrac{1}{3}\, p^2)\,.$$

Ed ammesso che tutto al più sia $p = \frac{1}{6}\, b$ questa quantità riducesi $0{,}68\; ab'^2 g'$ la quale posta eguale all' altra trovasi $b' = 0{,}85.\, b$. Che se ad un nono dell' altezza partendo dalla base, la grossezza che viene ad avere il muro si ritrova

$$b' + \frac{8}{54}\, b' = 0{,}98.\, b$$

cioè presso a poco eguale alla grossezza che dovrebbe darsi al muro se avesse anche la parete esterna verticale. Possiam dunque concludere che quando l' inclinazione del muro è compresa tra o, e $\frac{1}{6}$ la sua grossezza ad un nono dell' altezza partendosi dalla base è presso a poco costante; lo che non potrebbe ritenersi se la pendenza superasse $\frac{1}{6}$, ed allora converrebbe aver ricorso alla formula

$$\tfrac{1}{2}\, b^2 = \tfrac{1}{2}\, b'^2 + b'p + \tfrac{1}{3}\, p^2$$

per dedurre il valore di b' espresso per b, quando è dato p. Si può conoscere col calcolo o coll' uso della tavola sopra riportata il valore di b.

Essendo la pendenza fra i rammentati limiti $0, \frac{1}{6}$, e conoscendosi la quantità a, a', g, g', f si terrà la seguente regola: dalla tavola si rileverà la grossezza che dovrebbe darsi al muro se la superficie esterna fosse verticale: al nono dell' altezza a partendo dalla base si troverà un' orizzontale eguale a questa grossezza trovata: in quell' orizzontale dall' estremo che rimane alla parte esterna del muro si condurrà una linea inclinata secondo la pendenza richiesta.

133. ***Equilibrio ne' piedritti.*** — Col nome di piedritti si comprendono tutte quelle parti delle fabbriche che fan da sostegno alle altre soprapposte o adiacenti, come muri, pilastri ec. E prendendo noi ad esaminare il caso più semplice e più usuale supporremo il piedritto simmetrico attorno ad un piano verticale ABCD (Tav. V fig. 9) che passi per la direzione della forza o spinta S. Quivi pure cadrà il centro di gravità G, e perciò essendovi tutte le forze, basterà considerare l'equilibrio di esse nel profilo ABCD facendo astrazione del resto. Composta la spinta col peso rappresentino queste due forze le rette OF, OG, e si abbia la resultante OR. Da questa nel caso dell'equilibrio non si ha da produr nè moto progressivo, nè moto rotatorio. Le condizioni adunque dell'equilibrio sono: 1.° che l'angolo OEC che è formato dalla direzione della resultante colla orizzontale sia maggiore dell' angolo limite d' attrito: 2.° che il punto E d'incontro della direzione della resultante colla base non cada fuori della base DC.

Per esprimere analiticamente queste condizioni d' equilibrio si intenda decomposta la spinta in due forze una P verticale, e l' altra Q orizzontale. La componente prima aiuterà il peso a produrre stabilità se è diretta di alto in basso, e la seconda sempre tenderà a produrre moto progressivo vincendo l' attrito, o moto rotatorio attorno al punto D. Sia M il peso del piedritto, sarà M+P la pressione sulla base DC, ed $f(M+P)$ l'attrito. Affinchè dunque non vi sia moto progressivo dovrà aversi

$$f(M+P) > Q$$

Per la seconda condizione si continui la verticale GI fino alla base e dal punto S ove è applicata la spinta si abbassi la verticale SP, e la somma de' momenti delle forze che producono resistenza dovranno superare il momento della spinta orizzontale cioè

$$M \times DI + P \times DP > Q \times SP$$

E quanto queste due differenze sono maggiori tanto più crescerà la stabilità.

Applicate le formule ad un muro rettangolare, la cui altezza sia a, b la grossezza, G il peso specifico, avremo per le due relazioni

$$f(abG + P) > Q$$

$$\tfrac{1}{2}ab^2 G + P \times DP > Q \times SP.$$

D'onde vedesi che se la spinta è orizzontale e perciò $P=o$ *ingrossando* il muro rettangolare si accresce la resistenza al moto progressivo in ragione semplice della grossezza, ed al moto rotatorio in ragione del quadrato della grossezza.

Se la spinta è alla sommità del muro alzandolo non si ha alcun vantaggio per il moto rotatorio, e solo per il progressivo cresce la resistenza in ragione dell'altezza.

Avendo luogo le due ipotesi precedenti sta la resistenza pel moto progressivo a quella pel moto rotatorio come $2fa : b$, e posto $f = 0,7$ come $1,4 \times a : b$, e poichè la base suole essere sempre minore dell'altezza possiam ritenere esser più facile che manchi la resistenza al moto rotatorio che quella al progressivo.

Esempio. Qual grossezza deve darsi ad un muro che è alto 5.^{m} perchè resista ad una spinta orizzontale di 3600^k, per ogni metro di lunghezza che si esercita alla sommità? Un metro cubo di materiale pesa 2000^k, e per la condizione della resistenza al moto rotatorio si ha

$$b > \sqrt{\frac{2.3600}{2000}} > 1,8$$

154. *Stabilità de' rinfianchi*. — Non potendo un muro resistere alla spinta che vi si esercita, si suole aggiungere per tutta la lunghezza del muro un rinfianco. Questo può farsi ingrossando uniformemente ovunque il muro, ovvero come suol dirsi a scarpa, cioè ingrossando con altro muro di sezione triangolare; e la scarpa, può farsi dalla parte della spinta, o dalla parte opposta. In tutti questi casi si aumenta la resistenza del muro, ma più nel terzo, meno nel secondo, e meno ancora nel primo. Infatti designando con a l'altezza del muro e del rinfianco triangolare, con b la grossezza del muro, e con p la larghezza della scarpa: quando questa si fa alla parte opposta alla spinta avremo dalle formule sopra stabilite per la resistenza al moto rotatorio

$$aG\,(\,^1/_2\,b^2 + bp + \,^1/_3\,p^2\,)$$

Quando rimane la scarpa dalla parte ove agisce la spinta

$$aG\,(\,^1/_2\,b^2 + \,^1/_2\,bp + \,^1/_6\,p^2\,)$$

E quando si ingrossa il muro uniformemente, e si vuole adoprare il medesimo materiale che ne' casi precedenti

$$aG\,(\,^1/_2\,b^2 + \,^1/_2\,bp + \,^1/_8\,p^2\,)$$

Con una di queste costruzioni si farà adunque equilibrio al momento della spinta che ho supposta orizzontale, ogni qual volta si determinino le dimensioni col porre il valore delle precedenti formule maggiore del rammentato momento.

Esempio. Un muro alto $4.^{m}$ e largo $0,^{m}4$ non potendo sostenere una spinta di 180 kilogrammi per ogni metro di lunghezza, la quale agisce orizzontalmente, e alla sommità del muro: si domanda come per tenere il muro in equilibrio deve esser grande la scarpa del rinfianco, o quanto deve essere l' ingrossamento. Per il rinfianco a scarpa da farsi alla superfice del muro opposta a quella che riceve la spinta si ha

$$4.^{m}2000^{k}\,(\,^1/_2.\,0,^{m}16 + 0,^{m}4\,p + \,^1/_3\,p^2\,)$$
$$> 180^{k}\,.\,4^{m} \text{ cioè } p > 0,^{m}02$$

Per il rinfianco a scarpa da farsi alla superficie del muro che riceve la spinta

$$4^{m}.2000^{k}\,(\,^1/_2.\,0,^{m}16 + \,^1/_2\,0,^{m}4\,p + \,^1/_6\,p^2\,)$$
$$>180.^{k}\,4.^{m} \text{ cioè } p > 0,^{m}048$$

vale a dire la scarpa del rinfianco è più che doppia del caso precedente.

Per un ingrossamento andante

$$4.^{m}2000\,.\,^1/_2\,(\,0,^{m}4 + x\,)^2 > 180\,.\,4^{m}$$

cioè $x > 0,^{m}025$. Vale a dire si avrà il vantaggio di mantener verticale la superficie del muro, ed ingrossarlo in pianta poco più che nel primo caso, ma il materiale che vi si impiega sarà anche maggiore di quello che occorre nel caso secondo

155. *Stabilità de' contrafforti*. — Si fortificano economicamente i muri con contrafforti; e questi pure posson farsi più utilmente alla parte opposta della spinta, ed anche è maggiore economia farli a tronco di piramide che a prisma, e con base a trapezio che a rettangolo. Meglio potrò esser compreso con le seguenti formule che determinano la stabilità de' contrafforti ne' differenti casi. Sia GglL (Tav. V fig. 10) la pianta del muro al quale corrisponde il contrafforte a parallelopipedo retto MPQN essendo G, L, i punti di mezzo tra questo e i contrafforti adiacenti. La spinta operi orizzontalmente e per tutta la lunghezza del muro, cosicchè quando si è considerato l'equilibrio per il tratto accennato del muro lo stesso accaderà anche per gli altri tratti. Condotto un piano verticale per la sezione di mezzo AB, rimarrà sù questa il centro di gravità del solido esaminato ed anche la direzione della spinta che è diretta da B

verso A. Rappresentiamo con a l'altezza del muro, con b la grossezza Gg, con c la lunghezza del contrafforte PM, con p la grossezza MN, con d l'intervallo GL, con G il peso specifico del muramento.

La resistenza al moto progressivo che è il peso moltiplicato per il coefficente d'attrito sarà $afG(bd+cp)$, la quale deve superare la spinta onde si abbia stabilità.

E la resistenza al moto rotatorio, che per la stabilità deve esser maggiore del momento della spinta, sarà $aG(\frac{1}{2}b^2d+bcd+\frac{1}{2}c^2p)$. Se il contrafforte fosse applicato alla parte interna questo momento sarebbe stato $aG(\frac{1}{2}b^2d+bcp+\frac{1}{2}c^2p)$, dalla quale espressione, essendo $p<d$, ben si vede che maggior vantaggio si ha ponendo il contrafforte esterno, cioè alla parte opposta della spinta.

Allorchè il contrafforte è un prisma a base trapezia essendo la coda PQ $=q$ e maggiore del collo o radice MN, la quale ritengo tuttora rappresentata con p, si troverà per il momento della resistenza a contrafforte esterno

$$aG(\tfrac{1}{2}b^2d+bcd+\tfrac{1}{6}c^2(2p+q))$$

e per il contrafforte interno

$$aG(\tfrac{1}{2}b^2d+\tfrac{1}{2}bc(p+q)+\tfrac{1}{6}c^2(p+2q))$$

Dalle quali formule si deduce esser più vantaggiosa per i contrafforti esterni la forma $p>q$ e per gli interni $p<q$.

Esempio. Un muro alto 8.^{m} della grossezza di 0,^{m}3 sia munito di contrafforti in forma di prismi a base trapezia con il collo di 1.^{m}4, con la coda di 0,^{m}8, e con la larghezza di 0,^{m}6. Si domanda a qual distanza dovranno esser collocati tali contrafforti, perchè il muro resista ad una spinta orizzontale interna di 820 per ogni metro di lunghezza, la quale agisce all'altezza della base di 6^m.

Nella formula stabilita per i rammentati contrafforti esterni facendo G $=2000$, $a=8$, $b=0,3$, $p=1,4$, $q=0,8$, $c=0,6$, e il momento della spinta $=820\times6\times d$ per tutta l'estensione d

$$8.2000(\tfrac{1}{2}.0,09.d+0,3.0,6.d+\tfrac{1}{6}\,0,36.3,6)>820.6.d$$

e perciò $d>2,62$.

Equilibrio de' poligoni e de' ponti sospesi.

136. *Dei sistemi di forma variabile, e condizioni del loro equilibrio.* — In tre classi si possono distinguere i sistemi di forma variabile. 1. Sistemi composti da verghe o da corde le cui parti sono legate insieme negli angoli per modo da non esserli impedito il moto di rotazione attorno a vertici di essi, per es.° i poligoni di travi per le tettoje: 2. Sistemi di corpi solidi in contatto le cui superfici comuni non sono altrimenti legate fra loro che per mezze della comune pressione, come sarebbero gli archi formati da cunei senza cemento. 3. Sistemi di verghe connesse, o di solidi soprapposti anche con cemento, allorquando la connessione o il cemento non può resistere alle forze agenti. Nei numeri seguenti prenderemo ad esaminare dei casi per ciascuna di queste classi, e qui vogliamo far comprendere quali condizioni si richiedono nell'equilibrio di questi complessi di corpi.

È evidente che mentre un sistema variabile sta in equilibrio, rimarrà in tale stato ancorchè si suppongano le sue parti unite invariabilmente fra loro; ma la proposizione inversa non è obbligo che sia vera. Dunque occorrono per i sistemi variabili le condizioni richieste anche per quelli

invariabili (128), e non saranno sempre sufficienti. Nei sistemi di prima e di seconda classe oltre al verificarsi quelle condizioni per il loro complesso dovranno aver luogo anche per ciascuna parte; e in quelli di terza dovranno adempirsi anche per ciascuna parte quando si porta in calcolo la resistenza delle connessioni che esiste fra le diverse parti. Diremo pertanto che 1.° nel complesso del sistema non deve esistere moto progressivo, nè moto rotatorio, 2.° non deve esistere moto progressivo, nè moto rotatorio in ciascuna parte del sistema considerata separatamente ponendo in calcolo la reazione reciproca che si fanno le parti, e la resistenza del legame che fra loro possono le parti avere. Apparisce manifestamente che verificata la seconda condizione ha luogo anche la prima, ma è utile in pratica avvertirle ambedue, perchè il calcolo per la prima è più facile che per la seconda, e in molti casi converrà cominciare da quello.

157. *Equilibrio nel poligono carico di pesi.* — Abbiasi una corda UBDFHV (Tav. V. fig. 11) attaccata cogli estremi ai due punti fissi U, V, e con altre corde vi si leghino a differenti distanze i pesi P, P′, P″, P‴, riman chiaro che

I.° Il poligono equilibrato giacerà tutto nel piano verticale che passa per i punti fissi, perchè tutte le forze sono verticali.

II.° Il prolungamento dei due ultimi tratti di fune UB, VH incontrerà in un punto O la verticale che passa per il centro di gravità dei differenti pesi, dovendo la resistenza dei punti fissi distruggere la resultante di tutte le forze agenti.

III.° Prese sopra una retta orizzontale (Tav. V. fig. 12) *ui* le lunghezze *ub*, *bd*, *df*, *fh* proporzionali ai pesi P, P′, P″, P‴, e condotte dai punti *u*, *b* due rette perpendicolari alla direzione dei lati UB, BD del poligono, queste s'incontreranno nel punto S, dal quale tirate le rette ai punti *b*, *d* *f*, *h*, queste oblique S*a*, S*b*, S*d*, S*f*, S*h* saranno respettivamente perpendicolari ai diversi lati del poligono, e rappresenteranno le loro relative tensioni. Infatti (Tav. V. fig. 11) con B*p* rappresentando il peso P, e con B*i* la tensione del lato o fune BD, si potrà compire il parallelogrammo B*pqi*, e perchè abbia luogo l'equilibrio la diagonale B*q* dovrà non solo essere nella direzione del lato UB, ma anche dovrà rappresentarne la tensione. Quindi il triangolo S*ab* dovrà esser simile all'altro *q*B*p*, perchè hanno i lati respettivamente perpendicolari; ed S*a*, S*b* saranno proporzionali a *q*B, *qp*, ovvero rappresenteranno le tensioni dei due lati UB, BD. Egualmente si dimostrerebbe che S*d* rappresenta la tensione di DF, ec.

IV.° Se vi è un lato DF orizzontale quello soffre minor tensione di tutti gli altri, perchè la linea S*d* che la rappresenta, sarebbe perpendicolare ad *ui*, e più piccola di tutte l'oblique.

V.° Ogni tensione può intendersi decomposta in due una orizzontale, ed una verticale, e la prima è per tutte costante e vien rappresentata da S*d*; mentre l'altra sola varia, ed è eguale alla somma dei pesi che esistono tra il lato orizzontale e quello di cui si tratta, per es.° la tensione S*u* del lato UB, si decompone nelle due S*d*, *du*.

VI.° La tensione in ogni lato sta in ragione inversa del seno della sua obliquità dalla verticale, e si ha una di esse per es.°

$$Su = \frac{Sd}{sen\ Sub}$$

VII. La tensione orizzontale in un lato è data da quella verticale moltiplicata nella tangente della sua obliquità dalla verticale: infatti per il lato UB si ha $Sd = ud \times tang\ Sud$

Ho supposto che il poligono sia formato da corde, ma egualmente potrebbe esser composto da verghe rigide appoggiate l'una all'altra, e connesse a cerniera nei punti B, D, F, H; ovvero posto a rovescio e sospeso tutto al di sopra dei punti U, V. Le condizioni e le conseguenze dell'equilibrio sarebbero le stesse di quelle che abbiam dedotte per il poligono funicolare, se non che nel caso che stia rovesciato si avranno delle pressioni o spinte in luogo delle tensioni. Questo poligono rigido oltre ad esser carico negli angoli può aver dei pesi in uno o più punti dei lati, come sarebbe anche quando i lati sono pesanti. Allora i pesi che gravano ciascun lato risoluti in due applicati all'estremità del lato, si ridurrà il poligono come carico ai vertici soltanto.

138. *Economia de' telai, e membri ausiliari de' travi.* — Il poligono equilibrato composto di verghe rigide pesanti e connesse fra loro a cerniera, ha la stessa figura tanto quando è pendente dai punti fissi, quanto quando è sostenuto al di sopra di essi; ma vi è la differenza che nel primo caso avendosi (*Int.* 132) l'equilibrio stabile non vi ha bisogno di alcuna aggiunta per ritenerlo in quella posizione, e nel secondo le oscillazioni lo possono far cadere nella posizione precedente, ed a ritenervelo stabilmente conviene ridurlo rigido per mezzo di verghe aggiunte le quali impediscano l'aprirsi e chiudersi degli angoli. A tale oggetto si combinano le verghe in triangoli, come nelle tettoje, nelle armature delle volte, degli archi ec. Il cancello che suol porsi alle steccate formato da spranghe parallele presenta nell'insieme più parallelogrammi, nè potrebbe avere stabilità se con una grande spranga obliqua non si riducessero i rettangoli in triangoli. Tali membri ausiliari non occorrono ai telai sospesi. Quindi meno minerale occorrerà nella costruzione di un ponte di ferro sospeso che in un ponte di ferro ad arcate. In generale di minore economia sarà il ritenere poligoni eretti che pendenti o sospesi.

In una tettoja triangolare BCD (Tav. V. fig. 8) si pone una catena, o un trave BD che per adattati incastri si collega ai due travi BC, CD, e impedisce ai loro estremi di allontanarsi, e di spingere orizzontalmente gli appoggi. Affinchè la catena pel proprio peso non si rompa, si unisce alla sommità C connesso un colonnello o monaco verticale CO, il quale giunge a poca distanza dalla catena e con una staffa la cinge per la parte di sotto. E ad impedire che si rompano i travi si sorreggono con razze, le quali si appoggiano per una parte e per l'altra al monaco, come mostra la linea OF. In una tettoja di figura pentagona IBCDE' si usa oltre la catena IE anche altri due colonnelli BQ, DP che sorreggono questa catena nei punti Q, P. Calcolati gli sforzi ai quali sono sottoposti questi diversi pezzi, converrà che le loro dimensioni dieno una resistenza assoluta e respettiva più che sufficiente per reggerli. Il trave BD tenderebbe pel proprio peso a rompersi nel mezzo come se fosse applicata la metà di esso (34) al punto O. Onde la forza sostenuta dal monaco, e dal colmo C del tetto sarà tutto al più eguale alla metà del peso della catena BD. E nep-

per sempre sarà tanta perchè suol porsi la staffa un pocolino distante dalla catena, onde essa si disponga in tensione e cominci a riposarvi solo quando ha ceduto quel tanto che naturalmente suol cedere. Il trave IE′ tende a rompersi in Q con una forza tanto minore della metà del suo peso, quanto il rettangolo IQ × QE è minore del quadrato della metà della lunghezza di questo trave. Di questa forza adunque tutto al più saranno gravati i colonnelli BQ, DP, e gli angoli B,D.

159. *Equilibrio ne' sistemi di travi* - Con più travi riunite in figura di poligono si compongono i tetti, i ponti, e le armature. Al peso di que' travi si aggiunge un carico soprapposto considerevole per cimentare l' equilibrio dell' insieme, e la resistenza de respettivi travi. Sogliono si fare delle commettiture, e delle fasciature di ferro per rendere il sistema più solido, ma in queste ordinariamente non si può molto contare, e più conviene procurare che tale sia la disposizione, che reggansi i travi scambievolmente fra loro in equilibrio, o almeno poca sia la spinta che è sorretta dai piedritti, o dalle commettiture. La regola generale per porre in equilibrio un poligono uniformemente pesante è semplicissima: si prenderà una corda e su di essa misureremo distanze respettivamente eguali alle lunghezze dei lati che ha da avere il poligono, attaccheremo a ciascun punto di divisione pesi proporzionali alla semisomma de' lati adiacenti: allora le due estremità della corda essendo tenute distanti quanto ha da essere la base del poligono, la figura che prenderà la corda sarà quella che deve presentare il poligono equilibrato. Che se il peso non sarà uniformemente distribuito, come ora ho ritenuto, e si conosca con qual legge è disposto, colla dottrina della risoluzione delle forze parallele sarà facile ritrovare quali pesi dovranno attaccarsi a ciascun punto di divisione della corda.

Anche col calcolo può risolversi il quesito. Si abbia un poligono in figura di pentagono (Tav. V. fig. 8) composto di quattro travi IB, BC, CD, DE′ appoggiati sù due sostegni I, E′. Poniamo per maggior semplicità che sia simmetrico rapporto alla verticale che passa per il colmo C non solo per la forma de' travi, ma anche per la distribuzione de' pesi. Sarà facile che questi comunque distribuiti si comprendano sempre ridotti (104) nelle loro estremità, cioè agli angoli del poligono. Abbiasi al colmo C un carico eguale a 2P; a ciascuno dei vertici B,D un carico Q; e a ciascuno degli appoggi I, E′ sia aggravato il carico V. Si chiami m l'angolo BCO, ed n l'altro IBQ. Per le condizioni d' equilibrio del poligono carico di pesi (157) la spinta orizzontale deve essere eguale in tutti i lati, e sempre rappresentata dal prodotto della tangente dell' angolo che fa il trave colla verticale nella pressione verticale che esso sostiene. Onde essendo P la pressione verticale sul trave superiore, e P + Q quella sul trave inferiore dovremo avere per l'equilibrio $P \, tang \, m = (P+Q) \, tang \, n$. Una di queste espressioni dà la spinta orizzontale sugli appoggi, e la verticale è $P+Q+V$.

Nel caso che al poligono voglia darsi una figura differente da quella che prenderebbe se fosse da per se equilibrato, converrà conoscere le spinte che cagionerebbe ne diversi vertici, ed ivi porre ritegni sufficientemente stabili per resistere ad es-

se: Nel tetto pentagono IBCDE'si aggiungerebbe la corda BD per impedire la mossa dei punti B,D; e supposto che 2R sia il di lei peso sarà (P + Q + R) *tang n* la spinta orizzontale (127) dei travi BI, DE', quella dei travi BC, CD, essendo tuttora P *tang m*: onde

P *tang m* — (P + Q + R) *tang n*

darà lo sforzo al quale deve resistere la corda BD.

Esempio. Si voglia trovare la lunghezza di quattro travi eguali che han da formare una tettoja con copertura in tutte le parti omogenea. Siano le distanze $IE'=2p$, $CO+BQ=q$. Porremo $IQ=x$, $QB=y$, e sarà

$$tang\, m=\frac{p-x}{q-y};\ tang\, n=\frac{x}{y}$$

e quindi avremo le tre equazioni $x^2+y^2=a^2, (p-x)^2+(q-y)^2=a^2$, e $2P=Q$ ovvero $tang\, m = 3\ tang\, n$ che è quanto dire $\frac{p-x}{q-y}=\frac{3x}{y}$

Da queste si possono eliminare le due incognite x, y e si avrà il valore di a. Ma convien più fare ne' casi particolari in queste stesse equazioni le occorrenti semplicizzazioni, sostituendo i valori numerici. Come chi dicesse: si voglia $q=p=5^m$, si riducono $x^2+y^2=a^2, 5=x+y, 25-a^2=15x-5y$ e si trova $a=3,^m66$. Egualmente ponendo $q={}^2/_5\, p=6^m$ si troverebbe $a=3.^m$

140. *Della catenaria omogenea.*— Si suole in meccanica chiamare catenaria la curva nella quale si dispone un filo flessibile o catena che sia sostenuto a due punti fissi per i suoi estremi, e sollecitato in tutti gli elementi dal respettivo peso. È omogenea quando il peso è eguale in tutti gli elementi: ma sempre può aversi per un poligono carico di pesi ad infinito numero di lati, stà tutta in un piano verticale, e presenta una semplice curvatura. Per la catenaria omogenea facilmente posson trarsi le seguenti conclusioni.

I. La catenaria omogenea ACB (Tav. V. fig. 13.) è una curva simmetrica attorno all'asse verticale che passa per il punto più basso, perchè anche quando i punti d'attacco AB non rimangono sulla stessa orizzontale, tirata un'orizzontale per l'attacco A più basso, la quale incontri la curva in B', si vede che l'equilibrio non verrà turbato ancorchè sia tenuto fermo questo punto B'. Allora essendo A, B' i punti d'attacco non vi è motivo per suppor la parte destra differente da quella sinistra.

II. Qualunque catena pesante o leggera quando ha la stessa lunghezza ed è attaccata agli stessi punti fissi produce la medesima curva. Ben si comprende ciò dopo aver veduto che la disposizione de' lati di un poligono carico di pesi dipende dal rapporto che han fra loro questi pesi, e non dal loro valore assoluto.

III. La tensione è minima nel punto più basso C, va crescendo a misura che più sono elevati gli elementi della catena, ed è sempre eguale ne due punti M, N, che si trovano sulla stessa orizzontale. Presa infatti (Tav. V. fig. 12.) sopra la linea *ui* una lunghezza proporzionale al peso della catena se si dividerà questa in un certo numero di parti, e nello stesso numero di parti proporzionali anche la catenaria, e poi si condurranno dai punti di divisione della retta *ui* altrettante rette perpendicolari agli elementi della catenaria, ove si sono notate le corrisponti divisioni, tutte quelle rette s'incontreranno in un punto S, e colla loro lunghezza determineranno le tensioni di quelli elementi nella curva.

IV. Due catenarie ACB, acb (Tav. V. fig. 13) diconsi simili se i lor punti di sospensione sono situati sulla stessa retta o sù rette parallele, e se la distanza di quelli della prima, sta alla distanza di quelli della seconda, come la lunghezza della prima catenaria sta alla lunghezza della seconda, cioè AB : ab :: ACB : acb. Quindi per due catenarie simili le tensioni ai punti similmente disposti sù ciascuna di esse sono tra loro nel rapporto dei pesi di queste catenarie.

V. La tensione in ogni punto di una catenaria può intendersi decomposta in due; una orizzontale che sarà eguale per tutti i punti, ed eguale a quella del punto estremo; ed in una verticale la quale eguaglierà il peso della porzione di catena che è compresa tra il punto estremo, e quello di cui si cerca la tensione.

VI. Presi due punti M, N sopra una stessa orizzontale, e condottevi due rette MO, NO tangenti alla curva, la verticale OC, che passa per il lor punto d' incontro O, è l' asse della curva. La tensione totale T, del punto N sta alla tensione verticale T_v, e alla tensione orizzontale T_o :: NO : OR : NR. E rappresentando con p il peso della porzione di catena NC si avrà

$$T_o = \frac{NR}{OR}\,p$$

Una catena adunque che fosse tesa in linea retta avrebbe la tensione orizzontale infinita. Non potrà perciò tirarsi una catena o corda pesante in perfetta linea retta ammenochè non sia in direzione verticale.

141. *Tensioni nella catenaria a piccola saetta.* — Allorchè la saetta (così chiamasi l' asse di simmetria della curva) B'b è piccola (Tav. V. fig. 14) senza darsi cura di ritrovare in numeri il valore della tensione orizzontale con i metodi precedenti è facile trovar quella, e le tensioni ai suoi due punti di sospensione B, A con regole e calcoli più semplici. Consideriamo la mezza catenaria BC, e si tirino le due tangenti Bg, bg ai suoi estremi. Queste s' incontreranno sovra un punto della verticale Gg che passa per il punto G di gravità della mezza catena, che posso per approssimazione prendere per il punto di mezzo. Ora rappresentando con Gg il peso $\frac{1}{2}\,p$ della mezza catena, nel parallelogrammo eGig, indicherà eg la tensione T al punto d' attacco B, e gi la tensione orizzontale T_o. Perciò prolungata la retta bg, e tirata la verticale BH, sarà il triangolo BHg simile all' altro Ggi, ed avremo

$$\tfrac{1}{2}\,p : T : T_o :: BH : Bg : Hg.$$

Che se chiameremo f la saetta della curva, l la distanza dei punti d'attacco, ed L la lunghezza della catena, sarà $\frac{1}{2}\,p : T : T_o :: f : \frac{1}{4}L : \frac{1}{4}l$ cioè

$$T = \frac{pL}{8f} \qquad T_o = \frac{pl}{8f}$$

e per approssimazione fatto

$$L = l + \tfrac{1}{6}\,f$$

si ha

$$T = p\,\left(0{,}125\,\frac{l}{f} + 0{,}02\right)$$

142. *Applicazione a ponti sostenuti sovra catene.* — Tirate da una sponda all' altra del fiume quattro o cinque catene eguali e parallele con piccola saetta vi si potrà sopra costruire un tavolato che serva a guisa di ponte. Sia il peso totale del ponte 2000^k, la larghezza del fiume 16^m, e la saetta che vuol lasciarsi sia 1^m; applicando l' ultima delle precedenti formule si avrà

$$T = 2000\,(2 + 0{,}02) = 4040^k$$

Questo sforzo dovrà tendere tutto l' insieme delle catene, e se sono cinque, ciascuna ne sosterrà un quinto cioè 808^k. Per i carichi che devono passare sul ponte poniamo che si ri-

duca tripla questa tensione, vale a dire 2424k. Lo sforzo che una catena può sopportare per un millimetro quadrato di sezione si porrà 10.k, e sarà 242,4 millimetri quadrati la sezione che deve darsi alla catena, ovvero 2 centimetri e mezzo di sezione circa. Seppure non si vorranno fare anche più grosse le catene per aver riguardo agli urti, e alla permanenza dei pesi.

Gli inconvenienti dei ponti posati sopra le catene sono il dover lasciare a queste una certa saetta, la quale porta la parte media del ponte troppo prossima all'acque; e il dover fare moltissimo stabili gli attacchi perchè resistano alle grandi tensioni che prendono le catene a piccola freccia; e la facilità di oscillare che riman sempre a questi ponti.

143. *Ponti sospesi al di sotto delle catene*. — Accenneremo qui anche i principj fisici della struttura ed equilibrio dei ponti, che son sorretti da verghe equidistanti pendenti da catene. Sia tesa una catena UBDFHV (Tav. V. fig. 15) ad un lato del ponte, ed un'altra eguale al lato opposto; stieno disposte pendenti da queste catene delle verghe verticali ed equidistanti fra loro AA′, BB′, CC′, ec., le cui parti inferiori giungano ad un medesimo livello e sostengano le travi del ponte sulle quali sta l'intavolato. A cascuna di queste verghe di sospensione corrisponde una opposta sull'altra catena, ed ognuna di tali coppie può aversi per carica della metà dell'intravatura del ponte che la precede e della metà di quella che la segue, o di un'intera intravatura. Così ogni verga sostiene il peso di mezza intravatura, e più il peso proprio della verga, il quale può esser trascurato. Può dirsi dunque che la catena è carica ai punti d'attacco A, B, C, ec. con pesi eguali (137).

Si conduca *ui* orizzontale (Tav. V. fig. 12) e divisa questa retta in parti eguali *ua*, *ub*, *bc*, ec. si tirino da' punti di divisione tante rette *u*S, *a*S, *b*S, ec. respettivamente perpendicolari ai tratti UA, AB, BC della catena del ponte. Tutte quelle rette concorreranno nel punto S, e rappresenteranno le tensioni dei correspettivi tratti di catena, mentre una distanza tra due divisioni, come *ua*, rappresenta il peso di mezza intravatura che io chiamo p. La perpendicolare S*d* misura la tensione nel lato orizzontale DE.

Vogliasi cercare la differenza d'altezza di un vertice A dal suo consecutivo B, Condotta l'orizzontale BA″ avremo il triangolo AA″B simile al triangolo S*ad* e perciò

$$AA'' : A''B :: ad : Sd.$$

Rappresenta A″B la lunghezza di un intravatura, S*d* la tensione orizzontale t_0, ed *ad* il peso della porzione A′D′ del ponte che può dirsi $= p' \times A'D'$, essendo p' il peso del ponte per un unità di lunghezza; onde si avrà

$$AA'' = \frac{A''B \,.\, p' \,.\, A'D'}{t_0}$$

Ma $A''B \,.\, p'$ non è altro che il peso p di un' intravatura, dunque è

$$AA'' = \frac{p}{t_0} A'D'$$

cioè la differenza di altezza di due vertici consecutivi della catena è proporzionale alla distanza della verticale che passa per il vertice più alto tra quelli che si considerano, e la verticale che passa per il punto più basso D della catena, e per semplicizzare può porsi $AA'' = k \,.\, A'D'$.

Se ora vuol conoscersi la legge colla quale stan disposti tutti i vertici della catena, si rappresenti con l la lunghezza di un' intravatura sa-

rà l, $2l$, $3l$,... nl, la quantità che deve moltiplicare k per ottenere la differenza d'altezza tra il primo e il secondo vertice, tra il secondo e il terzo, ec. cominciando dal più basso. Dunque l'altezza dei punti C,B... U sarà data dalle quantità

$$kl, kl+2kl, \ldots, (kl+2kl+3kl+\ldots+nkl) = \frac{n(n+1)}{2}kl$$

Quest' ultima espressione dà tutte le altre ponendo $n=1, 2, 3\ldots$ Facile anche riman dimostrare che tutti i vertici si trovano sovra una parabola, perchè chiamando x l'altezza di un vertice qualunque ed y la distanza orizzontale di questo vertice dal punto D più basso della catena, abbiamo

$$y=nl \quad x=\frac{n(n+1)}{2}kl$$

e perciò

$$x=\frac{n+1}{2}ky=\frac{k}{2l}(y+l)y$$

da dove si deduce

$$\left(y+\frac{1}{2}l\right)^2=\frac{2l}{k}\left(x+\frac{kl}{8}\right)$$

Equazione della parabola, che ha per parametro $\frac{2l}{k}$ che ha il vertice al di sotto del lato orizzontale per $^1/_8\,kl$, e che ha per asse la verticale che passa sulla metà del lato orizzontale DE.

Conosciuta l' altezza alla quale deve essere attaccata la catena, che io chiamo h, si avrà il valore di k

$$\frac{n(n+1)}{2}kl=h \quad k=\frac{2h}{n(n+1)l}$$

così le altezze successive delle verghe di sospensione kl, $3kl$, $5kl$, ec, son conosciute. Inoltre potrà aversi in numeri la tensione orizzontale, e tutte le altre tensioni dei lati. Infatti per la tensione orizzontale

$$k=\frac{p}{t_0}, \text{ dà } t_0=\frac{p}{k}$$

Quella del primo lato sarà

$$=\sqrt{(t_0^2+p^2)}.$$

Quella del secondo

$$=\sqrt{(t_0^2+(2p)^2)}.$$

Quella del terzo

$$=\sqrt{(t_0^2+(3p)^2)}.$$

Quella del lato n:^{mo} sarà

$$=\sqrt{(t_0^2+(np)^2)}.$$

Equilibrio de' gravi sopraposti, e degli archi.

144. *Dei gravi equilibrati sopra un piano inclinato.* — Dal solo notare la direzione della verticale di gravità si conosce se un corpo posato sovra un piano inclinato vi rimarrà equilibrato, perchè se dessa farà colla perpendicolare al piano un'angolo minore di quello limite d'attrito non potrà aversi moto progressivo (107), e se cadrà dentro della base che ha il corpo sul piano stesso mancherà il moto rotatorio. Posto che una di queste due condizioni non si verifichi, occorre adoprare una forza o potenza per ritenere il grave equilibrato sul piano, perchè se non il peso, almeno la resultante del peso e della forza aggiunta sodisfaccia alle due condizioni. In generale qualunque sia il numero di forze aggiunte conviene che la resultante del peso e di queste sia normale al piano onde si abbia mancanza di moto progressivo indipendentemente dall'attrito, e che cada entro la base perchè il corpo non possa concepire moto rotatorio. Che se ci contentiamo di aver l'equilibrio per effetto dell'attrito potrà anche non esser la resultante perpendicolare al piano, ma dovrà formare colla normale condotta sovr'esso un' angolo minore di quello limite d'attrito, e tanto verso la parte ove il piano si abbassa, quanto verso l'altra ove si solleva. Quin-

di la massima stabilità l'otterremo nel caso che la resultante sia normale al piano, e cada nel centro della base, avendosi allora da vincer l'attrito per produr moto progressivo verso l'alto e verso il basso, come da vincere egual momento di resistenza per produr moto rotatorio in qual si voglia direzione.

Si esprimono anche analiticamente le due rammentate condizioni d'equilibrio. La prima col decomporre ogni forza in una normale, e l'altra parallela al piano, e con porre delle componenti parallele la somma se sono cospiranti, o la differenza se sono opposte, maggiore della somma respettivamente o differenza delle componenti normali moltiplicata pel coefficente d'attrito. La seconda col porre il momento della resistenza maggiore di quello della potenza.

I. Sia il solo peso P che sollecita il corpo lungo un piano; che è inclinato alla verticale con un'angolo m; sia α la distanza della verticale di gravità dalla linea intorno alla quale può più facilmente rotare il corpo; x, y le coordinate ortogonali del centro di gravità, coll'origine sù quella linea, e colle x parallele al piano; sia f il coefficente d'attrito: dovrà aversi nell'equilibrio per il moto progressivo

$f\text{P}\,sen\,m > \text{P}\cos m$, cioè $f > \cot m$.

Per il moto rotatorio

$$\text{P}\alpha > o,\ \text{ovvero}\ \frac{x}{y} > \cot m$$

onde vedesi che in questo caso non può esistere equilibrio indipendentemente dall' attrito, se pure non è $m = o$, cioè non cessa il piano di essere inclinato;

II. Si abbia anche una forza F la quale fa un' angolo n col piano inclinato, e ritenute le notazioni precedenti, siano x', y' le coordinate ortogonali del punto ove è applicata sul corpo questa forza, prese nel modo che si è detto delle x, y; dovrà aversi nell'equilibrio circa al moto progressivo

$$\text{F} < \text{P}\frac{\cos m + f\,sen\,m}{\cos n - f\,sen\,n},\ \text{F} > \text{P}\frac{\cos m - f\,sen\,m}{\cos n + f\,sen\,n}$$

e per il moto rotatorio

$$y'\ \text{F}\cos n + x'\text{F}\,sen\,n + x\,\text{P}\,sen\,m > y\cos m$$

Il doppio segno usato mostra i limiti fra i quali si ha stabilità, o i due valori pei quali la forza F eguagliando la frazione pone in stato prossimo al moto il peso P. Quindi il punto di massima stabilità si ha quando è $f = o$ cioè $\text{F} = \frac{\cos m}{\cos n}$

III. Agisca la seconda forza F parallelamente alla base del piano inclinato cioè ad angolo retto colla prima, allora si avrà $n = 90 - m$, e perciò

$$\text{F} < \text{P}\frac{1 + f\,tang\,m}{tang\,m - f},\ \text{F} > \text{P}\frac{1 - f\,tang\,m}{tamg\,m + f}$$

e della seconda di queste abbiamo già mostrata un'applicazione (126). Anche qui possiamo dire che la massima stabilità si ha nel caso dell' equilibrio astratto, quando $f = o$ cioè $\text{F} = \text{P}\cot m$ ovvero $\text{P} = \text{F}\,tang\,m$.

145. *Dei gravi sopraposti, ed equilibrati fra più piani inclinati.* — Sia un grave collocato sù due piani inclinati AC, BC (Tav. VI fig. 1) posando sugli appoggi A,B. Il peso del grave può intendersi che sia applicato al suo centro G di gravità, e che agisca nella direzione verticale GV, e supposto che da un appoggio A siasi alzata una normale AP al piano AC, rappresenti PG il peso, e si risolva questo in due forze secondo AP, BP. Posto che questa decomposizione possa farsi, cioè che la verticale GV rimanga tra i due piani, è da notarsi se anche la componente che stà nella direzione BP rimane normale al

piano, nel qual caso ambedue le componenti son distrutte dalla resistenza de' piani. Supposto che la componente diretta secondo BP sia obliqua, o l'obliquità è minor dell' angolo limite d' attrito e si avrà tuttora equilibrio, ovvero supera quest' angolo ed allora il corpo si muoverà.

Riposi il corpo sù due piani non per un punto solo ma per l' estensione di una base aa', bb' basterà per l'equilibrio astratto che da un punto della GV si possono abbassare due linee normali sù piani, e gli incontrino entro le basi aa', bb'. Lo che corrisponde a dire che alzate le normali dagli estremi di queste basi il parallelogrammo che resulta dalla loro intersezione sia tagliato dalla verticale GV. Che se tal condizione non verificasi, e riman questa tutta al di fuori, come sarebbe G'V'; dal punto G' ove taglia la perpendicolare aG' si tiri la retta G'b', e se questa fa col piano un'angolo minore di quello che è limite d' attrito per effetto di questa resistenza non si avrà movimento.

Nel caso dell'equilibrio le pressioni esercitate sugli appoggi si ottengono nelle componenti normali ai piani, delle quali ho parlato. Sia P il peso del corpo, e A,B quello sù due appoggi avremo

P : A : B :: *sen* APB : *sen* BPG : *sen* APG

ovvero condotta la verticale CD

P : A : B :: *sen* ACB : *cos* BCD : *cos* ACD

Queste pressioni possono rimuovere i piani dal lor posto, e così può venir turbato l' equilibrio. Rimane però facile conoscere se quest' effetto avrà luogo, perchè la pressione che si fa sù ciascun piano decomposta in due forze, una delle quali sia normale a quel piano sù cui il precedente tende a scorrere, ed una parallela, la prima produce un' attrito, o un' impedimento al moto, che dalla seconda si tende a imprimere.

Ho parlato di piani giacchè anche essendo soprapposti solidi ad altri di figure rotondeggianti, debbono considerarsi in luogo di questi i piani tangenti ai loro punti di contatto. Quindi scorgesi che da tali principj si rilevano le condizioni d' equilibrio tra gli ammassi di pietre, e di laterizj che si usano sulle costruzioni... Essendo i solidi soprapposti in molto numero deve aversi cura che le condizioni d'equilibrio sieno ademplite non solo per ciascun solido, ma anche per le diverse combinazioni o aggruppamenti di essi. Così se cinque gravi stanno tutti soprapposti in un' ammasso, non solo la verticale di gravità del primo deve incontrare nel modo che si è detto il secondo che è sottoposto, ma anche quella del primo e secondo, riguardati come un sol corpo, ha da incontrare il terzo; e quella del primo del secondo e del terzo, considerati uniti in un sol corpo, deve incontrare il quarto, e così di seguito. Le pressioni vanno tanto più crescendo quanto i solidi sono più profondi, ma sempre si mantiene lo stesso l' angolo limite d' attrito; e sempre la resultante delle forze deve incontrare la base che serve d' appoggio. Onde non variano le condizioni d'equilibrio al crescer de' solidi ammassati, che per essere le spinte resultanti da un maggior numero di pesi soprapposti, e per dovere aver luogo la lor verificazione in un maggior numero di congiunzioni. Al crescer però dell' ammasso cresce il bisogno di accertarsi che la resistenza dei solidi che stanno alla base sia capace di sostenere le spinte dei superiori.

147. *Equilibrio degli archi formati da cunei soprapposti.*— Sieno diversi

cunei sopraposti per modo da formare una porzione di arco (Tav. VI fig. 2), e sull'ultimo agisca una spinta orizzontale P. Si voglion determinare le condizioni d'equilibrio, e prima vogliónsi conoscere le pressioni tra i cunei. Sull'orizzontale MA si conduca la veticale *a*S che rappresenti la spinta P, si prenda *ab* che rappresenti il peso dell'ultimo cuneo. Quando questo è in equilibrio la retta S*b* rappresenterà la pressione, che esercita contro il penultimo cuneo, e sarà normale alla direzione di quella pressione; infatti composto il peso del cuneo colla forza P, deve aversi il triangolo delle forze simile all' altro S*ab*, e la forza P stà al peso del cuneo, alla pressione

:: S*a* : *ab* : S*b*.

Parimente nel caso dell' equilibrio rappresentando con *bc*, *cd*, ec. i pesi de' successivi cunei, le loro spinte sono date nelle oblique S*c*, S*d*, e queste rimangono perpendicolari alle direzioni in cui si effettuano le pressioni. Queste direzioni compongono un poligono $m\,m'\,m''\,m'''$ ... che è detto *linea di pressione*. Ogni lato del poligono indicando una pressione, deve essere normale al taglio del cuneo che attraversa. Chè se non fosse normale scorrerebbe un cuneo sull'altro, e se passasse fuori del taglio del cuneo ruoterebbe il cuneo attorno alle spigolo che riman più prossimo alla linea di pressione. La prima delle rammentate condizioni d'equilibrio si riscontra anche dalla direzione che prendono le rette S*a*, S*b*, S*c*, ec. perchè se d'esse sono parallele ai tagli dei cunei certo è che le pressioni sono a questi perpendicolari. Ad evitare il moto progressivo non occorre che siano precisamente perpendicolari, basta ancora che l'obliquità non ecceda l'angolo limite d'attrito. Quindi le rette S*b*, S*c*,... facendo un'angolo minore di quello limite d'attrito con le direzioni dei tagli de' cunei non potranno questi scorrere uno sull'altro. E solo quando l'inclinazione supererà il detto angolo limite, scorreranno i cunei in alto o in basso secondochè riman quella al di sotto o al di sopra delle rammentate rette.

Questa relazione di posizione tra le rette S*b*, S*c*,... e i tagli dei cunei dà il modo di fissare i tagli dei cunei convenientemente per l'equilibrio quando son noti i loro pesi, o viceversa di determinarne i pesi quando son dati i tagli. Le rette S*b*, S*c*,... servono anche per ritrovare la spinta orizzontale che l'arco equilibrato ha alla chiave, perchè tirate le due rette *b*S, *c*S nella direzione dei due correspettivi tagli de' cunei, vien determinato il punto S, e per conseguenza la perpendicolare S*a*, che rappresenta la spinta alla chiave.

Questa può esser data dal premere di un'altra contrapposta metà di arco. Al crescere della medesima la linea di pressione viene ad alzarsi e ad avvicinarsi all'estrados dell'arco, come al diminuire si abbassa verso l'intrados. Per aumentarla o per diminuirla si accrescerà o scemerà la grossezza dell'arco verso la chiave. E siccome la linea di pressione bassa può tagliare l'intrados come l'alta l'estrados, e dar luogo al moto rotatorio; conviene studiare per questa linea la posizione media tra l'intrados e l'estrados. Ben si scorge che in un'arco omogeneo, e di grossezza uniforme la linea di pressione non avrà la posizione media che quando la curva sarà una catenaria, e se in questo caso i tagli dei cunei saranno normali all'intrados avrà luogo l'equilibrio anche per il moto pro-

gressivo. Non premendo però con precisione la posizione media per la linea di pressione, molte altre curve potrà presentar l'arco equilibrato a seconda della sua grossezza. Nè difficile rimarrà farli obbedire a qualunque curva, purchè si faccia l'arco di differente grossezza nei diversi punti. Che anzi non sarà da temersi che quella linea tagli mai l'intrados, quando l'arco è simmetrico per ambedue le parti, tendendo una parte a rotare in basso colla stessa forza che ha per questa rotazione la parte opposta. Solo potrà avvicinarsi all'intrados, e poi da quello allontanandosi potrà arrivare a tagliare l'estrados come mostra la linea *nvr*.

148. ***Formule per l'equilibrio di un'arco, e deduzioni tratte dalle medesime.*** — L'espressione analitica, che determina l'equilibrio per il moto progressivo, è data dalla condizione che la resultante della spinta orizzontale alla chiave, e del peso della porzione di arco superiore alla sezione ove ritienesi che abbia luogo il movimento, sia normale a quella sezione se vuolsi adempito l'equilibrio astratto, e vi faccia un angolo minore di quello che è limite d'attrito se basta assicurarsi della non esistenza del moto. Sia P la spinta alla chiave UV (Tav. VI fig. 2), sia π il peso della porzione di arco UVRS, si chiami m l'angolo per cui la sezione di rottura RS è inclinata alla verticale. Per la dottrina del piano inclinato (144. III) nello stato prossimo al moto dovrà aversi l'equazione

$$\pi = \mathrm{P}\,\frac{\tang m \pm f}{1 \mp f \tang m}$$

Da questa formula rilevasi che la imposta dell'arco può essere anche orizzontale, quando si considera l'attrito. Fatta astrazione da questo non potrebbero i letti de' cunei o l'imposta dell'arco porsi mai orizzontali, infatti si ha in questo caso

$$\pi = \mathrm{P}\,\tang . m$$

Le quantità π, P non solo possono esprimere il peso dell'arco, e la spinta alla chiave, ma anche qualunque altra forza che agisca in queste direzioni, cosicchè adoprandosi una forza verticale π' ed una orizzontale P' per tenere l'arco in equilibrio, si intenderà che queste sieno comprese nei valori di π, P. L'equilibrio sussiste per tutte le variazioni che può prendere il valore di π, che son comprese tra i due segni usati nella formula, i quali assegnano i due limiti. La condizione determinata dalla formula deve aver luogo per tutte le giunte dei cunei, come per le imposte dell'arco.

Per esprimere le condizioni relative al moto di rotazione attorno ai due lati superiore e inferiore della giunta RS, si supporrà che la porzione dell'arco VRSU tenda a rotare prima dall'alto in basso sul lato R, e poi dal basso all'alto sul lato S. La forza P sia applicata in U: che è il caso in cui ha essa minor tendenza a favorire il moto. Sia il peso π in G. Sieno x, y le coordinate orizzontale e verticale del punto R; x', y' quelle del punto S; a, b quelle del punto U; ed a', b' quelle del punto G. Avremo nel primo caso per l'equilibrio $\mathrm{P}\,(a - x) < \pi\,(b' - y)$, e nel secondo $\mathrm{P}\,(a - x') > \pi\,(b' - y')$.

Queste formule esprimono che la direzione della resultante delle forze applicate per tutta la porzione di arco VRSU deve passare tra i punti R, S. Qui pure dobbiam ripetere: nel modo che abbiamo espressi i momenti delle forze π, P, dovranno esprimersi anche quelli di tutte le altre che potessero agire sull'arco: per tutte le

giunte dovranno aver luogo queste condizioni: e due limiti di variabilità hanno le forze.

149. *Applicazione alla piattabanda.* — Sia MNN'M' (Tav. VI fig. 3) una piattabanda orizzontale di uniforme grossezza appoggiata ai pulvinari MN, M'N', si avrà nel caso dell'equilibrio astratto relativo al moto progressivo

$$\pi = VRSU = UV . VR + {}^1/_2 \overline{UV}^2 . tang\, m$$
$$= P\ tang\, m$$

e perciò

$$UV . VR = (P - {}^1/_2 \overline{UV}^2)\ tang\, m.$$

Quindi essendo P, ed UV quantità costanti dovrà al variare delle sezioni mantenersi sempre VR in un rapporto costante con *tang m*. Ora essendo C il punto ove concorrono le due rette UV, SR avremo VC costante per tutti i tagli de' cunei, perchè

$$VC = \frac{VR}{tang\, m}$$

Quindi per prima condizione d'equilibrio, in questo genere di volte deve esistere un centro C, ove vergano tutti i tagli de' cunei, ed i pulvinari stessi. E se vuolsi aver riguardo all'attrito i tagli de' cunei non potranno allontanarsi dalla determinata direzione più dell'angolo limite di questa resistenza.

La seconda condizione, che è relativa al moto rotatorio, richiede che determinato il triangolo AMN con inalzare dall'origine M una normale al pulvinare, entro questo triangolo (145) rimanga il centro di gravità della semivolta VUNM. Infatti i successivi letti de' cunei sono meno inclinati del pulvinare, e perciò in tal caso a molto maggior ragione inalzando la perpendicolare sù quelli essa comprenderá il centro di gravità della corrispondente porzione di volta. Quest' ultima condizione si esprimerebbe analiticamente con

$$b^3 - 3(a^2 - c^2)\ b + 6\, a\, c^2 = 0$$

ove *c* è la grossezza UV, *b* è lo sporto TN del pulvinare, ed *a* la semitratta VM della volta. Da questa equazione conoscendo due delle rammentale quantità può determinarsi l'altra; per es.° fatto $c = 1$, e $b = 1$; cioè essendo il pulvinare inclinato ad angolo semiretto avremo

$$a^2 + 2a - {}^4/_3 = 0, \text{ ed } a = 0{,}5$$

vale a dire la volta non potrà avere tratta maggiore della grossezza. Posta l'inclinazione del pulvinare di 30° si sarebbe trovato $a = 3{,}76$ cioè la tratta della volta avrebbe tutt' al più potuto essere sette volte e mezzo la grossezza. Scorgesi che con inclinar meno il pulvinare può darsi alla volta tratta maggiore, ma è però da avvertirsi che in pratica cresce la difficoltà di costruzione, perchè se i cunei non fossero con somma perfezione lavorati, e ben serrati, non avrebbe più luogo l'equilibrio.

150. *Spinta degli archi.* — La spinta orizzontale varia nei diversi punti dell'arco, e sapendosi colla dottrina (147) esposta, quale è la pressione nei diversi letti de' cunei D*d*, D'*d'*, ec. (Tav. VI fig. 4), posto che l'arco sia collocato sopra un piedritto ME agiranno queste pressioni con una leva ES, ES', ec. per rovesciarlo (suppongo *d*S, *d'*S', ec. tangenti all'arco, e normali ad ES, ES', ec.). Occorrerà adunque conoscere i prodotti delle pressioni ne' respettivi bracci di leva, e questi saranno i momenti delle spinte tendenti a rovesciare il piedritto. Si prenderà fra tali momenti il maggiore, e per l'equilibrio d'esso dovrà superare il momento di stabilità del piedritto.

L'espressione analitica delle diverse spinte può desumersi dalla dottrina de' poligoni (139). Per conseguenza onde ottenere la spinta in

una sezione converrà decomporre il carico dell'arco che esiste tra la chiave, e la sezione in questione in due applicati uno alla chiave, e l'altro alla sezione. La prima di queste componenti moltiplicata per la tangente dell'angolo d'obliquità dell'arco colla verticale in quella sezione darà la spinta cercata. Con tal regola si potrebbe dividere in un certo numero di parti il semi-arco, e considerando ciascuna parte come un lato di poligono, determinarne la spinta. La somma di tutte sarebbe lo spingere dell'arco contro il rinfianco orizzontale. Per farsi idea approssimativa ma più semplice di questa spinta, potranno tirarsi due tangenti alla chiave e all'imposta, e dal punto d'incontro di queste si abbasserà una normale all'arco. Quindi si condurranno pure dalla chiave e dall'imposta due rette al punto ove questa normale incontra l'arco. Quelle si avranno per due lati di poligono, e la loro spinta, quando sieno supposti aggravati dal respettivo carico che appartiene alle due porzioni di arco, darà le due spinte principali dell'arco: cioè sul pulvinare, e nel punto indicato. Questo quando avrò mostrato essere il luogo di più facile rottura, si comprenderà doversi anche la sua spinta prendere in considerazione al pari della prima, ogni qual volta per la stabilità dell'imposta può il piedritto che sostien l'arco aversi per prolungato fino alla sezione che rimane in quel punto. Finalmente dirò che contentandosi di un'approssimazione anche minore si può per calcolare la spinta tirare la corda dalla chiave all'imposta, e moltiplicare la tangente dell'obliquità di questa corda per la componente del carico del semi-arco, che verrebbe applicata alla sommità della corda. Chiamerò α l'angolo d'obliquità, e p quella componente del carico, e si avrà per la spinta approssimativa dell'arco

$$p \tan \alpha = p \frac{AM}{AV}$$

essendo AM la semi-apertura dell'arco, e AV la sua saetta. Onde stabiliremo 1:° La spinta è maggiore in quelli archi che hanno maggior grossezza o carico verso la chiave; ed è minore in quelli nei quali la grossezza scema all'avvicinarsi alla chiave. 2:° La spinta stà in ragione inversa dell'altezza del vertice sul punto considerato, e in ragion diretta dell'apertura che ivi ha l'arco. 3:° La spinta contro i piediritti che sostengono l'arco è in ragione inversa della saetta dell'arco, e in ragion diretta della sua corda. 4:° Quindi possiam dire che gli archi a sesto ottuso danno molta spinta e poca quelli a sesto acuto.

Essendo obliqui i due pulvinari anche la componente del peso del semi-arco che viene, a seconda di quello che si è detto, applicata al pulvinare produrrà una spinta. Quindi allora sia che si tenga conto della spinta appartenente a questa componente di peso, sia che si consideri l'arco come un grave collocato fra due piani inclinati, si ritrova che rappresentato con π' il peso del semi-arco, e con β l'inclinazione del pulvinare sarà $\pi' \cot \beta$ la spinta orizzontale, e

$$\frac{\pi'}{\operatorname{sen} \beta}$$

quella normale al pulvinare.

151. *Esperienze sovra l'equilibrio delle volte, e resultati che se ne sono ottenuti.* — Un'arco composto da cunei di legno sostenuto sù due piedritti, i quali possan prendere un moto di rotazione servirà a fare esperienze sulla spinta degli archi, su punti di lor rottura, sul nu-

mero delle parti nelle quali vien diviso l'arco nell'atto che si rompe, e sulla alterazione che soffre la sua curva ne' tempi precedenti a quello della rottura. Si porranno a tale oggetto dei contrappesi ai piedritti i quali misurino la spinta che soffrono, e con pesi diversi si aggraveranno le parti dell'arco che vuolsi cimentare. Sono state eseguite esperienze sovra modelli costruiti in differenti dimensioni ed anche sonosi fatte molte osservazioni sugli archi già esistenti mentre erano per perdere l'equilibrio, e se ne è concluso

1.° È ben raro il caso che possano gli archi rompersi per moto progressivo de'cunei, e d'ordinario si guastano rotando essi alcuni dall'esterno all'interno, e altri dall'interno all'esterno.

2.° Nella rottura degli archi a tutto sesto, le parti superiori si abbassano appoggiandosi l'una contro l'altra alla chiave, e allontanando le parti inferiori che si rovesciano girando sù lati esterni delle loro basi.

3.° La rottura tende a farsi al di sotto del mezzo di ciascun semi-arco, ed ivi i cunei si allontanano dalla centina, mentre vi entrano dentro quelli alla chiave. L'arco si divide in quattro parti, e due verso il colmo, e altre due verso i piedritti: cioè si fanno nell' arco tre sezioni una alla chiave e due ai fianchi.

4.° Quest'ultime due sezioni di rottura negli archi a tutto sesto accadono al terzo del semisesto misurato dall'imposta.

5.° Applicando alle parti più basse dell'arco forze che tendono ad avvicinare verso il centro i cunei: quando queste forze sono deboli si apre l'arco ai fianchi rotando i cunei sull'intrados, e alla chiave rotando essi sull'estrados: quando queste forze servono precisamente per l'equilibrio si han delle oscillazioni abbassandosi e alzandosi l'arco alla chiave, e dilatandosi, e stringendosi alternativamente ai fianchi. Poste le forze eccedenti l'arco si rompe prendendo i cunei dei moti opposti a quelli del primo caso.

6.° I punti ove i materiali cominciano a cedere non sono precisamenta quelli ove ha luogo la rottura finale; essi si abbassano a misura che la deformazione dell' arco progredisce.

7.° Nelle volte rinfiancate con riempimento orizzontale si produce la rottura in quattro parti, e un punto di rottura essendo alla chiave, gli altri due sono a questo molto prossimi.

8.° I primi corsi di cunei possono esser collocati senza armatura, e non cominciano a scorrere che quanto l'inclinazione de'cunei sull'orizzonte è di 39° in 40°.

153. *Punti di rottura in un arco*. — La linea di pressione non potendo tagliare l'intrados (147) e solo l'estrados mostra che se delle rotture possono aver luogo in un'arco, i punti più esposti sono i due fianchi dell'arco: Di quì il bisogno di rinfiancare le volte e particolarmente quelle che hanno piccola grossezza. Posto che la grossezza dell'arco sia uniforme riman facile determinare il luogo ove accaderà la rottura. Condotte due tangenti ad esso una alla chiave ed una all'imposta, dal punto ove esse s'incontreranno abbassata una normale all'arco, quella l'incontrerà nel luogo che si ha da riguardare come il più esposto alla rottura. Questa regola appoggiata al principio che il semi-arco possa considerarsi come un solido, cimentato alla rot-

tura da due forze dirette secondo le due rammentate tangenti avrebbe bisogno di esser confermata dall'esperienza, ed all'opposto per i resultati sperimentali ottenuti da Boistard converrebbe ritenere il luogo di rottura alquanto più basso di quello che accenna la precedente teoria (151). Per quello che si troverà stabilito circa all'angolo di rottura nelle seguenti tavole, dovute al Capitano Petit, comparirà questo luogo non così facilmente determinabile, onde per tal soggetto rimando a quelle.

153. *Equilibrio degli archi avuto riguardo alla tenacità de' cementi.* — Da questa resistenza due vantaggi possono ottenersi 1:° quello di resistere l'arco alla rottura colla forza di coesion de' cementi, 2:° l'altro, che in caso di rottura il legame dei cementi non lascia che si scomponga l'arco in tutte le sezioni, ma solo in quelle che son necessarie alla sua caduta. Per la prima di queste considerazioni siamo condotti a dovere nelle formule già adottate (148), ove è posto $f = o$, aumentare le forze che impediscono il moto progressivo del prodotto dato dalla superfice di rottura moltiplicata per il valor della forza di coesione che si ha da vincere in ogni unità superficiaria nel produr quel moto. E nelle formule del moto rotatorio aggiungere la resistenza respettiva alla rottura in una sezione dell'arco. Ho detto che in questo caso nelle formule non deve considerarsi l'attrito, perchè secondo l'esperienze di Morin (75) non può sommarsi la resistenza dell'attrito con quella della tenacità de' cementi, ma solo si ha da riguardare come capace di resistere al moto quella che di esse è maggiore: nè ho potuto supporre che l'attrito dia resistenza maggiore che la coesione de' cementi. Supposto poi che prema assicurarsi della stabilità, porremo in calcolo come qui appresso l'attrito, e non faremo conto della tenacità de' cementi.

Movendosi dalla considerazione del secondo tra i noti vantaggi hanno i matematici supposto che due, o al più tre sezioni si facciano nell'arco in caso di rottura. Posto che possano prodursi due sole sezioni B*b*, D*d* (Tav. VI fig. 4), cadrà l'arco B*b*, *d*D tutto di un pezzo rimuovendo ed allontanando colla sua spinta i pezzi B*b*, C*c*, e D*d* E*e*. E posto che si apra l'arco nelle tre sezioni B*b*, UV, D*d* roteranno i pezzi attorno ai punti C, B, U, D, E. In questo secondo caso apresi l'arco al di dentro in V e al di fuori in *b*, *d*, appunto come se il poligono CBUDE ruinasse aprendosi l'angolo U del colmo, e chiudendosi gli angoli laterali. Ora cercheremo per ambedue queste mosse le condizioni dell'equilibrio. Dai centri di gravità G, G' dei pezzi BU, BC, si calino le verticali GR, G'T e dai punti B, D si conducano BF, DF, perpendicolari alle sezioni B*b*, D*d*. Queste sezioni sieno prolungate fino in A, ove concorreranno sulla verticale che passa per la chiave dell' arco. Tenda l'arco BVD a scendere rimuovendo le sezioni B*b*, D*d*. Ritenuto π per il peso del solido BV, e π' per quello del solido CB, potremo intendere come si disse nei poligoni, applicato un peso 2π al punto F che prema normalmente sui piani B*b*, D*d*, spingendo secondo le rette FB, FD. La spinta orizzontale che esso esercita in B sarà

$$\pi \, tang \, \text{BFK} = \pi \cdot \frac{\text{BK}}{\text{FK}} = \pi \cdot \frac{\text{AK}}{\text{BK}}$$

essendo i triangoli BFK, e BKA ambedue rettangoli e simili. E la spinta verticale ivi esercitata sarà eguale

a π. Ora la prima spinta tende a rimuovere il solido AB, al qual moto resiste l'attrito con forze

$$= f\pi + f\pi'.$$

Quindi nello stato prossimo al moto si avrà:

$$f\pi + f\pi' = \pi . \frac{AK}{BK}$$

ovvero $f\pi' = \pi . \left(\frac{AK}{BK} - f\right)$

E questa è l'equazione per il caso che si abbia solo moto progressivo. Potrebbesi per altro senza aumentare il numero delle sezioni ottenersi moto progressivo nell'arco BVD, e rotatorio nei due pezzi BC, ED rovesciandosi il primo di questi attorno all'angolo C col momento:

$$\pi . \frac{AK}{BK} BI$$

Ma a questo momento resiste la spinta verticale nell'altro momento π . CI, ed il peso π' con π'.CT. Perciò eguagliando il momento della spinta a quello delle resistenze e dividendo per BM si ottiene

$$\pi . \frac{AK}{BK} = \pi \frac{CI}{BI} + \pi' . \frac{CT}{BI}$$

ossia $\pi' . \frac{CT}{BI} = \pi \left(\frac{KA}{BK} - \frac{CI}{BI}\right)$

equazione di condizione per questo secondo caso.

In terzo luogo può darsi che il moto rotatorio si faccia nei pezzi BC, DC, e che si abbia a riguardare CBUDE come un poligono mobile attorno ai suoi angoli C,B, U,E. Riterremo le denominazioni che abbiamo adottate parlando della spinta dei poligoni (139), e invece delle forze π, π' prenderemo le loro resultanti applicate ai punti U,B ed ai punti C,I, ed avremo

$$2P = 2\pi . \frac{BR}{BK} \quad Q = \pi . \frac{RK}{BK} + \pi' . \frac{CT}{CI}$$

$$V = \pi' \frac{TI}{CT}; tang\, m = \frac{BK}{UK}; tang\, n = \frac{CI}{BI}$$

e per conseguenza la spinta orizzontale nel termine A, sarà

$$P . tang\, m = \frac{\pi . RB}{UK}$$

e la spinta verticale

$$P + Q + V = \pi + \pi'$$

onde l'attrito che soffrono i piedritti per essere rimossi sarà eguale a $f\pi + f\pi'$, e questa quantità dovrà eguagliare nello stato prossimo al moto la spinta orizzontale, e quindi si avrà

$$f\pi' = \pi \left(\frac{RB}{UK} - f\right)$$

prima condizione da aver luogo anche per questo equilibrio.

Di più si richiederà che sia

$$P\, tang\, m = (P + Q)\, tang\, n$$

e sostituiti qui i valori di sopra trovati, otterremo $\pi' \frac{CT}{BI} = \pi \left(\frac{BR}{UK} - \frac{CI}{BI}\right)$

Possiamo dunque stabilire le regole seguenti per esaminare la fermezza di un arco dato; si calcoli per vari punti B se han luogo le equazioni proposte, e se i primi membri riusciranno per tutto maggiori de' secondi staremo certi sulla totale sicurezza dell'arco. Questa regola nella pratica si semplicizza, giacchè si è ritrovato costantemente, che quando si verifica la seconda delle due equazioni dependente dalle ipotesi prima delle sole due sezioni, la quale fu proposta dal Delahire, restan sodisfatte non solo la prima di questa ipotesi, ma anche le altre che abbiamo stabilite per il caso delle tre sezioni nelle quali suol dividersi l'arco coerentemente all'ipotesi fatta dal Coulomb, ed ai resultati spérimentali. E per conseguenza basta calcolare la sola equazione $\pi' . \frac{CT}{BI} = \pi \left(\frac{KA}{BK} - \frac{CI}{BI}\right)$

Queste stesse equazioni potranno valere per determinare la grossezza de' piedritti, o una qualche altra dimensione dell'arco, quando siano noti

gli altri elementi. Conosciuto l' angolo di rottura VAB si potrà il valore dei pesi π, π', esprimere colla grossezza de' piedritti, colla loro altezza, e colla grossezza o carico dell' arco. Consimili formule che sono di uso diretto nella pratica verranno da noi riferite qui appresso, e serviranno a completare i resultati numerici delle seguenti tavole.

154. *Regola pratica per la grossezza della volta alla chiave.* — Seguendo Peronnet stabiliremo che si determina la grossezza E da darsi alla chiave con fissare la seguente relazione tra essa e il diametro D della volta a tutto sesto

$$E = \frac{5D + 46,^{m}777}{144}$$

Pure potremo allontanarci anche da questo valore, riguardando però come limite inferiore della grossezza nelle volte estradossate parallelamente $^1/_{17}$ del diametro dell' intrados. Il limite inferiore in quelle estradossate fino a 45° può dirsi che non esiste, essendo queste sempre stabili sù lor piedritti qualunque grossezza lor si accordi. Quelle estradossate orizzontalmente non devono aver mai una grossezza minore di $^1/_{48}$ del lor diametro all' intrados. La formula precedente si applica anche alle volte a sesto acuto, e in arco di cerchio a sesto scemo, purchè si prenda per diametro quello del cerchio superiore. Per altro al di là di 30.^{m} darebbe grossezze troppo forti, e in questo caso si giudicherà della grossezza da darsi col confronto delle costruzioni esistenti.

155. *Regole per calcolare l' angolo di rottura, le spinte delle volte, e la grossezza limite de' piedritti.* — Si calcolerà l' angolo di rottura, e la spinta orizzontale *maximum* applicata all' estrados della chiave, col mezzo della seguente tavola dovuta a Petit, capitano del genio. In questa tavola rappresenta

R il raggio dell' estrados.

r il raggio dell' intrados.

$K = \frac{R}{r}$ il rapporto di questi raggi

C il rapporto della spinta orizzontale che agisce alla chiave al quadrato del raggio.

L l' apertura nelle volte a sesto scemo.

f la freccia di queste.

a la metà dell' angolo al centro di queste volte.

Si dedurrà il valore della spinta in kilogrammi sù ciascun metro corrente di lunghezza della volta da quella del rapporto C, moltiplicando il prodotto Cr^2 per il peso del metro cubo del muramento impiegato, al quale si può dare un valor medio di 2250^k. Alcuni esempj mostreranno l' uso della tavola. Essa è distinta in quattro parti; nella prima trattasi delle volte a tutto sesto e ad estrados parallelo; nella seconda di quelle a tutto sesto estradossate fino a 45°; e nella terza di quelle a tutto sesto ed estradossate orizzontalmente. Nella quarta si tratterà delle volte in arco di cerchio estradossate parallelamente, che hanno la metà dell' angolo al centro minore di quello di rottura relativo all' arco estradossato parallelamente e a tutto sesto; e sceglieremo quelle che hanno tra l' apertura e la saetta il rapporto, che è più spesso usato nella pratica, di 4, 6, 8, 10, 16. Per le volte in arco di cerchio come le precedenti, ma che hanno la metà dell' angolo al centro più grande di quello di rottura relativo all' arco estradossato parallelamente e a tutto sesto, dovremo calcolare la spinta orizzontale come per quest' ultime, cioè con la prima parte della tavola.

TAVOLA DEGLI ANGOLI DI ROTTURA, DELLE SPINTE, E DELLE GROSSEZZE LIMITI DE' PIEDRITTI NELLE VOLTE IN PIENO CENTRO, IN QUELLE A TUTTO SESTO ESTRADOSSATE FINO A 45°, E IN QUELLE A TUTTO SESTO ESTRADOSSATE ORIZZONTALMENTE; E DELLE SPINTE NELLE VOLTE A SESTO SCEMO.

In pieno centro o a tutto sesto con estrados parallelo

Valore del rapporto $K = \frac{R}{r}$	Rapporto del diametro alla grossezza	Valore dell' angolo di rottura	Rapporto C della spinta al quadrato del raggio r dell' intrados — caso del moto rotatorio	caso del moto progres.°	Rapporto della grossezza limite dei piedr. al raggio dell'intrados
2,732	1,154	0° 00′	0,00000	0,98923	
2,70	1,176	13 42	0,00211	0,96262	
2,65	1,212	22 00	0,00319	0,92168	
2,60	1,250	27 30	0,00809	0,88151	
2,50	1,333	35 52	0,02283	0,80346	
2,40	1,428	42 6	0,04109	0,72847	*Stabilità*
2,30	1,538	46 47	0,06835	0,65654	*di*
2,20	1,666	51 4	0,08648	0,58767	*Lahire*
2,10	1,810	54 27	0,10926	0,52186	
2,00	2,000	57 17	0,13017	0,45912	1,3223
1,90	2,282	59 37	0,14813	0,39943	1,2320
1,80	2,500	61 24	0,16373	0,34281	1,1414
1,70	2,857	62 53	0,17180	0,28924	1,0484
1,60	3,333	64 49	0,17517	0,23874	0,9525
1,59	3,389	63 52	0,17533	0,23386	0,9427
1,58	3,448	63 55	0,17535	0,22901	0,9329
1,57	3,508	63 58	0,17524	0,22434	0,9233
1,56	3,571	64 1	0,17499	0,21940	0,9131
1,55	3,636	64 3	0,17478	0,21464	0,9031
1,54	3,703	64 5	0,17445	0,20991	0,8931
1,53	3,773	64 7	0,17397	0,20521	0,8831
1,52	3,846	64 8	0,17352	0,20054	0,8730
1,51	3,920	64 8	0,17310	0,19590	0,8628
1,50	4,000	64 9	0,17254	0,19130	0,8527
1,49	4,081	64 8	0,17180	0,18673	0,8424
1,48	4,166	64 8	0,17095	0,18218	0,8320
1,47	4,255	64 7	0,17008	0,17766	0,8216
1,46	4,347	64 6	0,16915	0,17318	0,8112
1,45	4,444	64 5	0,16798	0,16872	0,8007
1,44	4,545	64 3	0,16683	0,16430	0,7962
1,43	4,651	64 .00	0,16568	0,15991	0,7934
1,42	4,761	63 56	0,16448	0,15555	0,7906
1,41	4,878	63 52	0,16317	0,15122	0,7874

1,40	5,000	65° 48′	0,16167	0,14691	0,7858
1,39	5,128	65 43	0,16014	0,14264	0,7801
1,38	5,263	65 38	0,15845	0,13841	0,7760
1,37	5,406	65 32	0,15672	0,13420	0,7717
1,36	5,555	65 26	0,15482	0,13002	0.7670
1,35	5,714	65 19	0,15287	0,12587	0,7622
1,34	5,882	65 10	0,15096	0,12176	0,7574
1,33	6,060	65 00	0,14896	0,11797	0,7524
1,32	6,264	62 50	0,14678	0,11362	0,7468
1,31	6,451	62 33	0,14510	0,10959	0,7425
1,30	6,666	62 14	0,14330	0,10559	0,7379
1,29	6,896	62 9	0,14013	0,10163	0,7297
1,28	7,142	62 5	0,13691	0,09770	0,7213
1,27	7,407	61 47	0,13430	0,09379	0,7144
1,26	7,692	61 30	0,13157	0,08992	0,7071
1,25	8,000	61 15	0,12847	0,08608	0,6987
1,24	8,333	61 1	0,12516	0,08227	0,6896
1,23	8,695	60 40	0,12201	0,07849	0,6809
1,22	9,090	60 19	0,11887	0,07474	0,6721
1,21	9,523	60 00	0,11516	0,07102	0,6615
1,20	10,000	59 41	0,11140	0,06733	0,6504
1,19	10,526	59 10	0,10791	0,06368	0,6404
1,18	11,111	58 40	0,10417	0,06005	0,6292
1,17	11,764	58 9	0,10021	0,05646	0,6171
1,16	12,500	57 40	0,09593	0,05289	0,6038
1,15	13,333	57 1	0,09176	0,04935	0,5905
1,14	14,285	56 25	0,08729	0,04585	0,5759
1,13	15,384	55 45	0,08254	0,04237	0,5601
1,12	16,666	54 48	0,07789	0,03984	0,5444
1,11	18,181	54 10	0,07273	0,03551	0,5259
1,10	20,000	53 15	0,06754	0,03213	0,5066
1,09	22,222	52 14	0,06177	0,02879	
1,08	25,000	51 7	0,05649	0,02546	
1,07	28,571	49 48	0,05065	0,02217	
1,06	33,333	48 18	0,04455	0,01891	
1,05	40,000	46 32	0,03813	0,01568	
1,04	50,000	44 4	0,03139	0,01249	
1,03	66,666	41 4	0,02459	0,00932	
1,02	100,000	38 12	0,01691	0,00618	
1,01	200,000	32 36	0,00889	0,00308	
1,00	infinito	0 00	0,00000	0,00000	*Stabilità di Vauban*

a tutto sesto estradossate fino a 45.°

2,00	2,000	60°	0,26424	0,74361	1,7246
1,90	2,222	60	0,28416	0,65648	1,6204
1,80	2,500	60	0,29907	0,57383	1,5147

1,70	2,857	60°	0,30867	0,49564	1,4081
1,60	3,333	60	0,31245	0,42191	1,2900
1,59	3,389	60	0,31249	0,41478	1,2880
1,58	3,448	60	0,31257	0,40841	1,2781
1,57	3,508	61	0,31264	0,40067	1,2660
1,56	3,571	61	0,31246	0,39367	1,2548
1,55	3,636	61	0,31222	0,38673	1,2437
1,54	3,703	61	0,31191	0,37983	1,2318
1,53	3,773	61	0,31153	0,37297	1,2214
1,52	3,846	61	0,31108	0,366'5	1,2102
1,51	3,920	61	0,31056	0,35938	1,1989
1,50	4,000	61	0,30996	0,35266	1,1877
1,49	4,081	61	0,30928	0,34598	1,1764
1,48	4,166	61	0,30855	0,33934	1,1650
1,47	4,255	61	0,30772	0,33275	1,1537
1,46	4,347	60	0,30685	0,32621	1,1422
1,45	4,444	60	0,30587	0,31971	1,1308
1,44	4,545	60	0,30485	0,31325	1,1193
1,43	4,651	60	0,30408	0,30684	1,1078
1,42	4,761	60	0,30296	0,30047	1,1008
1,41	4,878	60	0,30173		1,0986
1,40	5,000	59	0,30601	0,28787	1,0954
1,39	5,128	59	0,29712		1,0914
1,38	5,263	59	0,29706		1,0914
1,37	5,406	59	0,29550		1,0872
1,36	5,555	59	0,29386		1,0841
1,35	5,714	58	0,29285		1,0823
1,34	5,882	58	0,29037		1,0777
1,33	6,060	58	0,28850		1,0742
1,32	6,264	58	0,28654		1,0705
1,31	6,451	57	0,28456		1,0668
1,30	6,666	57	0,28231	0,22756	1,0626
1,29	6,896	57	0,28027		1,0588
1,28	7,142	56	0,27810		1,0547
1,27	7,407	56	0,27578		1,0503
1,26	7,692	55	0,27343		1,0458
1,25	8,000	54	0,27102		1,0412
1,24	8,333	53	0,26850		1,0363
1,23	8,695	53	0.26608		1,0316
1,22	9,090	52	0,26377		1,0272
1,21	9,523	51	0,26074		1,0217
1,20	10,000	50	0,25806	0,17171	1,0160
1,19	10,526	50	0,25546		1,0109
1,18	11,111	49	0,25277		1,0045
1,17	11,764	49	0,25010		1,0002
1,16	12,500	48	0,24742		0,9948
1,15	13,333	47	0,24477		0,9894

1,14	14,285	46°	0,24218		0,9842
1,13	15,384	44	0,23967		0,9791
1,12	16,666	43	0,23732		0,9743
1,11	18,181	43	0,23502		0,9693
1,10	20,000	42	0,23292	0,12032	0,9652
1,05	40,000	36	0,22902		0,9571

a tutto sesto estradossate orizzontalmente.

					Stabilità di Lahire
2,00	2,000	36°	0,05486	0,50358	1,3834
1,90	2,222	39	0,07101	0,43966	1,2925
1,80	2,500	44	0,08508	9,37901	1,2001
1,70	2,857	48	0,10631	0,32164	1,1055
1,60	3,333	52	0,12300	0,26755	1,0082
1,59	3,389	52	0,12453	0,26232	0,9984
1,58	3,448	53	0,12602	0,25712	0,9885
1,57	3,508	53	0,12747	0,25496	0,9784
1,56	3,571	54	0,12857	0,24683	0,9684
1,55	3,636	54	0,13027	0,24173	0,9584
1,54	3,703	55	0,13153	0,23667	0,9483
1,53	3,773	55	0,13289	0,23163	0,9381
1,52	3,846	55	0,13414	0,22644	0,9280
1,51	3,920	55	0,13531	0,22167	0,9177
1,50	4,000	56	0,13648	0,21673	0,9075
1,49	4,081	56	0,13756	0,21183	0,8972
1,48	4,166	56	0,13856	0,20696	0,8868
1,47	4,265	57	0,13952	0,20215	0,8764
1,46	4,347	37	0,14041	0,19733	0,8659
1,45	4,444	57	0,14122	0,19256	0,8554
1,44	4,545	58	0,14195	0,18782	0,8448
1,43	4,651	58	0,14268	0,18312	0,8341
1,42	4,761	58	0,14311	0,17845	0,8234
1,41	4,878	59	0,14376	0,17381	0,8126
1,40	5,000	59	0,14421	0,16920	0;8018
1,39	5,128	59	0,14456	0,16463	0,7909
1,38	5,263	59	0,14481	0,16009	0,7709
1,37	5,406	60	0,14498	0,15558	0,7689
1,36	5,555	60	0,14506	0,15111	0,7577
1,35	5,714	60	0,14504	0,15666	0,7465
1,34	5,882	60	0,14491	0,14225	0,7420
1,33	6,060	61	0,14467		0,7414
1.32	6,264	61	0,14460		0,7412
1,31	6,451	61	0,14390		0,7394
1,30	6,666	61	0,14332	0,12495	0,7379
1,29	6,896	61	0,14264		0,7362
1,28	7,142	62	0,14186		0,7342
1,27	7,407	62	0,14101		0,7320

1,26	7,692	62°	0,13988		0,7290
1,25	8,000	62	0,13872	0,10405	0,7260
1,24	8,333	62	0,13737		0,7225
1,23	8,695	63	0,13593		0,7187
1,22	9,090	63	0,13437		0,7145
1,21	9,523	63	0,13263		0,7099
1,20	10,000	63	0,13073	0,08397	0,7048
1,19	10,526	63	0,12870		0,6993
1,18	11,111	63	0,12650		0,6963
1,17	11,764	64	0,12415		0,6868
1,16	12,500	64	0,12182		0,6803
1,15	13,333	64	0,11895	0,06471	0,6723
1,14	14,285	64	0,11608		0,6641
1,13	15,384	64	0,11303		0,6553
1,12	16,666	64	0;10979		0,6459
1,11	18,181	65	0,10641		0,6358
1,10	20,000	65	0,10279	0,04627	0,6249
1,09	22,222	66	0,098992		0,6133
1,08	25,000	66	0,094967		0,6007
1,07	28,571	67	0,091189		0,5886
1,06	33,333	68	0,086376		0,5729
1,05	40,000	69	0,081755	0,02865	0,5573
1,04	50,000	70	0,076857		
1,03	66,666	71	0,071853		
1,02	100,000	73	0,066469		
1 01	200,000	74	0,061324		
1,00	infinito	75	0,055472	0,01185	

Rapporto della spinta al quadrato del raggio dell' intrados per le volte a sesto scemo che hanno

	L = 4f r = 2,500f a=53°.7'.30"	L = 6f r = 5,000f a=36°.52'.10"	L = 8f r = 8,500f a=28°.4'.20"	L = 10f r = 13,000f a=22°.37'.10	L = 16f r=32,500f a= 15°15'
1,40	0,15445	0,14691	0,14691	0,14478	
1,35	0,14717	0,12587	0,12587	0,12405	
1,34	0,14543	0,12171	0,12171	0,11999	
1,33	0,14364	0,11767	0,11767	0,11596	
1,32	0,14175	0,11362	0,11362	0,11196	
1,31	0,13975	0,10959	0,10959	0,10800	
1,30	0,13764	0,10682	0,10559	0,10406	
1,29	0,13543	0,10563	0,10163	0,10016	
1,28	0,13311	0,10437	0,09770	0,09628	
1,27	0,13068	0,10304	0,09379	0,09244	
1,26	0,12815	0,10160	0,08992	0,08862	
1,25	0,12547	0,10009	0,08608	0,08483	0,07180
1,24	0,12270	0,09850	0,08227	0,08108	0,06862

1,23	0,12031	0,09679	0,07849	0,07735	0,06547
1,22	0,11675	0,09499	0,07474	0,07366	0,06234
1,21	0,11354	0,09305	0,07102	0,06999	0,05924
1,20	0,11023	0,09102	0,06981	0,06636	0,05616
1,19	0,10676	0,08885	0,06859	0,06275	0,05311
1,18	0,10315	0,08653	0,06727	0,05918	0,05008
1,17	0,09934	0,08408	0,06583	0,05212	0,04709
1,16	0,09537	0,08144	0,06420	0,05004	0,04411
1,15	0,09123	0,07866	0,06259	0,04904	0,04116
1,14	0,08690	0,07568	0,06077	0,04803	0,03824
1,13	0,08238	0,07251	0,05890	0,04671	0,03534
1,12	0,07764	0,06911	0,05659	0,04451	0,03247
1,11	0,07269	0,06548	0,05421	0,04384	0.02962
1,10	0,06737	0,06158	0,05160	0,04214	0,02681
1,09	0,06211	0,05739	0,04871	0,04023	0,02401
1,08	0,05636	0,05288	0,04552	0,03806	0,02192
1,07	0,05052	0,04804	0,04200	0,03560	0,02111
1,06	0,04431	0,04280	0,03861	0,03276	0,02002
1,05	0,03776	0,03709	0,03357	0,02944	0,01882
1,04	0,03096	0,03095	0,02862	0,02561	0,01720
1,03	0,02378	0,02424	0,02293	0,02131	0,01524
1,02	0,01625	0,01690	0,01640	0,01546	0,01199
1,01	0,00834	0,00886	0,00885	0,00862	0,00747

---

156. *Osservazioni*. — Nell' uso della tavola per le volte estradossate parallelamente, il valor di C per il moto progressivo supera quello per la rotazione fino a K = 1,44. E siccome si deve evidentemente prendere nelle applicazioni la più grande di queste due spinte, abbisognerà per le volte che daranno un rapporto K compreso tra 2,732 e 1,44, impiegare il valore relativo al caso della rotazione. Un' interlinea orizzontale, indica per tutte le tavole i valori di K ove una delle spinte sorpassa l' altra. Nelle volte estradossate fino a 45:° la spinta orizzontale relativa al moto progressivo supera quella per il moto rotatorio fino a K = 1,45 inclusive. Per K = 1,42 e i valori al di sotto converrà dunque servirsi delle spinte relative alla rotazione. Nelle volte estradossate orizzontalmente per i valori di K inferiori a 1,35 converrà prendere le spinte relative al caso della rotazione, giacchè sono più grandi. Le spinte relative al caso del moto progressivo sono al contrario superiori fin da K = 1,35.

157. *Regola per la grossezza de piedritti*. — La grossezza limite de' piedritti della quale è stato parlato nella precedente tavola, è più grande di quella che si darebbe per resultato delle formule teoriche, ma non molto. Quindi in quelle costruzioni ove non si richieda economia, o non vi siano cagioni per tenersi più limitati nella grossezza de' piedritti, faremo uso della tavola. Allorchè si vorrà calcolare questa grossezza con maggior precisione, chiamata *e* la grossezza cercata del pie-

dritto, ed h la sua altezza, e conservate le altre notazioni (155) si userà la seguente formula

$$\frac{e}{r} = -\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + 2\beta + \gamma)}$$

Ponendo per le volte a tutto sesto con estrados parallelo

$$\alpha = 0{,}7854\ (K^2 - 1)\frac{r}{h}$$

$$\beta = 1{,}90KC + {}^1/_3(1{,}90\,K^3 - 1)\frac{r}{h} - {}^1/_2\alpha$$

$$\gamma = 3 . 8 . C$$

per le volte a tutto sesto estradossate fino a 45:°

$$\alpha = (K^2 - 0{,}7854)\frac{r}{h}$$

$$\beta = K(2C + {}^1/_3\,{}^{2}\sqrt{2} - K)\frac{r}{h} + 0{,}452\frac{r}{h}$$

$$\gamma = 4 . C$$

per le volte a tutto sesto estradossate orizzontalmente

$$\alpha = (K - 0{,}7854)\frac{r}{h + Kr}$$

$$\beta = (K - 0{,}904)\frac{r}{h + Kr}$$

$$\gamma = 3. 8. C$$

per le volte in arco di cerchio, o a sesto scemo estradossate parallelamente, che hanno l'angolo a minore di quello di rottura delle simili volte a tutto sesto

$$\alpha = {}^1/_2\, a\,(K^2 - 1)\frac{r}{h}$$

$$\beta = \Big[1{,}90\,(K - \cos a) + {}^1/_3(K^3 - 1) \times (1 - \cos a) - {}^1/_2\, a\,(K^2 - 1)\,\mathrm{sen}\, a\Big]\frac{r}{h}$$

$$\gamma = 3 . 8 . C$$

per le volte parimente a sesto scemo come le precedenti, e con angolo a maggiore di quello di rottura delle consimili volte a tutto sesto, si useranno precisamente le formule di queste ultime.

Esempi. — I. Qual deve essere le grossezza de' piedritti di una volta a tutto sesto di 5.^{m} di diametro all' intrados che ha le imposte 3.^{m} al di sopra del suolo? Avremo per la regola ( ) della grossezza alla chiave $E = 0^m{,}498$. Quindi $R = 2^m{,}5 + 0^m{,}498 = 2^m{,}998$, $K = 1{,}20$. Questo rapporto essendo al di sotto di 1,44, la spinta relativa al caso di rotazione sarà la più grande, e la tavola ( ) dà $C = 0{,}11140$. Onde la spinta per metro corrente sarà

$$Cr^2.\ 2250 = 1566.$$

E la grossezza limite de' piedritti

$$0{,}6504 .\ r = 1^m{,}626.$$

Se si fosse fatto uso della formula teorica per ottenere la grossezza de' piedritti si sarebbe avuto

$$\frac{r}{h} = \frac{2{,}50}{2} = 0{,}833 \qquad \frac{e}{r} = 0{,}5827,$$

$$e = 1^m{,}457.$$

vale a dire una grossezza per i piedritti, che è minore della precedente data dalla tavola, di più di un decimetro.

II. Sebbene le volte estradossate fino a 45.° siano stabili qualunque grossezza loro si dia, pure suole sempre calcolarsi la grossezza alla chiave colla regola di Peronnet. Poniamo che si deva costruire una di queste volte con 8.^{m} di diametro, retta sù piedritti alti 5.^{m} avremo $E = 0{,}6026$, ed $R = 4^m{,}6026$, $K = 1{,}15$. Onde dalla tavola si ottiene

$$C = 0{,}24477,$$

da dove si calcola la spinta

$$0{,}24477 \times 16^m \times 2250^k = 8811^k;$$

e si ottiene la grossezza limite del piedritto $0{,}9894 \times 4 = 3^m{,}9576$.

Per mezzo della formula si sarebbe ottenuto

$$\frac{r}{h} = \frac{4^m}{5} = 0{,}80 \qquad \frac{e}{r} = 0{,}919$$

ed $\quad e = 0{,}919 \times 4 = 3^m{,}676$.

La differenza qui sarebbe di circa 3. decim.

III. In una volta estradossata orizzontalmente a tutto sesto con diametro 10^m, e con piedritti alti $5.^m$, la grossezza alla chiave per la nota re-

gola dovrà essere $E = 0,^m672$ e per conseguenza avremo

$R = 5,^m672, \ K = 1,13.$

Onde dalla tavola si rileverà

$C = 0,11303$

cioè la spinta 6359^k, e la grossezza limite de' piedritti

$0,6553 \times 5 = 3^m,2765.$

Usando la formula si ha

$\frac{r}{h} = 1, \ \frac{e}{r} = 0,5615$, ed $e = 2^m,8075$

IV. Volta in arco di cerchio estradossata parallelamente a sesto scemo con angolo al centro dell'arco di cerchio compreso tra la verticale del mezzo della chiave, e il raggio che passa per l'imposta, più grande di quello di rottura dato dalla prima parte della tavola. Sia l'altezza de piedritti $3^m,25$, la larghezza della volta 3^m, e la freccia 1^m. Si trova $r = 1^m,625$; $E = 0^m,437$; $R = 2^m,062$, $K = 1,26$; $\frac{r}{h} = \frac{1}{2}$

$a = 63°$; $sen\ a = 0,8912$; $cos\ a = 0,4540$. Siccome al valore 1,26 li corrisponderebbe nella prima parte della tavola l'angolo di rottura 61°, 30′ minore cioè di a, useremo questa parte della tavola, e si avrà $C = 0,13157$. Quindi dalla formula si otterrà

$\frac{e}{r} = 0,627 \qquad e = 1^m,019.$

Se non si fosse avuto pregiudizio in calcolare piuttosto la grossezza limite del piedritto, cioè supponendo la sua altezza infinita ne sarebbe venuto nella formula

$\frac{e}{r} = \sqrt{3.\ 8.\ C} = 0,7071$ cioè $e = 1,^m149$

V. Qual deve essere la grossezza de' piedritti di una volta in arco di cerchio estradossata parallelamente, ove sia $L = 8f$, cioè larga $8.^m$ e con freccia di $1.^m$ e con piedritti $h = 4^m25$? Si ha

$r = 8^m,50$; $\frac{r}{h} = 2$; $a = 28°.4'.20''$, $cos\ a = 0,8828$; $sen\ a = 0,4706$; $E = 0^m,915$; $R = 9^m,415$; $K = 1,107$. Dalla quarta parte della tavola prendendo la media proporzionale tra $K = 1,10$, e $K = 1,11$ si ha $C = 0,05313$. Questo valore sostituito nella formula dà $\frac{e}{r} = 0,3817$; d'onde $e = 3^m,244$.

La grossezza limite nella supposizione del piedritto che abbia un'altezza infinita corrisponderebbe ad

$\frac{e}{r} = 0,4482$ cioè $e = 3^m,810$.

158. ***Regola pratica per evitare il moto progressivo de' cunei sù pulvinari***. Oltre alle cose dette superiormente (147), le quali danno regole geometriche ben semplici, si può usar una formula per conoscere se l'attrito impedisca lo scorrere de cunei sù pulvinari. L'attrito per ogni metro corrente sù pulvinari è

$0,38\ a\ (K^2 - 1)\ r^2 \times 2250^k$

La spinta orizzontale per ogni metro corrente ha per valore

$Cr^2 \times 2250^k$

Onde se la spinta sorpassa l'attrito conviene impiegare dei mezzi d'arte, come tiranti di ferro, catene ec. per opporsi allo scorrere de' cunei, e la resistenza per la quale questi corpi saranno cimentati si calcolerà colla formula

$\left[C - 0,38\ a\ (K^2 - 1) \right] r^2 \times 2250^k$

Allorchè $L = 4f$, la spinta supera l'attrito quando $K = 1,06$, vi sarà dunque moto progressivo nelle volte che corrispondono a questo valore di K e a de' valori più piccoli. Per le volte nelle quali si abbia

$L = 6f, \ L = 8f, \ L = 10f,$

il moto progressivo comincia dal valore $K = 115$. Quando è $L = 16f$, o quando si usano volte più basse, tal moto ha luogo qualunque sia la grossezza della volta.

Esempio. Di quanto la spinta supera l' attrito in una volta ove e $L = 8^m$, $f = 0^m,50$? Si ha

$r = 32,5 f = 16^m,25$, $E = 1^m,454$

$R = 17^m,704$, $K = 1,09$, $C = 0,02401$. Onde il domandato eccesso resulta 3654^k per metro.

CAPITOLO VII.

Sulle leggi de' differenti movimenti.

159. *Classazione de' moti*. — Si dice che il moto è uniforme allorchè il mobile percorre spazj eguali in tempi eguali. Dicesi vario allorchè si impiegano tempi differenti in percorrere eguali spazj. È accelerato o ritardato se cresce o scema la velocità all' aumentare del tempo.

Moto uniforme, e vario.

160. *Come si generi il moto uniforme.*— Impressa una forza ad un corpo, esso per l' inerzia percorrerà eguali spazj in eguali tempi, se altre forze non agiscono sù di esso. Vi sono però sempre per lo meno le resistenze, che si oppongono al moto, e ne diminuiscono ognor più la celerità. E poichè le resistenze sono forze continue, fa duopo sollecitare i corpi con altre forze continue, le quali distruggano in essi l' effetto che quelle vi produrrebbero, e vi mantengano la forza. Per questo ogni moto uniforme è mantenuto da una forza continua. E stabiliremo che quando il moto della macchina è uniforme, lo sforzo del motore fa equilibrio a quello della resistenza. I principali esempj di moto uniforme sono dati dagli oriuoli. Le clessidre degli antichi sono i più semplici orologi; ma queste anzi che dare un moto uniforme danno moto periodico. Esse erano ad acqua o a polvere; il loro principio fisico consiste nell' essere sempre lo stesso il tempo in cui cade una certa quantità d'acqua o di polvere da uno in un altro vaso. L' orologio a polvere e formato da due vasi (generalmente un paio di coni che hanno i loro apici l' uno di contro all' altro) con una apertura stretta nel punto di riunione, i quali stanno uno sopra l' altro. La polvere fluisce a poco a poco dal vaso superiore nell' inferiore. Lo strumento deve essere capovolto, quando l' un vaso riman vuoto onde lasciare escire di nuovo la polvere; così di seguito. Il tempo in cui si vuota il vaso è di un' ora o di mezz' ora, e serve perciò tale orologio a marcare colla caduta della polvere la durata di questo tempo. Gli orologi a ruote che sono camunemente in uso può dirsi che presentino nelle lancette moto uniforme sebbene esse si avanzino intermittentemente ogni volta che passa un dente della ruota. Anche qui si ravvisa che il moto uniforme è mantenuto da una forza costante come è quella della molla, o dei pesi che sono nella macchina. Parimente spesso si procura un moto che non ha celerità sempre costante, e segue dei periodi ricorrenti, come sarebbe il moto di *va e vieni*. Con tutto ciò si riguarda come moto uniforme, e si considera per sua celerità quella che appartiene allo spazio percorso in un periodo di tempo.

161. *Leggi del moto uniforme.*— La formula $V = \frac{S}{T}$

ove la celerità V è costante, ci rappresenta le leggi di questo moto. 1.° La celerità è costante. 2.° In tempi eguali son percorsi spazj eguali. 3.° Gli spazj crescono proporzionalmente ai tempi. Da quella formula si deduce anche il modo di determinare la velocità e lo spazio: la velocità è data dallo spazio percorso in un tempo determinato che è ordinariamente la unità di tempo, onde si dice per es.° che è di 2.ᵐ per 1″. Lo spazio percorso si rileva dal prodotto della velocità nel tempo, che è durato il moto: un cavallo che percorra 2.ᵐ per 1″, dopo 8″ avrà percorso 2.ᵐ 8″ = 16ᵐ. Quando si vuole confrontare un moto uniforme con un altro, è facile conoscere che: 1.° le velocità stanno come gli spazj percorsi in egual tempo; 2.° gli spazj stanno fra loro come i prodotti della celerità nei respettivi tempi.

162. *Come si genera il moto vario*. — Ben si comprende che si otterrebbe questo moto allorquando agisse sul corpo una forza continua per la quale si accrescessero continuamente o si diminuissero le velocità nel corpo. L'azione di una tal forza si concepisce supponendo che in ogni istante riceva il corpo un urto; esso per la sua inerzia riterrà nel secondo istante la celerità dovuta al primo, e al secondo urto, e così negli istanti successivi, e perciò verrà ad avere celerità differenti negli istanti diversi. In questa ipotesi le celerità si aumenterebbero nei successivi istanti e il moto si direbbe accelerato. Ma se gli urti nei successivi istanti venissero diretti in senso contrario ad una forza precedentemente comunicata al corpo, il moto sarà ritardato, perchè sottrarranno sempre una porzione di forza, e sceneranno la velocità del moto.

163. *Modo di rappresentare i differenti moti colla geometria*. — Si può la legge di ogni moto rappresentare colla geometria, tirando una retta indefinita, e su questa prendendo delle distanze eguali che rappresentino eguali tempi, e ad ogni divisione alzando delle perpendicolari che colla loro lunghezza rappresentino il cammino percorso durante il tempo che è passato dal principio del moto; e finalmente unendo con una linea i punti estremi di quelle perpendicolari. Questa linea esprime la legge o relazione tra il tempo e lo spazio percorso. Infatti nel moto uniforme ove gli spazj crescono come i tempi (Tav. VI fig. 5) le ordinate $a'b'$, $a''b''$, $a^{v}b^{v}$, ec. saranno proporzionali alle ascisse aa', aa'', aa^{v} ec. e la linea $b'b''b^{v}$ ec. darà la legge del moto, e sarà una retta. Nel moto periodico essendo ad intervalli le ordinate $a''b''$, $a'''b'''$ ... proporzionali ai tempi aa', aa''' .... la linea $a\,c'b''c^{v}b'''$ sarà una curva sinuosa che ad intervalli eguali taglia la retta $ab'b''$... Nel moto accelerato le ordinate $a'e''$ è $a''e''$... cresceranno in proporzione maggiore dei tempi aa', aa'' ... e la linea $ae'e''$ ... sarà una curva concava. Nel moto ritardato le ordinate $a'd$, $a''d''$ ... cresceranno in proporzione minore dei tempi aa', aa'' e la linea $ad'\,d''$... sarà una curva convessa. Affinchè l'espressione geometrica sia convenientemente esatta dovremo prendere piccolissimi i tempi rappresentati dagl'intervalli aa', $a'a''$ ... e quando fossero infinitamente piccoli la curva determinata dalle ordinate indicherebbe la legge precisa del moto.

164. *I moti tendono all'uniformità*. — Può dirsi che i moti tendono a ridursi uniformi e per cagione delle resistenze, e per cagione

delle forze motrici. Un corpo che cade da grande altezza accelera il suo moto sul principio molto, e meno in seguito perchè al crescere della sua velocità si aumenta la resistenza che gli oppone l'aria, e se l' altezza è sufficente termina col muoversi di moto uniforme. Una macchina posta in azione da un animale acquista sul principio moto accelerato perchè la forza dell'animale deve vincere l'inerzia della macchina, ma vinta questa prende moto uniforme giacchè l'animale quando agisce per lungo tempo somministra sempre una forza costante che s' impiega a vincere le resistenze che si oppongono al moto della macchina, ed intanto questa per la sua inerzia si muove con moto uniforme.

165. *Vantaggi ed uso del moto uniforme. Regolatori.* — Nelle arti interessa moltissimo che le macchine si muovano di moto uniforme e con determinate velocità perchè il buon resultato della loro opera è collegato con l' uso d' una celerità determinata. Nel moto delle macchine si devono distinguere tre periodi di tempi: Nel primo esso è accelerato perchè la potenza s' impiega in parte a vincere l'inerzia e produce una forza viva a poco alla volta, e questa porzione della potenza va successivamente diminuendo, onde cresce l'altra che vince le resistenze e mantiene il moto alla macchina; anzi dopo un tempo non molto lungo facendosi la resistenza per la cresciuta velocità eguale alla potenza il moto si fa uniforme, e tale seguita per tutto il secondo periodo, che è il più lungo ed il solo comunemente apprezzato. Allorchè vuol fermarsi la macchina, diminuisce o cessa l'azione della potenza, la forza viva si consuma nel vincere le resistenze, ed il moto si fa ritardato sempre più, e dopo breve tempo si estingue. Si apprezza il lavoro effettuato nel secondo periodo cioè quando la macchina ha acquistato il conveniente moto uniforme. Per avere con maggiore esattezza costante la velocità si aggiungono spesso alla macchina dei regolatori di moto. I freni dei quali abbiamo parlato (85) possono moderare il moto aggiungendo delle resistenze, ma non sono sempre utili perchè distruggono una porzione della forza. Si conoscono dei regolatori i quali ricevono la forza quando la macchina agisce con troppa velocità, e la conservano per restituirla allorchè la sua velocità si fa minore, tali sono i volani, i regolatori a forza centrifuga, quelli a molla in spirale ec. Il pendolo è il più preciso regolatore di moto, e la riduce perfettamente uniforme, quindi è molto apprezzato sebbene distrugga una porzione della forza. Di tutti questi strumenti parleremo in seguito, e qui solo per darne un esempio rammenteremo uno dei più semplici regolatori cioè il volante ad alette. Gli antichi orologi, gli organi a cilindro, i girarrosti, e in generale molti meccanismi che ricevono il moto per la discesa di un grave o per la forza di una molla sono armati di un volante ad alette, o di un sistema di bracci con superficie piana il cui asse di rotazione porta una vite perpetua che colle sue spire conduce i denti della macchina. Le ali muovendosi circolarmente nell' aria provano una resistenza che cresce presso a poco come il quadrato delle velocitá, che acquistano per effetto della forza motrice: quindi se la loro superficie è calcolata per modo che la resistenza dovuta alla velocità della macchi-

na faccia equilibrio all'azione del motore, la macchina si muoverà uniformemente. La vite perpetua che si usa per tali volanti deve avere i vermi moltissimo inclinati, onde l'attrito non sia troppo.

166. *Applicazioni del moto vario*. — Torna comodo di usare il moto accelerato per accumulare molta forza: così vedesi colui che vuol fare un ampio salto prendere la rincorsa; muovere nella mano con celerità il sasso quegli che vuole scagliarlo lontano; porre il magnano in moto accelerato il martello; abbassare con celerità la scure lo spezzalegna ec. E spesso traesi vantaggio dal moto ritardato per vincere una forza o un' urto; delle fascine si usano nei campi di battaglia per smorzare l'urto delle palle scagliate. Si pone della rena sopra le bombe per impedire l'esplosione della mitraglia: si fanno urtare sù sostanze cedevoli quei corpi che non si devono guastare nè rompere: ed in generale si diminuisce a poco alla volta per mezzo di ostacoli frapposti la forza allorquando essa è troppo grande; onde anche i freni agiscono con questo principio per arrestare il moto.

167. *Misura della velocità*. — Si apprezza la celerità di un corpo col ridurre il suo moto a quello uniforme. Quindi si osserva ordinariamente quanto spazio il corpo percorre in un tempo molto piccolo, e si divide il numero che rappresenta lo spazio per quello del tempo onde avere la velocità. Questo metodo porta in errore quando la velocità al principio di quel tempo è molto minore di quella che si ha al suo terminare. E perciò quando si vuole esattezza conviene lasciare che il corpo si muova per un certo tempo colla sola velocità acquistata e senza che vi agisca la forza motrice. Spesso si prende una media velocità tra quella che aveva il corpo durante il moto, e si riguarda come se fosse stata costante.

Moto uniformemente accelerato, e ritardato.

168. *Moto uniformemente accelerato, e sue leggi*. — La forza, che è continua costante, non solo in ogni momento sollecita il corpo ma anche ripete la sua azione sempre con eguale intensità, aumenta di eguali quantità in eguali tempi la velocità, e lo pone in moto uniformemente accelerato. In questo movimento si notano quattro leggi, per quanto sieno deduzioni l'una dell'altra.

1:° La celerità cresce proporzionalmente alla forza acceleratrice

2:° La celerità cresce proporzionalmente ai tempi scorsi dal principio del moto.

3:° Lo spazio percorso con moto uniformemente accelerato in un dato tempo è metà di quello che il corpo percorrerebbe con moto uniforme in egual tempo, e con la celerità che il corpo aveva alla fine del moto uniformemente accelerato.

4:° Gli spazi percorsi dal principio del moto, stanno come i quadrati dei tempi impiegati in percorrerli.

La prima legge comune anche agli altri moti ne viene direttamente dalla misura della forza (*Int.* 98) $F = Mv$.

Rilevasi la seconda dal modo d'azione della forza continua costante. Infatti chiamato g l'impulso che la forza dà al corpo per ogni istante avrà il corpo negli istanti

$$1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots t$$

le forze o celerità

$$g,\ 2g,\ 3g,\ 4g,\ \ldots tg$$

e perciò dopo il tempo t la velocità v del corpo potrà dirsi $v = gt$.

A comprender la terza basta riflettere che durando il moto uniformemente accelerato per il tempo t, comincia colla velocità o, termina colla velocità v, e si aumentano le velocità per gradi eguali in ogni istante. Onde è come se il corpo si muovesse con moto uniforme e con una velocità media a quella che aveva al principio e alla fine del moto accelerato. Questa sarebbe $\frac{1}{2} v$; e poichè lo spazio nel moto uniforme è eguale al prodotto del tempo nella velocita sarà $s = \frac{1}{2} vt$, il valor dello spazio percorso con moto uniformemente accelerato.

Ponendo in questa formola il valor della velocità dianzi trovato abbiamo $s = \frac{1}{2} gt^2$, coerentemente alla quarta legge.

E ponendovi quello del tempo si sarebbe ottenuto $v = \sqrt{2gs}$, cioè le velocità stanno come le radici degli spazi percorsi.

Supposto che il corpo abbia di già acquistata una velocità v' quando comincia il moto uniformemente accelerato, per questa si verificheranno le leggi del moto uniforme e perciò sarà $v = v' + gt \quad s = v't + \frac{1}{2} gt^2$.

In conseguenza della quarta legge rappresentando geometricamente, come si è detto (163), il moto uniformemente accelerato, la curva che lega gli spazj con i tempi sarebbe una parabola coll'asse normale a quello delle ascisse. Questo genere di moto vario che ha le sue leggi sì ben determinate serve come termine di confronto a tutti gli altri. Quindi i matematici considerano un qualunque moto vario, come composto da moti uniformemente accelerati di infinitesima durata: noi per stabilire un principio utile nella pratica riterremo che sia apprezzabile la durata dei moti uniformemente accelerati, che colla loro successione compongono il moto vario, e per apprezzar la legge del moto consiglieremo in quei successivi tempi valutare sperimentalmente la variazione di velocità.

169 *Macchina d'Attwood*. — L'esempio il più importante del moto uniformemente accelerato, lo abbiamo nella caduta verticale de' corpi pesanti; se non che la resistenza dell'aria altera alquanto le sue leggi diminuendo le celerità acquistate. La forza di gravità è continua costante, dunque sovra il moto che d'essa produce potranno riscontrarsi le quattro enunciate leggi. Il Galileo fu il primo a dare la dottrina di questo moto, e la sua grande scoperta fu appoggiata dai ragionamenti e dalle esperienze. Egli sperimentò la caduta di un corpo lungo un piano inclinato, e tutt'ora taluno suole far cadere una carrucola mobile lungo una fune tesa obliquamente all'orizzonte. Ma questo modo, come anche il piano inclinato del Galileo, presentano gl' inconvenienti degli attriti, han però il vantaggio di ridurre a piacimento secondo l'inclinazione (107) la forza acceleratrice.

L'Attwod ha saputo immaginare una macchina la quale mentre ritiene l'interessantissimo principio usato dal Galileo di diminure in proporzione conosciuta la forza di gravità, evita in massima parte l'inconveniente degli attriti, e dà la caduta di un corpo per la verticale. Quando il moto dei gravi è assai lento, anche l'aria non dà molta resistenza. La macchina d'Attwood è composta essenzialmente da una colonna verticale (Tav. VI fig. 6) alta circa 2^m, la quale porta sopra un suo lato un pendolo destinato a valutare in mi-

nuti secondi il tempo che impiega il grave a cadere; alla parte anteriore ha una riga divisa in pollici inglesi sulla quale si valuta lo spazio percorso dal corpo; superiormente per mezzo di un piano rettangolare sostiene una puleggia mobilissima, gli assi della quale poggiano sulle circonferenze di altre quattro ruote molto mobili, affinchè come si è altrove detto sieno piccolissimi gli attriti (84. VI). Per la scanalatura della puleggia passa un filo alle cui estremità sono due pesi A, B il primo de' quali discende lungo l'asta divisa e rappresenta il grave che cade, mentre l'altro è costretto a salire; e diminuisce così la celerità. Se questi due pesi sono eguali l'uno tien l'altro in equilibrio. Se il primo è maggiore, con la differenza che passa fra i due pesi si ottiene il moto, e la forza che gli mette ambedue in movimento. Quindi chiamando m la massa di un peso, $m+p$ la massa dell'altro sarà, p la forza che si ha da repartire nelle due masse, e però la celerità che acquisterà il grave starà a quella che avrebbe avuta naturalmente cadendo libero, come $p : 2m+p$ cioè invece di agire tutta la gravità ne agirà una porzione rappresentata da

$$\frac{p}{2m+p}$$

o in altri termini può dirsi essere la forza di gravità diminuita nella proporzione della somma dei due pesi alla loro differenza. Questa proporzione non si verificherà esattamente perchè deve valutarsi anche l'inerzia delle ruote, e perciò il valore di m si terrà un poco più piccolo. Nella figura ho anche fatto disegnare il meccanismo che è stato aggiunto perchè il grave cominci a discendere al principio dell'oscillazione del pendolo. L'asse della ruota d'alzata del pendolo avrà un semicerchio C eccentrico, il quale quando la lancetta marca il zero della mostra manda avanti la leva DD' che era di sostegno al pezzo E. Gira questo intorno a' pernj MN, e cade il grave che sopra quello riposava. Per tali pronti distacchi (e attacchi) miglior di qualunque altro meccanismo è una calamita temporaria, la quale perdendo fa forza all'interrompere la corrente elettrica lascia cadere l'ancora.

Premesso ciò con quattro esperienze possono verificarsi le quattro leggi sovra notate, che per comodo le prendiamo a considerare in ordine diverso.

170. *Esperienze sul moto dei gravi che cadono per la verticale.* — Si formi un peso di marchi 31 $^1/_2$, e l'altro di marchi 32 $^1/_2$ (i primi 30 marchi si pongono scarsi per l'effetto dell'inerzia delle ruote e delle resistenze, ed equivalgono a marchi 29,78). La lor somma essendo 64, ed uno la differenza, la forza con cui discenderà il secondo peso e monterà l'altro sarà $^1/_{64}$ di quella che è in natura. E in quest'esempio lo vediamo facilmente perchè la forza proveniente dal solo marco, che uno dei pesi ha più dell'altro, non può agire sovra quel marco soltanto e farlo cadere con la celerità del proprio peso, ma deve distribuirsi sovra gli altri 63 marchi i quali legati al medesimo filo sono costretti a seguir quello nel suo moto e con egual celerità, e per conseguenza quella forza si repartirà egualmente per ciascheduno dei 64 marchi, onde ad ognuno non ne rimarrà che $^1/_{64}$. Si lasci dunque cadere il peso dei 32 $^1/_2$ marchi dal zero della divisione quando batte un minuto secondo, e con un piattello si arresti ai 3 pollici, ai 12, ai 27, ai 42 .... con successive

esperienze, e si vedrà che giunge a questi punti in 1, in 2, in 3, in 4... minuti secondi. Ma 3 : 12 : 27 : 42 :: 1 : 4 : 9 : 16 ovvero :: 1 : 2^2 : 3^2 : 4^2 cioè nel moto dei gravi gli spazi percorsi dal principio del moto uniformemente accelerato stanno come i quadrati dei tempi impiegati in percorrergli. Che se da 4 sottragghiamo 1; e 4 da 9; e 9 da 16.... abbiamo la serie dei numeri impari 1, 3, 5, 7; lo che mostra che gli spazj percorsi nei successivi minuti secondi stanno fra loro come la serie dei numeri impari.

Il marco di differenza dei due pesi si faccia consistere in una verghetta metallica posata sovra uno di essi, e assai lunga talché non possa passare per un cerchio metallico che si ferma al 3, o al 12 della divisione, come mostra la figura (Tav. VI fig. 6). Il piattello di ritegno si pone ora respettivamente ai 9 ovvero ai 36 pollici. Si lascia cadere il peso da zero quando batte il minuto secondo, e si vede che dopo uno, o due minuti passa il peso attraverso il cerchio e vi lascia la verghetta, ed in egual tempo giunge sul piattello. Dal zero al cerchio il grave è andato col moto uniformemente accelerato; dal cerchio al piattello è andato con moto uniforme: dunque lo spazio descritto dal grave con moto uniformemente accelerato dal principio del moto è metà di quello che il medesimo grave descrive movendosi per lo stesso tempo con moto uniforme, e con la celerità acquistata nel moto uniformemente accelerato. Siccome la celerità del grave si valuta sempre per lo spazio percorso con moto uniforme, quindi avendosi lo spazio percorso in 1″ con moto uniformemente accelerato, dovremo raddoppiarlo per valutare la celerità o anche la forza del corpo.

Si ripeta la precedente esperienza ponendo il piattello distante dal cerchio nel primo caso quanto era dianzi cioè 6 pollici, e nel secondo 16, e si vedrà che questi intervalli sono percorsi in un minuto, dunque questi rappresentano le celerità acquistate in 1″ ed in 2″; e però può stabilirsi che le celerità nel moto dei gravi crescono in proporzione dei tempi. Ben si comprende che verificata una sola legge anche tutte le altre hanno da esistere e sarebbe inutile confermarle se non interessasse richiamare l'attenzione sovra ciascuna, e particolarmente sovra a questa che assegna il carattere distintivo del moto che consideriamo. Mentre di minuto in minuto va ad accrescersi la celerità, la quale cominciava da zero possiam dire che questa è velocità acquistata nelle altezze, dalle quali il corpo è caduto in quei dati tempi, o viceversa quelle altezze sono dovute alle celerità acquistate, quindi abbiamo

altezze dovute. . .	3	12	27
velocità acquistate	1	2	3

cioè le celerità stanno in ragion diretta delle radici delle altezze. Nella pratica è utile avere una tavola ove sieno registrate in metri le velocità e le respettive altezze dovute. Noi preferiamo di riportarla nel trattato dell' idraulica, perchè in esso ne è più frequente l'uso, e qui ricordiamo la formula

$$v = \sqrt{2 . 9,8 . A} = 4,427 . \sqrt{A}$$

dalla quale sostituiti per A i valori delle altezze possono aversi quelli delle velocità v con breve calcolo; e viceversa sostituiti dei numeri in metri che rappresentino le velocità, si avranno parimente in metri le altezze ad esse dovute.

Si ponga un peso di marchi 31 e l'altro di 33, vedrassi che in un mi-

nato il grave non più percorre 3 pollici ma 6, e se anche in altro modo si variasse la differenza dei due pesi, restando sempre la medesima la somma, si troverebbe essere le celerità proporzionali alle forze acceleratrici. Dalla prima esperienza si è veduto che $^1/_{64}$ della forza di gravità fa percorrere al peso in un 1″ tre pollici inglesi: da questa rilevasi che $^2/_{64}$ della forza di gravità gli fan percorrere 6 pollici cioè 2×3. Onde deducesi che 3×3 ovvero 9 pollici percorrerebbe il corpo in 1″ quando agissero $^3/_{64}$ della forza di gravitá, e per conseguenza quando agissero $^{64}/_{64}$ o tutta la forza di gravità il corpo percorrerebbe $64\times3=192$ pollici inglesi. E questo è dunque lo spazio che un corpo percorre in 1″ quando è libero a se stesso. Resultato poco differente dal vero, perchè si é trovato con altri mezzi più adattati che lo spazio effettivo é di pollici inglesi 193, che sono piedi parigini $15,0998 =$ metri 4,9044. Nel medesimo tempo con moto uniforme percorrerà metri 9,8088, se muovesi con la celerità acquistata nel moto uniformemente accelerato; e poichè la celerità si misura per lo spazio percorso con moto uniforme nell' unità di tempo, e la celerità è proporzionale alla forza, questo numero suol prendersi per il valore della gravità a Parigi; e presso di noi per la diminuzione dovuta alla minor latitudine si riterrà $g=9^m,8$.

171. *Applicazioni delle leggi del moto verticale dei gravi.*— Si chiami A l' altezza dalla quale è caduto un corpo per acquistare una velocità v avremo $A= {}^1/_2 \times 9^m,8.\ t^2$ la qual formula serve per darci l'altezza percorsa in un certo tempo. Si voglia il cammino percorso da un grave che ha seguitato a cadere per 7″ avremo $A = {}^1/_2 .\ 9^m,8.\ 49 = 40^m,1$.

Per conoscere la velocitá acquistata in un certo tempo ci varremo dell'altra formula $v = 9^m,8 \times t$. Si voglia sapere quanta velocità avrà acquistata quel grave: sarà

$$v = 9^m,8 \times 7 = 68^m,1 \text{ circa.}$$

Per ottenere la velocità dovuta ad una certa altezza abbiamo

$$A= \frac{v^2}{2g} \text{ cioè } v^2=2gA$$

ovvero $v = 4,727 \sqrt{A}$. Sia caduto un corpo dall' altezza 10^m, la velocità acquistata sarà $v = 4,727 \sqrt{10} = 14,7$ circa.

Può interessare anche di conoscere in quanto tempo un corpo è disceso da una certa altezza, ed in questo caso useremo la formula

$$t^2 = \frac{2A}{g}:$$

nell'esempio precedente

$$t^2 = \frac{20}{9,8} = 2,04,$$

cioè il tempo è un minuto secondo e 4 decimi circa.

Quando fosse richiesto conoscere da quant' altezza è venuto un corpo che aveva cadendo una certa forza, si potrà adoprare la formula

$$A = \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{19,6}.$$

Sia caduto un corpo con celerità di 100^m per 1″ si vuol sapere da quale altezza è venuto?

$$A = \frac{10000}{19,6} = 561^m,2.$$

Questa stessa formula ci insegna trovar l'altezza da cui deve farsi cadere un corpo acciocchè possa la sua forza equilibrare un dato urto, e l' altra $v^2 = A\ .\ 19,6$ ci dà un modo di esprimere una qualunque forza di urto per quella acquistata dai gravi cadendo.

Per ultima applicazione cerchiamo a qual distanza si troveranno l'uno

dall'altro due corpi uno dei quali è stato lasciato cadere 1" prima dell'altro. Dopo il primo 1" della partenza sarà la distanza $4^m,9\times3$: dopo un altro secondo $4^m,9\times5$, e così negli altri secondi andranno queste distanze crescendo come i numeri impari. Quindi intendesi perchè l'acqua cadendo deve il getto assottigliarsi, e rendersi discontinuo, e convertirsi in pioggia più o meno fine, secondo che è venuta da maggiore o minore altezza.

Tutte queste deduzioni si dipartono dalla supposizione che l'aria non opponga resistenza al moto dei gravi, ma ciò può ritenersi soltanto per i corpi molto pesanti, e lasciati andare da non grandi altezze come sarebbero 20^m. In questo caso si potrebbe anche servirsi del tempo impiegato da un globetto di piombo nel cadere per misurare le altezze; occorrerebbe però un buon orologio che marcasse i quinti di secondo.

172. *Moto uniformemente ritardato*. — Questo moto suppone eguali diminuzioni di velocità in eguali tempi, e perciò conviene che il corpo abbia una velocità iniziale, e venga sollecitato da una forza continua costante in direzione contraria al suo moto primitivo. Quindi gli spazj descritti con questo moto nei successivi minuti secondi staranno come i numeri impari presi inversamente. Vale a dire che se nel primo minuto il corpo percorre sette unità di spazio, nel successivo minuto ne percorrerà cinque, e poi tre, e finalmente una, e cesserà dal moto. In generale tuttociò che abbiamo detto del moto accelerato si applica al moto uniformemente ritardato purchè si suppongano diminuzioni in luogo degli aumenti di velocità. Un esempio di questo moto si ha (prescindendo al solito dalla resistenza dell'aria) in quello di un grave gettato in alto in direzione verticale: Esso impiegherà a salire con moto uniformemente ritardato fino all'altezza ove si estingue la sua celerità, tanto tempo quanto ne abbisognerebbe per discendere da quella altezza con moto uniformente accelerato. In oltre esso avrà in ciascun punto della sua salita quella stessa celerità, che si ritroverebbe quando vi fosse giunto discendendo.

Le formule per questo moto saran quelle del moto uniformemente accelerato, che ha una celerità iniziale, colla differenza che ora dovrà prendersi la forza acceleratrice g con segno contrario, perchè agisce in direzione contraria. Quindi si ridurranno

$$v = v' - gt \qquad s = v't - \frac{gt^2}{2}.$$

Queste mostrano che nel moto uniformemente ritardato le velocità sono come i tempi che restano fino alla cessazione del moto, perchè chiamato T il tempo che durerà il moto ritardato avremo $v = g\,(T - t)$ e gli spazj che restano a percorrersi sono come i quadrati dei tempi. Infatti $v't$ è lo spazio che descriverà il corpo ed abbiamo

$$v't - s = \frac{gt^2}{2}$$

Esperienza. — Si pongano alla macchina d'Attwood i due pesi eguali a 31 $^1/_2$ marchi: si collochino due anelli all'asta che porta la divisione per i quali possano passare i due pesi. Uno di essi sia al 12 della divisione, e l'altro a tal punto cosicchè rimanga all'altezza del secondo peso quando il primo peso è al primo anello. Si posi sù ciascuno anello una verghetta metallica eguale ad un marco, in modo che una venga presa da un peso quando l'altra è lasciata sull'anello. Si faccia cadere dal ze-

ro il peso che ha raccolto la verghetta, e che rimane presso alla riga divisa. Si troverà che impiega 2″ ad arrivare all'anello: ivi lascia la verghetta, e l'altro peso allora passando per il suo anello si carica della verghetta, onde al moto accelerato succede il ritardato: questo seguita altri due minuti secondi, e dopo questo tempo il primo peso si ritrova alla divisione 24 senza velocità.

175. *Moto verticale de' gravi ne mezzi resistenti.* — La resistenza R dell'aria e degli altri mezzi, diminuisce gli aumenti v della velocità V del mobile, e va essa crescendo a misura che questa si accresce. Si rappresenti con Q il volume apparente o esterno del corpo, e con nQ quello del fluido che vien trasportato dal corpo mentre si muove. Sia p la gravità specifica media del corpo; cioè quella che si otterrebbe dividendo il peso P del corpo per il suo volume esterno Q; e sia p' la gravità specifica del fluido. Nella caduta de' gravi la forza acceleratrice produrrà un effettivo acceleramento ogni qual volta la quantità $p-p'$ sarà positiva. La forza acceleratrice vien data dal peso che il corpo conserva nel mezzo resistente, diminuito della resistenza del mezzo, cioè avrà il valore $(p-p')Q-R$. Ed essendo sempre la forza acceleratrice (*Int.* 110) data dalla massa in movimento, moltiplicata per il rapporto tra la velocità accresciuta, e il tempo minimo nel quale si fa un tale accrescimento, avremo

$$\frac{(p+np')Q}{g}\times\frac{v}{t}=(p-p')Q-R$$

e per conseguenza il rammentato rapporto tra la velocità e il tempo, dal quale si scorge la legge del moto, sarà

$$\frac{v}{t}=\frac{g(p-p')}{p+np'}-\frac{gR}{(p+np')Q}$$

D'onde vedesi che il moto di discesa si accelererà continuamente, finchè il peso del corpo nel fluido sorpasserà la resistenza R; ma le accelerazioni andran sempre più diminuendo, perchè R cresce con molta rapidità all'aumentarsi della celerità V del corpo. Con qualunque forza sia esso lasciato andare di alto in basso in un fluido di densità minore della sua, la velocità convergerà sempre verso un limite senza giungervi mai esattamente. In pratica peraltro presto si raggiunge questo limite, ancorchè il mezzo resistente sia l'aria, sebbene non nel medesimo tempo per i corpi di differente volume, figura, e densità.

Allorchè il peso specifico del mobile è inferiore a quello del fluido, la velocità primitiva verrà sempre più diminuita. Si avrà parimente moto ritardato quando il corpo è lanciato in alto, e la sua densità è maggiore di quella del fluido. In quest'ultimo caso la forza ritardatrice, e la legge del moto ritardato si avrà dalle precedenti formule, ponendo il segno positivo anche alla resistenza R. Per i proiettili sferici d'artiglieria lanciati verticalmente nell'aria di basso in alto si potrà trascurare il termine np' relativo al fluido trasportato, e siccome il lor peso P, anche quando fosser vuoti è almeno 3000 volte più grande di quello del fluido scacciato, si potrà trascurare anche p' e si avrà

$$\frac{v}{t}=g\left(1+\frac{R}{P}\right)=9^{m},8\left(1+\frac{21.2R}{11.p.d^{3}}\right)$$

Dalla qual formula scorgesi come influisca il peso specifico p, e il diametro d del proiettile. In essa stando alla dottrina di Newton, e alle esperienze che egli e il Desaguliers han fatte sulla resistenza dell'aria convien porre $R=0,010806.v^{2}$.

174. *Applicazione.* — Parlando dell'attrito abbiamo veduto una applicazione di questa dottrina nella determinazione del coefficente d' attrito nel caso che i corpi si muovano. Muovasi un corpo per mezzo dell' urto sovra un piano orizzontale, ed abbia per forza ritardatrice costante l'attrito. Come in esso invece dal peso del corpo deve prendersi fP; così trattandosi di moto invece della gravità g dovremo porre fg, e per conseguenza chiamando V_1 la celerità impressagli nell' urto, V quella che si ritrova in qualunque tempo t del moto, le formule, che determinano il suo movimento saranno

$$V = V_1 - fgt, \quad S = V_1 t - \frac{fgt^2}{2}$$

dalle quali rilevasi $V^2 = V_1^2 - 2fgS$. Tutte le macchine nelle quali dopo essere il moto durato per un certo tempo cessa di agirvi la forza motrice, potranno riguardarsi come mosse da un urto e per le resistenze acquisteranno un moto ritardato. Volendo sapere quanto è il tempo che seguita il moto ritardato, quanto è lo spazio che percorre il corpo, dovremo fare $V = 0$, e rappresentato quel tempo per T' avremo come si è detto (72) $V_1 = fgT'$, $V_1^2 = 2fgs$, e perciò

$$T' = \frac{V_1}{fg}, \quad s = \frac{V_1^2}{2fg}.$$

Si vede dunque che anche nel moto cagionato dall' attrito come in quello cagionato dalla gravità il peso del corpo influisce soltanto sulla velocità iniziale V_1.

175. *Lavoro relativo alla velocità della caduta de' corpi.* — Si valuta la quantità di lavoro o di azione che produce la gravità nell' accelerare il moto dei corpi cadenti, e vincere la loro inerzia prendendo l' altezza A dalla quale il corpo è caduto invece di quella a cui potrebbe sollevarsi, lo che sappiamo potersi fare perchè la celerità acquistata nella discesa serve a far rimontare il corpo all' altezza da cui è caduto. Quindi detto P il peso del corpo, e A l' altezza dalla quale esso è disceso, avremo il lavoro sviluppato dalla gravità e consumato dall' inerzia $= P.A$, e questa quantità di lavoro sarà accumulato nel corpo, e vi avrà generata la velocità v, che è data dall' equazione $v^2 = 2gA$. Da questa abbiamo

$$A = \frac{v^2}{2g}$$

e per conseguenza

$$P.A = P.\frac{v^2}{2g}$$

cioè la quantità di lavoro sviluppato dalla gravità nell' imprimere al corpo la celerità v è la metà del prodotto ottenuto dal moltiplicare il quadrato della velocità per il rapporto fra il peso e la gravità.

176. *Relazione tra la forza viva ed il lavoro meccanico.* — Siccome questo rapporto $\frac{P}{g}$ è la mossa del corpo, avremo $P.A = \frac{1}{2} M v^2$, vale a dire la forza viva accumulata dalla gravità nella caduta verticale dei corpi è il doppio del lavoro prodotto dalla gravità istessa. E per la relazione stabilita tra il moto uniformemente ritardato e quello uniformemente accelerato, possiam dire che nella discesa e nella salita dei gravi la metà della forza viva acquistata o distrutta misura la quantità di lavoro necessario a vincere l' inerzia del corpo coerentemente a ciò che avevamo promesso di dimostrare nella Introduzione (108). Questo principio ha luogo qualunque sia la forza motrice, e la legge del moto, e per dimostrarlo osserviamo che il lavoro elementare può esprimersi con F.V.t (*Int.* 107) essendo V.t il cam-

mino elementare (161) ed anche per $M.Vv$ perchè abbiamo stabilito essere (*Int.* 110).

$$F = \frac{Mv}{t}.$$

Ora la somma dei lavori elementari che compone il lavoro totale è facile trovarsi per la considerazione di una figura geometrica, avvertendo che M è un fattor comune ed invariabile si tratta di trovare semplicemente la somma dei prodotti Vv. Si prendano sulla retta aa'''' i diversi valori di v, aa', $a'a''$, $a''a'''$.... che sono i successivi accrescimenti della velocità nei diversi istanti tutti eguali a t; le lunghezze aa', aa'', aa'''... saranno le velocità totali acquistate alla fine dei detti istanti. Si portino queste medesime lunghezze sulle ordinate corrispondenti $a'b'$, $a''b''$, $a'''b'''$..., onde esse determinino la linea retta $ab'b''b'''$... inclinata per 45° sull'asse delle ascisse. Preso a considerare l'accrescimento fb'''' che rappresenta un valore di v avremo, il prodotto corrispondente $V.v$ espresso dal rettangolo $a''''b''''.a'''a''''$, dunque la somma cercata di tutti i prodotti Vv sarebbe la somma dei rettangoli che hanno le ordinate per altezza, e per base la distanza respettiva fra di esse; ma la somma di questi rettangoli allorchè trattasi di veri istanti è l'area compresa fra la retta ab'''', l'asse aa'''', e le ordinate che corrispondono al principio ed alla fine del tempo per il quale può calcolarsi la forza motrice. Premesso ciò supponiamo primieramente che il corpo parta dalla quiete e che vogliasi la somma dei prodotti Vv relativa alla celerità acquistata $a''''b''''$, che chiameremo V'. Questa somma è rappresentata dal triangolo $aa''''b''''$, il quale ha per misura $\frac{1}{2} V'^2$. La quantità adunque di lavoro corrispondente alla celerità acquistata V', e consumata dall'inerzia del corpo sarà $\frac{1}{2}MV'^2$, cioè la metà della forza viva comunicata a questo corpo dopo il momento della sua partenza. Questa dimostrazione si applica egualmente al caso che il corpo non parta dalla quiete: infatti chiamando V, V' la celerità iniziale e finale, avremo per la misura del trapezio dato dalla figura $\frac{1}{2}(V'^2 - V^2)$, che moltiplicato per M forma la metà della forza viva acquistata nel moto. Perciò possiam dire che la relazione tra il lavoro e la forza viva è la stessa, comunque si abbia un moto vario, accelerato o ritardato.

Moto de gravi per i piani inclinati e per le curve resistenti.

177. *Moto de' gravi per i piani inclinati.* — Essendo la gravità relativa (170) una porzion determinata della gravità assoluta, ancorchè si consideri l'attrito sarà il moto dei gravi per i piani inclinati uniformemente accelerato, e tanto meno celere quanto l'altezza è più piccola della lunghezza, e potremo dedurre gli spazj che il grave percorre in un minuto secondo dalla formula

$$\frac{A - fB}{L}\, 4^m,9$$

Sarà uniformemente ritardato quando per mezzo di un'urto montasse il corpo lungo il piano inclinato nella direzione della lunghezza.

Non considerando l'attrito, gli spazj percorsi in egual tempo da due gravi uno dei quali cada per la verticale, e l'altro per il piano inclinato sono tra loro come la lunghezza del piano all'altezza perchè nello stesso rapporto stanno le forze che li accelerano. Lo stesso può dirsi delle celerità acquistate in egual tempo dai due gravi. Quindi essen-

do AC (Tav. VI fig. 7) lo spazio verticale si determinerà quello per il piano abbassandovi la perpendicolare CD. E perciò avendosi un cerchio verticale ADEC si può come insegnava Galileo far cadere nel medesimo tempo un corpo per il diametro verticale AC, e per una qualunque delle sue corde AD, AE, ec: che partono dalla sommità di quel diametro. Questa esperienza si eseguisce tenendo in quelle direzioni tesi dei fili metallici, e lasciando lungo essi cadere dei globi metallici infilati, come mostra la figura in m, m'. I globi in tutti gli istanti della lor discesa si ritrovano sù punti d'una stessa circonferenza verticale tangente nel punto di comun partenza.

Se il corpo si lascerà discendere per tutto il piano inclinato AB percorrerà uno spazio tanto più lungo della verticale AC quanto è più piccola la forza acceleratrice e per conseguenza il valore $v = \sqrt{2gs}$ dalla celerità acquistata rimarrà lo stesso. Perciò quando scende un corpo pel piano inclinato, acquista la stessa celerità che otterrebbe cadendo dall'altezza del medesimo: fatta però astrazione dell'effetto dell'attrito. Di questa dottrina si fanno utilissime applicazioni per ès.° allorquando coll'urto di una cascata di acqua si deve far muovere una macchina, potrà condursi l'acqua per un condotto obliquo fino alla macchina, e si otterrà la stessa forza (facendo astrazione dalla resistenza del condotto) che si sarebbe avuta lasciando cader l'acqua dall'alto; lo che permette di dare alla forza dell'acqua quella direzione che è richiesta dalla macchina. Volendo tener conto della diminuzione di velocità che si ha sul piano inclinato per effetto delle resistenze, converrà nella sopra riportata formula porre in luogo della forza acceleratrice g, quella a cui si riduce la forza di gravità per l'attrito (107), e per le altre resistenze (173).

Quando da un piano inclinato deve il corpo passare sopra un altro piano inclinato che ha minore inclinazione la gravità relativa cambierà diminuendo colla stessa regola che si è detta di sopra, e la velocità acquistata nel passaggio dall'un piano all'altro si perderà in parte urtando il nuovo piano. Qui per valutare la celerità che rimane al corpo ricorreranno le teorie che esporremo sull'urto. Ma per servire alla pratica possiamo avvertire che quando nella congiunzione de' due piani si disponga un terzo piano poco esteso elastico e normale alla linea che divide per metà l'angolo formato da' due piani primitivi, non si avrà sensibile perdita di velocità nel passaggio da un piano all'altro.

178. *Discesa de' gravi per le curve resistenti, e particolarmente per archi circolari, e per la cicloide*. — Il grave che discende per una curva resistente, cambia continuamente di forza acceleratrice, e va con moto variamente accelerato. La sua celerità acquistata si conserva mentre passa da un elemento all'altro della curva perchè si può dire che l'angolo che fa un'elemento coll'altro è $= 180°$, o piuttosto per esser nella curva la disposizione che abbiamo avvertita qui sopra. Quindi la celerità che acquista un grave cadendo per una curva è eguale a quella che acquisterebbe se cadesse per l'altezza che ha la curva istessa, e così anche per tutti i punti della curva si ritrova il grave la celerità dovuta all'altezza da cui è disceso. Egualmente la forza viva acquistata, o il lavoro della forza di gravità è lo stesso tanto che il gra-

ve sia disceso per la verticale quanto quando è disceso per una curva. E ci faremo idea della velocità acquistata, della forza viva concepita, e del lavoro meccanico prodotto dalla forza di gravità, quando un grave cade per i diversi elementi della curva, dall'osservare quale è l'altezza verticale che ad essi corrisponde.

Avendosi una curva circolare il grave discenderà accelerando più il suo moto nei primi tratti, che sono molto elevati all'orizzonte, e meno nei tratti successivi; quando giunge al punto più basso cessa l'accelerazione, e comincia a risalire con moto ritardato. La legge con la quale si ritarda il moto nella salita è quella stessa con la quale si è accelerato nella discesa per modo che quando il grave trovasi ad eguale altezza nella sua discesa e nella sua salita, ha sempre la medesima celerità. Di qui rilevasi che quando un corpo è disceso per una curva la celerità acquistata lo fa rimontare per una curva contrapposta alla stessa altezza, e quindi riscendendo da questa lo fa rimontare sulla prima, e così di seguito, per modo che il moto non cesserebbe mai se non vi fosse l'attrito (comprendo in esso anche le altre resistenze). Questo altera le leggi del moto col diminuire successivamente la forza del corpo, e non tanto nella discesa quanto nella salita. Per esser l'attrito una forza proporzionale alla pressione, cresce a misura che la curva si fa più sdraiata, ed a molto maggior ragione il moto per la discesa sulla curva vien meno che uniformemente accelerato, e poco più che uniformemente ritardato quello della salita. Gli archi di differente ampiezza sono percorsi in tempi diversi, ammenochè non si tratti di archi molto minimi (vedi quello che dirò del pendolo), i quali possono riguardarsi come cicloidali, ed allora tutti più o meno piccoli sarebbero percorsi nel medesimo tempo coerentemente a quello che diciamo qui appresso.

La cicloide ha singolarissime proprietà meccaniche, nè può in un trattato anche il men teorico passarsi sotto silenzio. Ognun sa che quando un circolo rotola sovra una linea retta ogni punto della sua circonferenza genera una cicloide. In questa curva tutti gli archi più e meno grandi sono percorsi da un grave nel medesimo tempo: cosicchè se per una tal curva resistente si lasciano da differenti altezze cadere due globetti, giungono entrambi nel medesimo tempo al punto più basso: e per questa proprietà vien detta la cicloide *curva tautocrona*. Inoltre il tempo che impiega un grave a discendere dall'estremo superiore della cicloide ad un altro punto della curva è il minimo possibile per andare dall'uno all'altro punto: cioè impiegherebbe maggior tempo se andasse da uno all'altro punto per una curva diversa, o anche per la linea retta; quindi ne viene alla cicloide anche il nome di *curva brachistocrona*.

Ecco adunque per i bisogni della meccanica le soluzioni dei due seguenti problemi geometrici: 1.° descrivere una cicloide che abbia determinato il suo punto infimo, e il superiore collocato sovra un'orizzontale elevata per una voluta altezza da quel punto: quest'altezza sarà il diametro del circolo generatore. 2.° Costruire sovra una retta orizzontale una cicloide che parta da un punto ivi determinato e passi per un'altro assegnato punto più basso: si costruisca un'altra qualunque cicloide su quell'orizzontale che abbia il dato

punto di partenza; e dopo per ottenere il diametro del circolo generatore si faccia la proporzione; il diametro cercato, sta al diametro del circolo che si è usato per la cicloide descritta, come la retta condotta per i due punti dati sta alla porzione determinata sù questa retta dall'incontro della cicloide descritta.

Moto rotatorio, e per le trajettorie.

179. *Velocità tangenziale ed angolare.* — Della dottrina dei momenti che sopra abbiamo esaminata (115) dobbiam valerci per determinare il moto dei corpi attorno ad un asse. È chiaro che la forza non potrà produrre effetto per questo movimento se non in quanto rimane essa, o una sua componente, in un piano normale all'asse, ed in oltre potrà il suo effetto calcolarsi dal suo momento riferito a quell'asse. Supponendo il corpo che ruota composto di un sistema di punti o particelle unite tra loro in maniera invariabile per mezzo di rette inflessibili, qualunque siano le forze sovra a questo sistema, tutti i punti che lo compongono descriveranno nel tempo stesso una circonferenza in piano normale all'asse fisso, che avrà per raggio la distanza di ciascun punto dell'asse, e la *celerità effettiva* d'ogni punto sarà proporzionale a detta circonferenza o al raggio della medesima. E poichè gli archi di cerchio descritti nel medesimo tempo da tutti questi punti avranno il medesimo numero di gradi, se si divide la celerità di ogni punto per le respettive distanze dall'asse, avrassi un quoziente che non varierà passando da un punto all'altro del sistema. Questo quoziente è ciò che si chiama *celerità angolare* o di rotazione; da altri è definita la velocità di quei punti la cui distanza dall'asse di rotazione e uguale ad 1. Tal velocità sarà uguale in tutti i punti nel medesimo istante, ma potrà variare da un' istante all'altro. Detta ω la velocità angolare, v quella effettiva, r le distanze del punto considerato dall'asse avremo

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

e perciò $v = \omega r$. Quindi 1.° colla stessa velocità tangenziale la velocità angolare sta in ragione inversa del raggio: 2.° collo stesso raggio la velocità tangenziale e la velocità angolare sono proporzionali: 3.° nota che sia la distanza dall'asse, la velocità tangenziale è data dall'angolare.

180. *Formule della velocità angolare, della forza acceleratrice angolare, e della forza viva nei corpi che ruotano.* — Essendo $\omega . r$ la velocità di una particella m elementare del corpo rotante posta alla distanza r dall'asse, sarà $\omega r m$ la forza di essa; ed il momento di questa forza dovrà esprimersi per $\omega r^2 m$. Ciò che dicesi di una particella m può ripetersi di tutte le altre m' m'' ec. onde il momento della forza intiera sarà $\omega (r^2 m + r'^2 m + r''^2 m'' + \ldots)$

Chiamata dunque F la forza che fa rotare il corpo, a la distanza fra l'asse ed il punto cui s'applica, il suo momento sarà aF. E per la dottrina dei momenti dovremo avere aF $= \omega (r^2 m + r'^2 m' + r''^2 m'' + \ldots)$ e di qui rilevasi

$$\omega = \frac{Fa}{r^2 m + r'^2 m' + \ldots}$$

cioè la velocità angolare è uguale al momento delle forze impresse al corpo, divise per le somme dei quadrati delle distanze delle particelle dall'asse di rotazione, moltiplicati per le particelle respettive. Quest' ultima

quantità che divide il momento delle forze è ciò che i meccanici chiamano *momento d'inerzia*; io credo perchè dipende dalle masse del corpo, e fa diminuire la velocità angolare. Comunque però si abbia a prendere quest'espressione, certo è che sommamente interessa saper trovare il momento d'inerzia d'un corpo, perchè da quello si desume la celerità angolare, dalla quale poi dipende la legge del moto rotatorio.

La forza acceleratrice si esprime per la massa nel rapporto dell'accrescimento della velocità al tempuscolo nel quale si è quello ottenuto. Questo accrescimento ne sarebbe venuto per forza acceleratrice di ogni particella

$$=\frac{mv_1}{t}=\frac{mr\omega_1}{t}$$

essendo v_1 la velocità effettiva accresciuta nel tempuscolo t, ed ω_1 la velocità angolare accresciuta nello stesso tempuscolo; e perciò si sarebbe trovato la forza acceleratrice φ

$$\frac{\omega_1}{t}=\varphi=\frac{F.a}{r^2 m + r'^2 m +}$$

Ogni particella ha per forza viva $m\omega^2 r^2$, onde tutto il corpo avrà $\omega^2\,(mr^2+m'r'^2+...)$ onde la forza viva di esso è eguale al prodotto del momento d'inerzia nel quadrato della velocità angolare. Supponiamo che in un certo tempo la velocità angolare si accresca e divenga ω' avremo $(\omega'^2-\omega^2)(mr^2+m'r'^2+\ldots)$ eguale al doppio del lavoro meccanico prodotto dalla forza che ha aumentato il moto.

181. *Momenti d'inerzia.* — Il momento d'inerzia di un corpo per rapporto ad un asse non è altro che la somma delle masse che compongono il corpo moltiplicate per il quadrato della loro distanza respettiva all'asse. Rimane più facile a trovare questi momenti quando l'asse passa per il centro di gravità, ed è per questo che suolesi risolvere il seguente problema. Trovare il momento d'inerzia per rapporto ad un asse qualunque, dato per mezzo di quello relativo ad un'altro asse parallelo condotto pel centro di gravità. Sia quest'ultimo asse GH (Tav. VI. fig. 8.); LM un asse parallelo a GH; m una piccola massa del corpo MLH, per la quale immagineremo condotto un piano perpendicolare a questi due assi che li tagli in a e in b. Formiamo il triangolo amb, e abbassiamo dal punto a la perpendicolare ma. Si avrà per la proprietà del triangolo

$$\overline{mb}^2=\overline{ma}^2+\overline{ab}^2\pm 2\,ab\,.\,ad$$

Designando con r la distanza mb del punto m dall'asse LM; per r_1 quella ma del medesimo punto dell'asse GH del centro di gravità, per K la distanza costante ab de'due assi, e per d la distanza ad del punto m del piano condotto per GH perpendicolarmente a quello ove giacciono i due assi, l'equazione precedente diviene

$$r^2=r_1^2+K^2\pm 2\,Kd$$

e moltiplicando per la massa m si avrà $mr^2=mr_1^2+mK^2\pm 2Km.d$. Così pure per le altre masse m', m''... si troverebbe

$$m'r'^2=m'r_1'^2+m'K^2\pm 2K\,m'd$$
$$m''r''^2=m''r''^2_1+m''K^2\pm 2\,Km'd$$
ec. ec.

Sommando tutte queste equazioni termine a termine, e chiamando I il momento d'inerzia:

$$m\,r^2+m'r'^2+m''r''^2+\ldots$$

per rapporto all'asse LM; ed I_1 il momento d'inerzia

$$mr_1^2+m'r_1'^2+m''r''^2_1+\ldots$$

per rapporto all'asse GH che passa pel centro di gravità si giunge ad avere

$$I=I_1+K^2\,(m+m'+m''+\ldots)$$
$$\pm 2K\,(md+m'd'+m''d''+\ldots)$$

ora $m+m'+m''$... ec. è la massa tota-

le del corpo; $md+m'd'+m''d''+ \ldots$ è la somma dei prodotti di ciascuna massa parziale per le sue distanze da un medesimo piano che passa per l'asse di gravità, e riman perpendicolare al piano condotto per i due assi; ovvero è la somma dei momenti di queste masse per rapporto a questo piano, o anche il momento della massa totale M per la distanza del centro di gravità dal piano. Ma il centro della gravità del corpo è situato sull'asse GH, e per conseguenza nel piano di questi momenti, dunque la distanza di questo piano è nulla, e lo stesso può dirsi della somma

$$md + m'd' + m''d'' + \ldots$$

Dunque la relazione precedente si riduce a quest' altra $I = I_1 + MK^2$ cioè il momento d'inerzia di un corpo preso per rapporto ad un asse qualunque è uguale al momento di questo corpo preso per rapporto ad un asse parallelo che passa per il centro di gravità, aumentato del prodotto della massa del corpo moltiplicata per il quadrato della distanza del centro di gravità dal primo asse. Resulta da questo teorema che se le distanze di diverse particelle di un corpo dal suo centro di gravità sono piccole relativamente a quella che separa il suo centro dall'asse di rotazione, si potrá semplicemente prendere per momento d'inerzia il prodotto della massa del corpo per il quadrato della distanza del centro di gravità dall'asse.

I momenti d'inerzia di cui abbiamo fin qui parlato sono relativi alle masse parziali m, m', m'' ec. di un corpo. Ora se il corpo è omogeneo e si rappresenta con D la sua densità, per $v, v', v'' \ldots$ i volumi delle suddette masse. Queste saranno eguali respettivamente alle qualità Dv, Dv', $Dv'' \ldots$, ed il momento d'inerzia $mr^2 + m'r'^2 + \ldots$ potrà essere posto sotto questa forma

$$D(vr^2 + v'r'^2 + v''r''^2 + \ldots)$$

e la quantità tra parentesi potrà dirsi momento d'inerzia rapporto al volume del corpo, il quale trovato non dovremo far altro che moltiplicarlo per la densità. Qui possiamo indicare i momenti d'inerzia dei volumi già calcolati per diversi corpi con le regole che assegna la mattematica applicata, e che si desumono dai sopra espressi principj, osservando che la quantità tra parentesi può esprimersi in un corpo ad elementi continui con $\int r^2\, dv$, e che tanto r quanto v si rappresenta nei casi particolari con una funzione delle coordinate che determinano l'equazione del corpo di cui vuolsi il momento d'inerzia.

Nel valore del momento d'inerzia I_1 che e sempre positivo, entra per fattore la massa del corpo, onde può indicarsi con MK'^2 come vedesi dai seguenti

182. *Esempi, o formule per i momenti d' inerzia dei differenti volumi.* — I. Il momento d'inerzia d'una verga la cui lunghezza sia a preso per rapporto ad un asse che passi per il suo mezzo e le sia perpendicolare è: $^1/_{12}\, a^3$. In questo caso è facile trovare il valore del momento d'inerzia perchè vr^2 non è che la misura di un parallelopipedo che ha per altezza v, e per base un quadrato di un lato r, e l'insieme di tutti i parallelopipedi vr^2, $v'r'^2$, $v''r''^2$, ec. non forman che due piramidi a base quadrata che hanno il vertice al mezzo della verga proposta, e le basi alle estremità con il lato $^1/_2\, a$. La misura di una è

$$^1/_3 \cdot {}^1/_2\, a \times (^1/_2\, a)^2 = {}^1/_{24}\, a^3$$

e di ambedue $^1/_{12}\, a^3$.

Se l'asse fosse perpendicolare e all'estremità della retta il momento d'inerzia sarà $^1/_3\, a^3$.

II. Il momento d' inerzia di un cilindro retto a base circolare il cui raggio sia r e la cui altezza sia a sarà

$$\frac{\pi}{2} ar^4$$

rappresentando con π il rapporto della circonferenza al diametro, ossia 3,142, supposto che l'asse di rotazione sia quello del cilindro.

Quando il cilindro non abbia lunghezza, cioè si riduca un circolo, il momento d'inerzia è $^1/_2\ \pi r^4$. E se in questo caso si prende per asse un diametro avremo $^1/_4\ \pi r^4$.

III. Quello di un anello rettangolare concentrico all' asse che ha una grossozza a; un altezza nella direzione del raggio b, ed un raggio medio r sarà:

$$2\pi . rab \left(r^2 + \frac{b^2}{4}\right)$$

o semplicemente: $2\pi r . abr^2$ quando vogliasi un valore approssimativo, e quest' approssimazione sarebbe presso a poco di un centesimo quando b è minore di $^1/_5\ r$.

Quando l'anello è una linea, cioè si ha una sola circonferenza il momento d' inerzia è $2\pi r^3$. Essendo in questo caso l'asse un diametro, il momento d' inerzia si riduce πr^3.

IV. Quello di un segmento sferico per rapporto al diametro che passa per il mezzo di questo segmento sarà $\pi . f^3 (^2/_3 r^2\ ^1/_2 fr + ^1/_{10} f^2)$, ove r è il raggio della sfera, ed f la saetta del segmento. Il momento d' inerzia della sfera intiera per rapporto ad uno dei suoi diametri è $^8/_{15}\ \pi\ r^5$

Quello di un' emisfero riferito ad un' asse condotto per il centro di gravità e perpendicolare all' asse di rivoluzione è $^{83}/_{480}\ \pi r^5$.

V. Quello di un cono retto a base circolare che ha r per raggio della base, ed a per altezza è:

$$\frac{\pi}{10} ar^4$$

Per conseguenza quello di un tronco di cono retto la cui altezza è a, e le cui basi hanno r, r' per raggio, sarà quando è preso rapporto all' asse

$$\frac{\pi a}{10} \left(\frac{r^5 - r'^5}{r - r'}\right)$$

Quello di un cilindro $^1/_2 \pi ar^4$. Quando l' asse di rotazione nel cilindro e nel cono passa per il centro di gravità, ed è perpendicolare all' asse di figura, si ha

per il cil. $^1/_4 \pi r^4 a + ^1/_{12} \pi r^2 a^3$

per il cono $^1/_{20} \pi r^4 a + ^1/_{80} \pi r^2 a^3$

VI. Il momento d' inerzia d'un elissoide chiamando a,b,c i suoi tre assi e V il suo volume $= ^4/_3\ \pi abc$, preso per rapporto al diametro a, trovasi

$$\frac{V}{5} (b^2 + c^2)$$

VII. Quello di un perallelopipedo rettangolo i cui tre lati sono a, b, c preso per rapporto ad un asse che passi per il suo centro, e sia parallelo al lato a, trovasi $^1/_{12}\ abc (b^2 + c^2)$. Il momento d' inerzia preso per rapporto ad una retta parallela ad a, che passa per il mezzo della faccia di cui sono lati b, e a si trova

$$^1/_{12}\ abc\ (b^2 + 4c^2)$$

Preso per asse il lato c, si avrà

$$^1/_3\ abc\ (a^2 + b^2).$$

VIII. Quello di un prisma retto a base di trapezio, ove sieno b, b' i lati paralleli del trapezio, e sia c l'altezza perpendicolare sul mezzo di questi lati, preso questo momento per rapporto ad un asse diretto al mezzo delle grandi basi b de' trapezi, e parallelo al lato a, sarà

$$ac\left(\frac{b + b'}{2}\right) \left(\frac{b + b'^2}{24} + \frac{c^2}{6} . \frac{b + 3b^2}{b + b'}\right)$$

Quando b, b' sono minori di $^1/_3\ c$ e si può trascurare $\dfrac{b + b'^2}{24}$

per modo che il momento d'inerzia diviene $\dfrac{ac3}{12} (b - 3b')$

con approssimazione presso a poco di $^1/_{56}$.

IX. Se invece de' trapezi del prisma si sostituiscono dei segmenti di parabola che abbiano c per lunghezza del grand' asse, e b per corda perpendicolare a quest' asse che termini la parabola, il momento d' inerzia per rapporto ad una retta parallela ai lati a del prisma e che passi per il mezzo di b è:

$$^2/_3\, abc \left(\frac{15b^2 + 16\, c^2}{70}\right)$$

Quando b sarà minore di $^1/_5\, c$ prenderemo $^2/_3\, abc \,.\, ^{16}/_{70}\, c^2 = ab\, c^3$ con approssimazione di $^1/_{14}$ presso a poco. Quest' ultimo articolo riguarda le braccia del bilanciere, la di cui forma deve avvicinarsi a quella della parabola per offrire un egual resistenza in tutti i punti.

183. *Applicazioni*. — Quando nelle applicazioni il momento d' inerzia $I = I_1 + MK^2 = (mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \ldots)$ non si possa trovar facilmente trascurando I_1 e servendosi della sola formula MK^2 come ho detto di sopra (181), si potrà riguardare il corpo come diviso in sezioni ciascuna di un decimetro circa di grossezza, e considerando per ciascuna concentrata la massa nel centro si userà la formula $(mr^2 + m'r'^2 + \ldots)$

Facciamo qui un applicazione dei momenti d' inerzia al caso di un maglio che giri attorno al suo asse e che abbia P per peso della testa; sia R la distanza dell' asse, dal suo centro di gravità. Per essere piccole le dimensioni della testa relativamente alla distanza R potremo prendere

$$\frac{P}{g} \cdot R^2$$

per il valore approssimato del momento d' inerzia. Quanto a quello del manico si ottiene immediatamente colla formula del N.° 7.° giacchè la sua figura è presso a poco quella di un parallelopipedo rettangolare e che gira attorno all' asse parallelo al lato a che passa per il mezzo di b, e della sua grossezza. Prendendo dunque c per la sua lunghezza, e chiamando P il suo peso; R' la distanza del suo centro di gravità dell' asse, D la sua densità avremo che il momento d' inerzia sarà

$$D \cdot \frac{abc}{12}(b^2 + c^2) + D\, abc\, R'^2 = \frac{P'}{g}\left(R'^2 + \frac{b^2 + c^2}{12}\right)$$

a motivo di $D\, abc = \frac{P'}{g}$.

Il momento d' inerzia di tutto il maglio sarà dunque

$$\frac{P}{g} R^2 + \frac{P'}{g}\left(R'^2 + \frac{b^2 + c^2}{12}\right)$$

E se si moltiplica questa quantità per il quadrato della velocità angolare otterremo la forza viva del maglio, o il doppio del lavoro meccanico che esso può produrre.

Egualmente la ricerca del momento d' inerzia si semplicizza per un volano osservando che trascurabile é il peso de' raggi, e tutte le sue parti sono collocate ad una distanza sensibilmente costante dall'asse. Così chiamando R il raggio medio del volano le distanze r, r', r'' ... delle masse m, m', m'' da quest' asse saranno eguali ad R. onde

$$I = \frac{P}{g} R^2.$$

Sia un volano peso di 2000 kil., ed abbia per raggio medio 2 metri, si otterrà sostituendo $9^m,8$ invece di g la seguente formula per l' espressione del momento d' inerzia

$$\frac{2000}{9,8} \times 4 = 816$$

Per avere la velocità angolare del volano si conteranno i giri che fa in un tempo determinato moltipliche-

remo questo numero per 2π, o per $^{44}/_{7}$. Finalmente il quoziente di questo prodotto diviso per il numero de' giri contenuti nella durata dell'osservazione non sarà altro che la celerità angolare. Poniamo che questa sia di 3^m; la forza viva sarà $816 \times 9^m = 7244$. Dunque la metà rappresenta un lavoro di $3672.^{km}$ assorbito dall'inerzia del volano, e che potrà esser restituito in seguito quando la potenza cesserà d' agire.

184. *Assi principali*. Dalla formula che sopra abbiamo stabilito per determinare la relazione tra il momento d' inerzia riferito ad un asse che passa per il centro di gravità e quello riferito ad un' altr' asse parallelo, è facile riconoscere che per una direzione data dell'asse di rotazione il momento d' inerzia è il minimo possibile, quando quest'asse passa per il centro di gravità G (Tav. VI fig. 8.) del corpo onde scorgesi che quando la forza imprime moto rotatorio attorno al centro di gravità la velocità angolare è massima. Parimente rilevasi da quella formula che tutti gli assi paralleli ad una direzione data e che sono alla stessa distanza dal centro di gravità avranno lo stesso momento d' inerzia $I = I_1 + MK^2$ ossia $= M(K^2 + K'^2)$ ponendo $I_1 = MK'^2$, lo che può farsi perchè in ogni momento d'inerzia vi è per fattore la massa (181).

Possono paragonarsi tra loro i momenti dei diversi assi che passano per il centro di gravità. Fra tutti questi vi ha un' asse pel quale il momento d' inerzia è più piccolo che per tutti gli altri. Si potrebbe quindi chiamare l' asse di *minima inerzia*. Perpendicolarmente a quest' asse ne esiste un secondo che passa similmente pel centro di gravità, pel quale il momento d'inerzia è il più grande possibile, rapporto a quelli che passano per il centro di gravità e potrebbe perciò chiamarsi l'asse di *massima inerzia*. Ve ne ha in fine un terzo perpendicolare ai due altri che potrebbe chiamarsi asse intermedio. Questi tre assi rimarchevolissimi si nominano assi principali del corpo, e le forze che danno il moto non tendono a cangiare la direzione di essi in senso alcuno, cioè nè parallelo nè perpendicolare all' asse medesimo. Resulta da ciò che un corpo posto una volta in moto attorno ad uno di questi assi principali di rotazione deve sempre continuare a muoversi intorno all' asse stesso.

185. *Applicazioni*. — Quindi concludesi che nelle macchine rotanti le parti che girano dovranno avere per asse di rotazione uno degli assi principali d'inerzia, e se è possibile quello di minima inerzia.

Quando un corpo è di uniforme densità in tutte le sue parti terminato da una superficie di rivoluzione, e simmetrico rapporto all' asse di questa superficie; quest' asse è uno dei principali. Allorchè in seguito descriveremo le macchine che devono essere poste in rotazione come la carrucola, l' argano ec. vedremo che conviene dare alle parti di esse la figura di una superficie di rivoluzione, avente per asse quello della macchina. E fin d' ora stabiliremo generalmente, che in tutti i corpi che hanno un asse di simmetria, o i loro punti sono disposti a due a due ad egual distanza dall' asse, e sulla perpendicolare condotta all' asse stesso, quest' asse è il più proprio per la rotazione. Esempj ne possono essere le trottole che girano lungamente attorno al loro asse, e lo mantengono nella situazione verticale.

Determinato un asse principale si conosce spesso la posizione degli altri due perchè sono sempre perpendicolari con quello e fra di loro, cioè formano in tutti e tre un sistema di assi ortogonali. Può avvenire che fra i momenti degli assi principali ve ne siano due eguali fra loro, o anche tutti e tre, ed ancora che tali assi siano in un numero infinito. In alcune figure semplici è facile riconoscere gli assi principali: vedesi che nel parallelopipedo rettangolo gli assi principali condotti pel centro di gravità sono tre rette parallele ai lati. Nella sfera ogni diametro può aversi per un asse principale. Nel cilindro un asse principale è l'asse stesso del cilindro e gli altri sono due diametri della sua sezione circolare che passa pel centro di gravità, lo stesso può dirsi per tutti gli altri solidi terminati da superficie di rivoluzione. Talvolta chiamansi assi principali anche quelli che non passano pel centro di gravità, ma per un qualunque altro punto del sistema, e godono in confronto di tutti gli altri che passano per il medesimo punto la proprietà che sopra abbiamo esposta per gli assi principali del centro di gravità.

186. *Centro di rotazione*. — Impressa una forza ad un corpo fuori della direzione del centro di gravità deve (*Int.* 139) esso muoversi con moto progressivo e rotatorio ad un tempo, e noi supporremo che sia v la velocità effettiva che acquista il centro di gravità e riterremo le denominazioni che abbiamo usate di sopra. Quindi la distanza dell'asse di rotazione K moltiplicata per la velocità angolare ω sarà eguale alla velocità effettiva cioè $K\omega = v$. Ora la forza dalla quale questo moto è animato potrà rappresentarsi con Mv, voglio dire per la massa del corpo moltiplicata per la velocità del centro di gravità; e supponendola applicata alla distanza a dell'asse il suo momento sarà $Mva = MK\omega a$. Sappiamo d'altronde che questo momento è uguale alla celerità angolare moltiplicata per il momento d'inerzia cioè ad

$$\omega M\ (K^2 + K'^2)$$

e quindi rilevasi $Ka = K^2 + K'^2$; ed

$$a = K + \frac{K'^2}{K}$$

Si chiama *centro di rotazione* il punto nel quale si suppone applicata la forza da cui proviene il moto, e per conseguenza quello collocato sul prolungamento della più corta distanza tra l'asse e il centro di gravità è lontano da questo centro per $\frac{K'^2}{K}$ e dall'asse per $K + \frac{K'^2}{K}$.

Poichè centro di rotazione è il punto ove in un corpo libero si è applicata la forza dalla quale ne è venuto il moto rotatorio attorno a quel dato asse: potremo dire che quell'asse non è in alcun modo dalla forza premuto, e che quando una forza agisce nel centro di rotazione e perpendicolarmente ad una retta che determini la sua più breve distanza dall'asse ed in un piano normale all'asse stesso il corpo gira senza che l'asse sia nel primo istante premuto in alcun senso, cosicchè esso tanto si avanza per il moto progressivo quanto retrocede per quello rotatorio. Vediamo dalla formula

$$a = K + \frac{K'^2}{K}$$

che la distanza del centro di rotazione dall'asse è maggiore di quella del centro di gravità.

La distanza del centro di rotazione da quello di gravità gode della proprietà di poter essere posta in vece della distanza del centro di gra-

vità dall' asse. Se infatti noi poniamo

$$\frac{K'^2}{K} = d$$

si avrà $$K = \frac{K'^2}{d}$$

ed $$a = d + \frac{K'^2}{d}$$

formula di egual composizione di quella che ci é servita per determinare la distanza del centro di rotazione dall'asse, e perciò essendo d la distanza dell' asse dal centro di gravità é

$$\frac{K'^2}{d} = K$$

la distanza del centro di gravità da quella di rotazione. L' asse dunque tenuto parallelamente a se stesso può trasportarsi al centro di rotazione, e allora ove prima trovavasi quello viene ad esistere il centro di rotazione. Questa reciprocità é sommamente importante.

187. *Della forza centrifuga.* — Nel moto rotatorio chiamasi forza centipeta quella che obbliga il corpo a non allontanarsi dal centro, mentre ogni sua particella tende a fuggire per la tangente della curva che percorre. Da questa tendenza nasce un altra forza detta centrifuga. Infatti considerando una particella in un punto m (Tav. VI. fig. 9) della curva Bm per la quale si muove; conoscesi che essa per l'inerzia proseguirebbe la tangente con moto uniforme, ma perché é obbligata a percorrere il successivo elemento mm' di curva, la sua forza si decompone in due, l'una che agisce secondo quello, e l' altra normalmente a quest' elemento cioè secondo il prolungamento esteriore del raggio d' osculo. La prima ha il suo pieno effetto e dicesi forza tangenziale; la seconda viene elisa dalla forza centripeta, serve a contrabbilanciarla, e chiamasi centrifuga. Attaccato un corpo ad un filo che sia disteso sopra un piano orizzontale, e tenuto fisso l'estremo del filo, mentre al corpo vien dato un' urto in direzione normale al filo, il corpo gira in cerchio attorno al punto fisso, si tende il filo ed anche si strappa per effetto della forza centrifuga, se non sarà abbastanza resistente. La forza centrifuga è nel circolo eguale alla centripeta, ma nell' altre trajettorie non eguaglia che la componente della centripeta posta nella direzione del raggio osculatore. Sebbene in tutte le curve si esprima nel modo che siamo per dimostrare sul circolo.

188. *Valore della forza centrifuga.* Sia una forza F applicata al punto A e lo costringa per il legame che esso ha col punto C a percorrere il cerchio AN. Costruiscasi il parallelogrammo ANMn coi lati eguali AN, An; la diagonale AM rappresenta lo sforzo necessario a cangiare la direzione di An in quella di AN, essendo essa la componente che occorre alla forza $An' = An$ per formare la resultante AN. Questo sforzo AM è dunque la forza centripeta; e può rappresentarci la sua opposta ed eguale centrifuga. Condotto il raggio CN i due triangoli ACN, NAM saranno simili e daranno CN : AN :: AN : AM e perciò

$$AM = \frac{AN^2}{CN}$$

cioè la forza centrifuga sta in ragion diretta e duplicata della velocità tangenziale, ed in ragione inversa del raggio di curvatura. Inoltre ben si comprende che questa forza deve essere proporzionale alla massa del corpo, e per conseguenza l'espressione della forza centrifuga essendo

$$F = \frac{MV^2}{R}$$

Si vede che questa forza allorchè trattasi di un corpo di piccole dimen-

sioni è eguale alla forza viva impressa divisa per il raggio del cerchio che esso descrive. Essendo il corpo di grandi dimensioni, convien ricordarsi che nel moto progressivo e rotatorio il centro di gravità è il punto che conserva celerità media (*Int.* 139) e perciò intendendo il corpo diviso in tante fette tutte normali all'asse di rotazione si potrà in ciascuna intender la massa concentrata nel respettivo centro di gravità, e si ripeterà di ogni fetta quello che ho detto del corpo di piccole dimensioni. Onde avendo tutte le fette il centro di gravità sovra una retta parallela all'asse di rotazione, la forza centrifuga del corpo sarà eguale alla massa nel quadrato della velocità che si ha in quel centro divisa per il raggio di curvatura.

189. *Esperienze sulla forza centrifuga.* – Non sarà senza vantaggio che qui io rammenti alcune delle molte esperienze che sogliionsi fare per dimostrare non tanto l'esistenza della forza centrifuga quanto le sue leggi.

I. Teso ad un telajo un filo metallico che tenga infilati diversi globetti, e fatto girare il telajo e con esso il filo in un piano orizzontale, quel globetto che rimane sull'asse di rotazione si manterrà immobile, si allontaneranno da quell'asse scorrendo per il filo tutti gli altri globetti, e con maggior forza quelli che erano collocati più lontani dall'asse. La forza centrifuga cresce dunque sebbene si aumenti la velocità, e nello stesso rapporto si accresca il raggio di curvatura; va perciò in una ragion più rapida della prima potenza della velocità; infatti è proporzionale al quadrato della velocità.

II. Per adattate guide dirette in curva a differente curvatura ne suoi diversi punti si faccia scorrere con moto uniforme un piccolo carruccio che abbia il centro di gravità assai elevato, e si vedrà il carruccio pendere alla parte convessa della curva maggiormente in quei luoghi che hanno minor raggio di curvatura. La forza centrifuga sta inversamente al raggio di curvatura.

III. Un tubo di cristallo chiuso alle due estremità abbia la parte media più bassa e più elevati gli estremi, e contenga fluidi di differente gravità specifica per es.° soluzione di solfato di rame, olio di lino, e aria. Nello stato d'equilibrio rimarrà alla parte media o più in basso il solfato di rame, ad ambedue le parti starà l'olio, e sopra a questo ad ambedue le parti starà l'aria. Fatto rotare il tubo attorno ad un'asse che passi per il suo mezzo si disporranno i fluidi inversamente a quello che erano; cioè la soluzione di solfato come più pesante anderà agli estremi che sono i più lontani dal centro sebbene sieno i più alti, l'aria si raccoglierà nel luogo più basso al mezzo, e l'olio al di sopra di questa. La forza centrifuga è maggiore nei corpi di maggior massa.

IV. Disposti due o tre cerchi di molla d'acciaio incrociati a due poli in modo che determinino una superficie sferica, e fatto girare il loro complesso attorno ad un'asse che passi in adattati fori praticati ai due poli; i cerchi divengono ovali, e la sfera si converte in un'ellissoide compressa ai due poli. Per egual cagione si spiega la compressione del globo terraqueo ai poli.

V. Un globo di cristallo ripieno per circa due terzi di acqua e l'altro terzo di aria, sia messo in rotazione rapida attorno al suo asse che io suppongo orizzontale, l'aria si racco-

gierà tutta a guisa di cilindro attorno all'asse, e l'acqua la circonderà formando una grossa armilla alla superficie del globo. Si fanno anche delle macchine che agiscono cacciando l'acqua o altri corpi lungi dal loro asse di rotazione.

190. *Applicazioni*. — Molte sono le macchine nelle quali si pone in gioco la forza centrifuga; e rimettendo a parlare in seguito dell'interessantissimo regolatore a forza centrifuga, qui accennerò il tachometro di Donkin, destinato a misurare nelle macchine in moto il grado di velocità che hanno, e la velocità che è più vantaggiosa all' oggetto cui si usano. Consiste questo in un tubo di cristallo verticale, aperto da ambe le parti, e con diametro assai grande verso il fondo, e piccolissimo nel rimanente della sua lunghezza. Il tubo, che è ripieno d'alcool colorato, pesca in un vaso che ha la figura di una conoide parabolica, tutto pieno di mercurio. Girano il vaso ed il tubo attorno al loro asse, insieme col movimento della macchina cui è lo strumento annesso; e nella velocità che acquista, la forza centrifuga fa sollevare il mercurio alla periferia del vaso, ed abbassare verso il centro. Per cui l'alcool che era sostenuto dal mercurio si abbassa lungo il tubo tanto più quanto è più celere il moto della macchina, e vistosamente per ogni piccolo aumento di velocità per effetto della differenza che è tra il diametro del tubo in alto, e quello alla sua base. Onde una scala che ha convenienti divisioni indica colla posizione del livello dell'alcool quale è la velocità ad ogni istante nella macchina, e di quanto è essa discosta dalla più vantaggiosa per il buon funzionare della macchina.

Nel moto di una fionda che scaglia la pietra, si vede prendere il grave la direzione tangenziale alla curva che aveva descritto finchè era unito alla fionda, e portarsi allo scopo cui era diretta. La destrezza pertanto di colui che maneggia quest' arme consiste nello stimar bene la tangente, e lasciare in tempo fuggir per essa il grave. Una tale arme che prima dell' invenzione di quelle da fuoco fu stimata di molta importanza, oggi serve di trastullo ai ragazzi e consiste in una cordicella che ha verso il mezzo una specie d' occhiello, ove ponesi la pietra: si congiungono le due estremità, e tenute in mano s'imprime alla corda un moto di rotazione; e poi tutto ad un tratto si lascia uno dei suoi capi, e la pietra sfugge per la tangente alla curva percorrendo una linea che può stimarsi retta almeno nei primi istanti.

Lo scudiere chè nella cavallerizza fa girare il cavallo tenendo con la mano un'estremo delle redini, deve vincere la forza centrifuga che il cavallo acquista nel giro. Quando esso raddoppia la velocità, la forza centrifuga diviene quattro volte maggiore, nove quando la triplica; e se tiene le redini più corte si aumenta lo sforzo a proporzione che le accorcia. Supponiamo che il cavallo pesi 200^k, e che descriva il cerchio di $1^m,5$ per raggio colla celerità del galoppo ordinario cioè di 4^m per $1''$, acquisterà una forza centrifuga

$$\frac{v^2}{gR} P = \frac{200 \cdot 16}{9,8 \cdot 1,5} = 217,^k7$$

Richiamando qui le notizie che abbiam date sulla stabilità (*Int.* 136) dei corpi gravi, comprenderemo perchè un cavallo il quale trotta liberamente in circolo non si tiene diritto, e si piega verso il centro del circolo tanto più quanto va con maggior velocità. Questa pendenza è sì

grande ne' giocolatori sovra i cavalli che sembrano dover cadere, ed invece si pongono in posizione da vincere la forza centrifuga, e da far passare la resultante di questa e delle gravità per la loro base. Questa è la condizione che deve essere adempita ogni volta un grave non ha da esser ribaltato dalla forza centrifuga, come sarebbe una vettura carica che fa velocemente una voltata. Dalla espressione qui sopra riportata per la forza centrifuga scorgesi, esser questa forza in un dato corpo una frazione del suo peso che ha per numeratore il quadrato della velocità, e per denominatore il prodotto della gravità nel raggio di curvatura. Così adunque conoscendo il peso del corpo e la sua forza centrifuga potranno intendersi ambedue applicate al centro di gravità, ed ivi colla dottrina del parallelogrammo fatta la composizione si determinerà la resultante, la direzione della quale non ha da escir fuori della base. Quindi a misura che quel centro è più elevato, più facile sarà che manchi la rammentata condizione d'equilibrio. Perchè poi questa si abbia a verificare più facilmente suolesi inclinare il piano stradale verso il centro nelle svolte di corto raggio, nei circoli per l'equitazione, in generale in tutti quei casi nei quali la forza centrifuga è grande.

191 *Precauzioni usate, nelle rote de' vagoni, e nelle strade rotaje per evitare l'inconvenienti della forza centrifuga*. — Le ruote de vagoni non sono di forma cilindrica, ma alquanto coniche per modo che la loro superficie convessa presenta un piano inclinato che ha 1 d'altezza per 7 di base. L'oggetto principale di questa inclinazione è che la ruota per un qualsivoglia accidente non freghi col ribordo interno lungo la rotaja: mentre si ha dalla medesima interessantissimo vantaggio perchè si possa combinare precisamente egual diametro nelle due ruote che sono unite alla medesima sala (91) posto che debbasi percorrere un tratto rettilineo di strada; e perchè ad un tempo abbiano i diametri delle due ruote quella differenza che conviene quando percorrono una curva. In quest' ultimo caso è la forza centrifuga che facendo avvicinare il ribordo interno della ruota al lato convesso della strada, costringe la ruota che è da questo lato ad agir con diametro maggiore, e la opposta con diametro minore per la loro conicità. Mentre la forza centrifuga produce quest'effetto utile, anche la sua azione nociva che tenderebbe a fare escire i vagoni dalle rotaje trovasi bilanciata e distrutta 1.° da quel più di attrito che va acquistando la ruota che rimane alla parte convessa della curva per essere accresciuto il suo diametro anche più di quello che richiederebbe la differenza di lunghezza tra le due rotaje; 2.° dalla forza centripeta, o tendenza che ha il vagone a muoversi in cerchio allorchè le due ruote opposte han diametro differente. Quando la velocità è stabilita deve questa forza centripeta essere eguale a quella centrifuga, e perciò il raggio di curvatura della strada ha da essere eguale a quello col quale tenderebbe a rotare il tronco di cono formato dalle due ruote di differente diametro. Sia $1 : n$ l'inclinazione del cerchio della ruota; per un movimento trasversale del vagone rappresentato da m, si produrrà nella ruota una differenza di diametro tra il diametro primitivo e l'attuale di $\frac{2m}{n}$

onde la differenza fra i diametri attuali delle due ruote sarà

$$\frac{4m}{n}$$

e la somma dei due diametri attuali sarà eguale a quella dei due diamemetri primitivi cioè $2d$. Quindi i due diametri attuali sono

$$d+\frac{2m}{n},\ d-\frac{2m}{n}$$

e stanno fra di loro come i raggi di curvatura delle due rotaje che sono

$$R+\frac{e}{2},\ R-\frac{e}{2}$$

esprimendo e la larghezza della strada, ed R il suo raggio medio di curvatura. Quindi

$$d+\frac{2m}{n}:\frac{4m}{n}::R+\frac{e}{2}:e$$

e perciò lo spazio per cui si ha da muovere trasversalmente la ruota sarà

$$m=\frac{ned}{4R}.$$

Così sù tutte le curve per le quali il vagone potrà smuoversi di questa quantità l'effetto della curva sarà corretto dalla conicità delle ruote. Nelle costruzioni che sono in uso si dà $0^m,0127$ di gioco per ogni parte tra il ribordo della ruota e la rotaja, e come ho detto sopra è $n=7$; la larghezza della strada è $e=1^m,533$, e il diametro delle ruote $d=0^m,9144$. Si avrà dunque per il minor possibile raggio di curva stradale

$$R=\frac{ned}{4m}=\frac{7.1,533\ 0,9144}{4.0,0127}=193^m,49$$

il quale in pratica converrà tenere 300^m, giacchè non torna conto aumentare il gioco tra le ruote e le rotaje oltre $0^m,0127$ per non temere una troppo grande oscillazione del treno ne tratti rettilinei.

Posto poi che occorra far nella strada a rotaje curve di minor raggio si potrà inalzare la rotaja esterna. Questo metodo si userà anche per le dolci curvature quando non si abbiano le ruote coniche. Chiamando y il sollevamento della rotaja esterna, l'inclinazione del piano stradale data per $\frac{y}{e}$ produce una forza $P\frac{y}{e}$ che tende a portare il vagone verso la rotaja interna; e chiamato R' il raggio massimo che può tenersi per la conicità delle ruote si dovrà avere

$$\frac{Py}{e}+\frac{P}{g}\frac{V^2}{R'}=\frac{P}{g}\frac{V^2}{R}$$

da dove rilevasi

$$y=e\frac{V^2}{g}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)$$

Per far di questa formula un'applicazione, sia la più gran velocità massima che può il treno acquistare di 70000^m l'ora, sia il raggio che vuol darsi alla curva di 190^m, si farà

$$R'=300^m,\ e=1,533,\ g=9,8$$

ed otterremo che il sollevamento della rotaja esterna deve essere

$$y=\frac{1,533.70000^2}{9,8.60^4}\left(\frac{1}{190}-\frac{1}{300}\right)=0^m,113$$

valore assai grande, e che serve a mostrare, come il metodo dell'inalzamento della rotaja non sodisfa molto. Si aggiunga che se vuolsi percorrere col vagone una curva di raggio 190^m, mentre la conicità delle ruote porterebbe a girare sovra una curva che avesse di raggio 300^m, saranno le ruote esterne costrette a strisciare sulle rotaje, e perciò daranno un forte attrito. Onde considerato ancora che le due sale delle ruote son parallele, mentre dovrebbero essere inclinate come richiede la curvatura della strada, può ritenersi, non ostante gl'ingegnosi recenti ritrovati, essere il passaggio delle curve per il treno delle locomotive un soggetto che esige tuttora molti studj.

192. *Moto de' gravi projetti.* — Abbiam mostrato (*Int.* 98) che un corpo che sia sollecitato da due forze

eterogenee si muove per una curva detta trajettoria, e che questa si determina per punti con una costruzione analoga a quella del parallelogrammo delle forze. Applichiamo quella dottrina ai gravi lanciati nell'aria: sia la forza projettile nella direzione MA (Tav. VI fig. 10) e tale da far percorrere in quattro tempi eguali, i quattro eguali spazj in cui questa linea è divisa. Se il mobile M discendendo per la gravità percorresse con moto uniformemente accelerato in questi quattro tempi gli spazj indicati con 1, 4, 9, 16; per effetto delle due forze che agiscono contemporaneamente, dovrà alla fine di quei tempi trovarsi ai punti determinati respettivamente coi quattro parallelogrammi indicati dalla figura, e percorrerà la curva MONP. Questa è una parabola perchè le ascisse sono come i quadrati delle ordinate. Sia la forza projettile tale che per essa il grave acquisti la velocità dovuta all'altezza A; chiamando y lo spazio che percorre nella direzione MA nel tempo t, sarà $y = t\sqrt{2gA}$; e chiamando x lo spazio che nello stesso tempo il grave percorre per effetto della gravità nella direzione verticale sarà $x = {}^1/_2\, gt^2$. Onde rilevasi per l'equazione della curva

$$x = \frac{y^2}{4A}$$

Dunque la parabola che descriverebbero i gravi projetti se si potesse fare astrazione dall'aria, ha per diametro la verticale condotta per il punto di partenza, per parametro il quadruplo dell'altezza dovuta alla velocità di projezione, per vertice il suo punto O più elevato, e per asse la verticale OV condotta per questo punto. Per confermare tuttociò con un'esperienza si intagli in una tavola una curva concava circolare, e per quella si lasci cadere un globetto metallico. Esso slanciandosi da quella con la celerità dovuta all'altezza dalla quale è caduto descriverà una parabola, quale si protrebbe tracciare colle regole sopra assegnate. Infatti disegnata questa parabola, e posti lungo di essa diversi anelli assai più larghi del globo si infilerà questo per tutti gli anelli, purchè la curva non sia continuata per molto tratto, onde la resistenza dell'aria non produca grande effetto. Anche le esperienze fatte con i getti d'acqua, e meglio con getti di mercurio confermano questa direzione parabolica de' gravi projetti.

195. *Tiro delle armi da fuoco.*— Le esplosioni di palle prodotte con armi da fuoco fan percorrere parabole assai deformate per effetto della resistenza dell'aria. Che se una palla di calibro lanciata lungi 70 passi dall'esplosione di un arme da fuoco non sembra essersi abbassata, conviene riflettere che la velocitá projettile è si grande che nel piccol tempo richiesto a percorrere quello spazio la gravità produce un minimissimo abbassamento. In tali esplosioni deve anche avvertirsi che la canna dell'arme è più grossa verso la culatta che nella bocca, e la linea di mira s' incrocia colla vera direzione della palla. Laonde quando si crede dirigere la palla contro uno scopo, colpisce in un punto più alto per le piccole distanze, e sulla direzione della mira quando la distanza è tale che la gravità ha fatto discendere il projetlile, quanto l'inclinazione della forza lo aveva fatto salire sulla linea di mira. Ad una distanza maggiore di questa colpirà la palla al disotto della linea di mira. Forse a questo fenomeno contribuisce il prender fuoco la polvere a ri-

prese per cui è sollevata la palla. Infatti il Bion asserisce che i cannoni molto usati mostrano un canale considerevole scavato alla parte superiore dal fregamento della palla. Tutti i fucili alzano il colpo e solo alcuni lo possono alzar troppo; peggio sarebbe se non lo alzassero punto, giacchè il raggio visuale essendo parallelo alla prima direzione della palla, il peso del piombo farebbe di necessità abbassare il colpo. Onde un arme ben calibrata nella sua canna obbligherebbe chi tira ad aver riguardo all'effetto della gravità.

Nella balistica ove si tratta di spazi molto grandi da percorrersi dal projettile, che suole essere assai pesante conviene calcolare l'effetto simultaneo della forza projettile, e della gravità. Si concepisce facilmente che lasciando sempre la medesima direzione al cannone, l'ampiezza del tiro è tanto maggiore con quanto più di velocità é spinto il mobile, perchè quanto minor tempo impiega ad attraversare la distanza di due piani verticali, meno la gravitá agisce per abbassare la palla dalla direzione sua primitiva. Ma la forza projettile viene dall'esplosione della polvere ed é ben difficile stimarla con accuratezza, e sapere come vi influisca la qualità e quantitá della polvere stessa. L'esperienza ha dimostrato che una buona parte della polvere suol essere perduta per non aver preso fuoco. Quindi le più sicure ricerche dipendono dalla posizione dell'arme. Si deduce dalla equazione sopra riferita per la parabola percorsa dal projettile che l'ampiezza MN del tiro cioè la distanza a cui il projetto torna al piano orizzontale che passa per il punto da cui era scagliato, è eguale a due volte l'altezza dovuta alla celerità di projezione moltiplicata per il seno del doppio dell'angolo d'elevazione, e perciò può esprimersi con $2A\,sen\,2E$. Quindi il valore massimo di questa ampiezza nel vuoto sarà quando quell'angolo E è semiretto, eguagliando allora l'ampiezza del tiro il doppio dell'altezza dovuta alla velocità di projezione. Nel vuoto anche le velocità sono eguali tanto nel ramo ascendente quanto in quello discendente quando il grave si trova alle medesime altezze; ma in un mezzo resistente come nell'aria le celerità nella discesa saranno più piccole, ed a prender idea della trajettoria che il grave effettivamente percorre si potrà consultare il seguente paragrafo.

Data la massa ed il volume delle bombe o palle, e la forza della polvere e la direzione dell'impulso primitivo, è soggetto impotante per l'artiglieria il determinare i punti ai quali può giungere il projettile a diverse altezze, come a diverse distanze. Per la resistenza dell'aria i cannonieri sogliono dare l'angolo di 44.° d'elevazione quando vogliono la più lunga portata e questo si chiama sparo a tutta volata; come si chiama sparo delle portate eguali quello di 45°, perchè le stesse ampiezze si hanno quando ci si allontana egualmente da questo numero di gradi alzando o abbassando il cannone. Veramente nella portata di massima ampiezza l'angolo d'elevazione si allontana maggiormente da 45° a misura che la palla è di un calibro minore, o di minor gravità specifica come deducesi dalla seguente tavola che il D'Antoni ha dedotta da esperienze eseguite nel 1764.

La regola stabilita fino dal Galileo e dal Torricelli per avere la portata delle differenti scariche si è: fare una

prova esatta tirando con il medesimo cannone sotto un angolo determinato e misurando l'ampiezza del tiro: e quindi stabilire che il seno del doppio dell' angolo d'elevazione sotto il quale è stata fatta l' esperienza, sta al seno del doppio dell' angolo d'elevazione a cui piace porre il cannone, come l' ampiezza del tiro conosciuta dall' esperienza, sta a quella che vuolsi determinare. Questa regola come anche la seguente la quale serve a conoscere qual posizione si ha a dare al cannone per ottenere una data ampiezza di tiro sono appoggiate alla teoria, dipendendo dalla formula 2A *sen* 2E.

Data la distanza a cui deve portare, il tiro la quale sia minore di quella che si ha per i 44.°, potrà dirsi che l' ampiezza del tiro trovata dall' esperienza sta alla portata proposta come il seno del doppio dell' angolo usato nell' esperienza sta al seno del doppio dell' angolo da conoscersi. Per facilitare l' uso di queste regole sogliono tenersi delle tavole ove sono notati i seni del doppio degli angoli che possono occorrere.

L' altezza a cui porta lo sparo del cannone può ritrovarsi determinando la traiettoria che il grave descrive nell' aria, ma più facile sarà decomporre la forza del tiro in due, una verticale, ed una orizzontale, e quella verticale dovrà essere distrutta dalla resistenza dell' aria e dalla gravità, quindi si tratta solo di trovare a quale altezza potrà questa innalzare la palla. Si fa subito dalle tavole quale è l' altezza dovuta alla forza verticale, e si prenderà questa come il limite a cui si avvicina l' elevazione quando diminuisce la resistenza dell' aria, di più si sanno le resistenze di questo fluido per date celerità, e con questi elementi potremo calcolare l' elevazione cercata. Per le incertezze nelle quali è tuttora la resistenza che l' aria oppone ai projetti, anzichè riportare una tavola che la determini, avvertirò che potrà quella all' occorrenza dedursi dalla formula riferita alla fine del §. 175, ove non si è tenuto conto del diametro del projettile perchè si tratta di corpi di piccola dimensione. Ed amo accennare colla seguente tavola il rapporto tra l' ampiezza teorica del tiro, e quella sperimentale negli spari 1:° di una carabina A rigata del calibro di $^5/_8$ e $^2/_5$ caricata con palle del calibro di $^6/_8$; 2:° di uno schioppo B del calibro di once una, caricato con palle del corrispondente calibro, e del peso denari 23 $^1/_3$, e 23 $^1/_2$; 3:° di una spingarda C del calibro di once 3 $^1/_2$ sparata con palle del calibro e peso di once 3; 4:° di una simile spingarda D carica a palla del calibro e peso di once 3 $^1/_2$ (pesi torinesi).

	Velocità iniziale	Angolo d'elevaz.	Ampiezza speriment.	Ampiezza teorica
A	596^m	15°	819^m	18330^m
»	596	24 $^1/_3$	854	27285
»	596	45	814	36371
B	529	7 $^1/_4$	863	7172
»	529	15	1187	14341
»	529	24 $^1/_3$	1214	20512
»	529	45	1074	28683
C	565	15	1310	16537
»	565	24 $^1/_3$	1595	24443
»	565	45	1510	32714
D	539	15	1572	14904

194. *Regole per descrivere con approssimazione la traiettoja percorsa dai gravi nei mezzi resistenti.*—1° Conviene distinguere prima la parte più vicina all' origine del mo-

to che si confonde sensibilmente con la tangente iniziale; 2.° le parti ascendenti e discendenti vicine alla sommità; 3.° il resto della branca discendente. Sia AB (Tav. VI fig. 11) la direzione della velocità iniziale V della bomba, P ed M il suo peso e la sua massa; per mezzo delle tavole che danno le resistenze corrispondenti a una celerità qualunque, e al calibro del projetto si otterrà la resistenza prodotta al principio del moto e la diminuzione di spazio percorso in un brevissimo tempo che chiameremo t. Si avrà dal calcolo quanta celerità rimane al projetto, e lo stesso si farà per un altro piccolo tempo t; come anche per altri tempi eguali a t, finchè la loro somma non eguaglia un tempo T tale che l'effetto della gravità in esso sia sensibile. Allora dal punto B' ove suppongo arrivato il mobile, si abbasserà una verticale B' A' che rappresenti lo spazio $\frac{1}{2} gT^2$ che deve avere descritto il corpo abbassandosi, e il punto A' sarà un punto della trajettoria, il quale non appartiene alla direzione iniziale AB. Partendo da questo punto B' supponiamo che V' sia la velocità che ivi ha la palla, e sulla verticale A'B' prendiamo una porzione A'P proporzionale al suo peso, e decomponiamo questa forza in due altre A'p, A'q, perpendicolare l'una, e tangente l'altra alla curva, sarà A'p proporzionale alla componente p del peso della palla normale alla curva. E per quello che abbiam detto della forza centrifuga sarà

$$p = \frac{M \cdot V'^2}{R'}$$

ove R' indica il raggio osculatore della curva in quel punto, onde dedotto da questa equazione il valore di R' che lo suppongo = A'C' si descriverà l'arco A'A'' con questo raggio, e si prenderà eguale a V''. Ora convien trovare questa velocità in A''. Chiamiamo f la resistenza dell' aria in kil. che corrisponde alla velocità V', designamo con u la velocità che conserverebbe la bomba giungendo in A'' se la resistenza dell'aria rimanesse costante per il tragitto A'A'', osserviamo inoltre che la componente tangenziale q del peso è la sola forza che lavora, e che ella si aggiunge alla resistenza dell' aria per distruggere la velocità. Dunque in virtù del principio delle forze vive si avrà che la forza viva del corpo al punto A' meno quella che ha conservato in A'' sarà eguale alla forza viva perduta o al doppio del lavoro fatto dalla componente tangenziale e dalla resistenza dell' aria cioè

$$MV'^2 - Mu^2 = 2A'A'' (f+q)$$

Quindi $u^2 = V'^2 - \frac{2A'A''}{M}(f+q)$

Se questa nuova velocità u è molto più piccola di V' dedurremo che la resistenza dell' aria è diminuita nell'intervallo A'A'' di una quantità assai grande, e perciò la velocità u è troppo piccola. Cercando nelle tavole la resistenza f' che corrisponde a u, si supporrà ora che rimanga essa costante per l'intervallo A'A'', e si avrà un'altra equazione analoga alla precedente

$$u'^2 = V'^2 - \frac{2A'A''}{M}(f'+q)$$

la quale ci dà un' altro valore u' più grande della velocità effettiva; onde presa una media fra questi due valori $\frac{1}{2}(u+u')$ questa sarà la velocità V'' che ha luogo in A''. Nel medesimo modo si potrà determinare un' altro raggio osculatore R'', un'altra porzione d'arco ed un'altra velocità alla fine del medesimo, e così continuando si arriverà al punto L, il più elevato, ove la componente tan-

genziale del peso è zero. Da quel punto in poi la componente tangenziale favorisce il moto, e per conseguenza tra le due branche ascendenti e discendenti vi sarà la differenza che nella prima la forza motrice che ritarda il moto è la somma della resistenza dell'aria e della componente tangenziale della gravità, mentre nell'altra branca la forza motrice è la differenza di queste due: ed essa produce l'accelerazione. Quest'accelerazione finisce col farsi sì grande da rendere la direzione del mobile sempre più prossima alla verticale.

Determinate nel modo precedente le velocità V, V′, V″ ec. che il projetto acquista nei differenti punti della trajettoria si può calcolare qual sarà la sua forza viva moltiplicando il quadrato di quelle volocità per la massa del grave. Questa ricerca può essere interessante allorchè si vuol conoscere non solo se il projetto colpirà un dato scopo, ma anche se vi produrrà quel guasto che l'artigliere si propone.

Pendolo.

195. ***Pendolo, e durata dell' oscillazione.***— Suppongasi sospeso con un filo un corpo che offra una gran massa sotto un piccolo volume; si devii il filo dalla direzione verticale, e mentre esso è fermo all'estremità superiore si lasci libero il corpo che è all' estremità inferiore del filo. Scendendo esso e salendo per una curva oscillerà, ed alla fine si porrà in quiete. Quando questo corpo è in quiete l' apparato dicesi *filo a piombo*, allorchè si considera in moto chiamasi *pendolo*. Vien poi detto pendolo semplice quando si considera tutto in un punto raccolta la forza di gravità, ed il filo supponesi senza peso ed inestendibile. Onde scorgesi che il pendolo semplice non esiste, e solo s' imagina dai geometri per facilitare le ricerche. Al punto del filo che sta fermo si dà il nome di centro di sospensione, e di lunghezza del pendolo alla lunghezza del filo. Oscillazione è il moto che esso fa nello scendere per l'arco e nel salire, la semplice discesa, o la semplice salita è una semi-oscillazione. I pendoli son tutti composti cioè formati di più punti pesanti, e la loro dottrina si desume da quella dei semplici. Essi chiamansi naturali quando oscillano per archi di cerchio, e cicloidali se si muovano per una cicloide.

Il pendolo naturale lasciato andare quando il filo è orizzontale discende fino alla direzione verticale, e mentre nella prima posizione era sollecitato da tutta la gravita, nell' ultima la forza acceleratrice è zero, e nelle posizioni intermedie ha essa pure valori intermedj. Dunque il moto di discesa è accelerato, e meno che uniformemente; il moto di salita si farà ritardato colle stesse leggi di quello di discesa; e il grave si inalzerà quanto è disceso, e riprenderà alle medesime altezze le stesse celerità supposto che non soffra resistenze. Perciò non dovrebbe mai cessare dal moto in questa ipotesi, che noi riterremo per stabilire la teoria.

Proponghiamoci di trovare il tempo che impiega il pendolo a fare un' oscillazione per un piccolo arco di circolo.

Consideriamo l' istante in cui il pendolo giunge in M (Tav. VII fig. 1) dopo esser partito da C, sia v la velocità acquistata al punto M, e si conduca PM, altezza da cui è disceso. Per un successivo tempo piccolissimo t il moto si può supporre unifor-

me, e sia MN lo spazio minimo percorso, avremo

$$v = \frac{MN}{t} \text{ e perciò } t^2 = \frac{\overline{MN}^2}{v^2},$$

ed avremo pure per la legge della celerità acquistata dal pendolo nella sua discesa $v^2 = 2g.PM$, onde

$$t^2 = \frac{\overline{MN}^2}{2g.PM}$$

sarà il quadrato del tempo che il corpo impiega a percorrere lo spazietto MN, al quale daremo un'altra espressione per facilitare la ricerca del tempo in cui si compie un'oscillazione per un'arco piccolo. Osservo che per la similitudine dei triangoli MOA, NME abbiamo

$$\overline{MN}^2 = \frac{\overline{MO}^2.\overline{NE}^2}{\overline{MA}^2}$$

e per la proprietà del circolo chiamata l la lunghezza del pendolo si ha $\overline{MA}^2 = (2l - BA)\,BA$ che si riduce $= 2l.BA$, perchè trattandosi di archi piccoli è sempre BA piccolissima in confronto alla lunghezza del pendolo; dunque

$$t^2 = \frac{l^2.\overline{NE}^2}{4lg.BA.PM}.$$

Fatto il semicircolo RmB per la proprietà di questo, sarà

$$BA = \frac{\overline{Am}^2}{AR}$$

e siccome MP = AR, avremo

$$t^2 = \frac{l}{4g}\left(\frac{NE}{Am}\right)^2$$

Ora sono simili i due triangoli enm, AmQ, e danno

$$\frac{ne}{Am} = \frac{mn}{Qm};$$

inoltre abbiamo ne = NE perciò sostituendo nella formula del tempo, essa diviene

$$t^2 = \frac{l}{4g}\left(\frac{mn}{Qm}\right)^2 -$$

dalla quale si ha

$$t = \sqrt{\frac{l}{4g}}\cdot\frac{mn}{Qm}$$

cioè il tempo in cui vien percorso l'archetto MN è proporzionale all'altro archetto mn. Quindi se noi supponiamo che il grave invece di percorrere l'arco CMB percorra l'altro RmB, si scioglierà il quesito riguardando in questo il moto uniforme e prodotto colla celerità costante

$$\frac{Qm}{\sqrt{\left(\frac{l}{4g}\right)}}$$

Adesso è evidente che il tempo in cui il corpo percorre con questo moto uniforme il semicerchio RmB è eguale alla semi-circonferenza πQm divisa per la velocità, e questo corrisponde a quello della semi-oscillazione; perciò quello dell'oscillazione completa sarà

$$T = 2\pi.Qm.\frac{\sqrt{\frac{l}{4g}}}{Qm} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Dal ragionamento che abbiamo seguito si scorge approssimata e non esatta la formula

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

la quale insegna

1:° La durata di un'oscillazione è in ragion diretta della radice della lunghezza del pendolo.

2:° È in ragione inversa della radice della forza acceleratrice.

3:° È indipendente dall'ampiezza della oscillazione seppure questa si fa per un'arco di circolo molto piccolo in confronto coll'interna circonferenza.

4:° È indipendente dal peso del pendolo, e dalla sua massa. In questa formula non entra la massa del pendolo perchè tutti i corpi cadono nel medesimo tempo (*Int.* 56).

196. *Applicazioni della formula che dà la durata di un'oscillazione.* — Ben si scorge a prima vista, che la celerità del moto del pendo-

lo, la durata delle oscillazioni, il loro numero in un tempo determinato deve dipendere dalla intensità della gravità, e perciò si potrà dal moto di questo strumento conoscere la gravità. E primieramente dalla formula

$$t^2 = \pi^2 . \frac{l}{g}$$

abbiamo il valore della gravità

$$g = \pi^2 \frac{l}{t^2} = (3,1415926)^2 . \frac{l}{t^2}$$

Quindi misurando la lunghezza del pendolo e dividendo questa per il quadrato del tempo che occorre per compiere un' oscillazione dopo averla moltiplicata per la quantità costante π^2 avremo la intensità della gravità.

Ordinariamente si suole regolare il tempo variando la lunghezza del pendolo in modo che la durata di un' oscillazione sia un secondo, e dopo si misura la lunghezza del pendolo. Ciò è stato fatto con tutta la possibil diligenza in Parigi prima da Mairan poi da Borda (*Mairan Mem. de l' Acad. des Sc.* 1735. *Borda. V. Institut. Nat. Tom. II pag.* 79), ed hanno trovata questa lunghezza di metri 0,99385. Sostituiti questi valori nella formula si ha

$$g = (3,1415926)^2 \frac{0.99385}{1''} = 9,8088$$

come si era altrove (170, e *Int.* 59) annunziato.

Noi conosciamo dalla formula stabilita che le gravità stanno, come le lunghezze dei pendoli, perchè con due pendoli le cui lunghezze sieno l, l' facendosi le oscillazioni nel medesimo tempo t, se chiamansi g, g' le gravità avremo

$$\sqrt{\frac{l}{g}} = \sqrt{\frac{l'}{g'}}$$

e perciò $l : l' :: g : g'$. Ora interessa sapere come varrà l'intensità della gravità nei diversi punti della superficie terrestre, e può dedursi dal determinare come varia la lunghezza del pendolo isocrono. Qui riporterò per alcuni paesi le lunghezze del pendolo che batte i secondi, e i gradi di latitudine, e la gravità che corrisponde a quelle date lunghezze, rimandando per gli altri a ciò che ho detto nell' Introduzione (*Int.* 53).

Latitudine		*Lunghez. del pend.*	*Gravità*
Equat.	0°	0,990925	9,7801
	26°	0,991528	9,7860
Modena	44°.39′	0,993157	9,8021
Parigi	48°.50′.40″	0,993846	9,8088
	60°	0,994791	9,8'82
	80°	0,995924	9,8294

Non sempre interessa misurare la lunghezza del pendolo quando si vuol riconoscere la forza di gravità di un dato luogo, ma basta che si abbia quel pendolo stesso che in un' altro luogo ove è conosciuta la gravità marca i secondi, o fa le oscillazioni in un tempo noto. Infatti chiamando T un tempo assai lungo, e t la durata di un oscillazione potremo porre $T = nt$ essendo n il numero delle oscillazioni che si compiono nel tempo T, e perciò

$$t = \frac{T}{n}$$

Dette g, g' le gravità nei due luoghi, e t, t' le durate delle oscillazioni del medesimo pendolo di cui è l la lunghezza, ed n, n' i numeri delle oscillazioni che si fanno ne' due luoghi nel tempo T, dalla formula precedente si rileva

$$t^2 : t'^2 :: \frac{T^2}{n^2} : \frac{T^2}{n'^2} :: \frac{l}{g} : \frac{l}{g'}$$

è quindi $g : g' :: n^2 : n'^2$ cioè le gravità dei due luoghi stanno come i quadrati dei numeri delle oscillazioni che può farvi un pendolo in un dato

tempo. Dunque per determinare la gravità g' del nuovo luogo si moltiplicherà quella g del luogo ove si conosce per il numero

$$\frac{n'^2}{n^2}$$

Quello che abbiam detto della forza di gravità può ripetersi di una qualunque altra forza acceleratrice che faccia oscillare attorno ad un centro un corpo; il magnetismo terrestre per esempio fa oscillare l'ago della bossola, e contando le oscillazioni che esso compie in un dato tempo in due differenti luoghi può dal rapporto del quadrato dei due numeri rilevarsi quello dell'intensità del magnetismo terrestre in quei due luoghi: supposto che la magnetizzazione dell'ago non si sia alterata.

Che se vorremo determinare la lunghezza di un pendolo, lo che è una ricerca non poco difficile, potremo valerci della lunghezza l di un'altro pendolo che fa un conosciuto numero d'oscillazioni in un dato tempo: perchè abbiamo

$$t^2 : t'^2 :: \frac{T^2}{n^2} : \frac{T'^2}{n'^2} :: \frac{l}{g} : \frac{l'}{g}$$

e perciò $l : l' :: n'^2 : n^2$ cioè le lunghezze dei due pendoli stanno in ragione inversa del numero dei quadrati delle oscillazioni fatte in un dato tempo. Poniamo che il pendolo di confronto marchi colle sue oscillazioni i minuti secondi, la sua lunghezza sarà $0^m,9932$, e perciò avremo la lunghezza del pendolo confrontato espressa dalla formula

$$l' = 0^m 9932 \frac{n^2}{n'^2}$$

Quanto più si allunga un pendolo tanto è minore il quadrato del numero delle oscillazioni che esso fa in tempo assegnato, cioè tanto più è lento il moto del pendolo. Di qui ne viene un modo di conoscere dal numero delle oscillazioni di quanto si è allungato il pendolo; ed il criterio per regolare il moto dei pendoli con allungarli o scorciarli. E di qui pure si deduce che un globetto metallico fatto oscillare pendente da un filo può dare colle sue piccole oscillazioni misure di tempi tanto più piccoli quanto minori son le radici quadrate delle lunghezze del filo; e perciò sarà un cronometro comodissimo, e di piccola spesa.

Quando il pendolo rimane il medesimo la forza acceleratrice sta in ragione del quadrato del numero delle oscillazioni cioè $g : g' :: n^2 : n'^2$, e perciò se questa forza stessa stia in ragione inversa del quadrato delle distanze dette queste D, D′ abbiamo $g : g' :: D'^2 : D^2$ onde sarà $n : n' :: D' : D$ cioè i numeri delle oscillazioni staranno in ragione inversa delle distanze: Teorema interessante in fisica per la ricerca se la forza dell'elettricità, del magnetismo ec. agisca in ragione inversa dei quadrati delle distanze.

Tutte queste applicazioni si eseguiscono col pendolo composto, e però è necessario conoscere come possa la formula

$$t^2 = \pi^2 . \frac{l}{g}$$

usarsi in un tal pendolo

197. *Pendolo composto.* — In questo la lunghezza si concepisce supponendo che si abbia un pendolo semplice il quale faccia le oscillazioni isocrone col composto, perchè la lunghezza del pendolo semplice sarà quella che deve valutarsi per il composto onde applicare ad esso la teoria del pendolo semplice, e la formula della durata dell'oscillazione. Che se preso il pendolo semplice è soprapposto al composto isocrono in modo che i loro centri di moto coin-

cidano, e si segni fin dove sul pendolo composto giunge quello semplice, il punto così determinato si chiama centro d'oscillazione, e per conseguenza la distanza tra questo centro e quello del moto sarà la lunghezza del pendolo. Interessa adunque conoscere come può determinarsi il centro d'oscillazione, e subito vedesi che per averne approssimativamente la posizione si può usare in luogo del pendolo semplice un filo assai sottile con un globetto di piombo in fondo; qui appresso insegnerò un modo esatto per determinare la lunghezza del pendolo composto: Ecco come si concepisce l'esistenza del centro d'oscillazione: se i diversi punti materiali che compongono il pendolo composto fossero sciolti fra loro, e legati ciascuno con un filo non pesante al centro di moto si avrebbero altrettanti pendoli semplici di differenti lunghezze. I corti farebbero le oscillazioni più sollecite, e i lunghi più lente; e perciò quando quei punti materiali sono collegati fra loro, i più prossimi al centro di moto acceleReranno le oscillazioni dei più lontani, e viceversa questi ritarderanno quelle dei primi, ed il pendolo concepisce dell'oscillazioni la cui durata è intermedia fra quella delle oscillazioni degli uni e degli altri. Ma dai primi si passa agli ultimi per una continuazione di punti intermedj che hanno intermedia la durata dell'oscillazione, e perciò fra questi ve ne sarà uno al quale non verrà dai rimanenti che compongono il pendolo nè accelerato, nè ritardato il moto, e questo è il centro d'oscillazione.

L'isocronismo delle oscillazioni ci dà la più comune e la più utile applicazione del pendolo facendolo servire come regolatore di moto, e capace a comunicare alle macchine un moto uniforme: del che ne vediamo bellissimo esempio nell'orologio. Galileo nella sua giovine età si fermò a considerare nelle oscillazioni di una lampada di questa Primaziale l'eguaglianza di tempo in cui tutte si compievano, e scoprendo col suo penetrante ingegno tutto il vantaggio di una tal proprietà, si impegnò e pervenne a stabilire l'interessantissima dottrina dei pendoli. L'uso di questo strumento nell'orologio mostra il suo pregio perchè vi rende il moto precisamente uniforme col non permettere che passi il dente di una ruota finchè non è compita l'oscillazione. Quì sarà bene notare che anche quando il pendolo si muove nell'aria per archi molto piccoli sono le oscillazioni isocrone per quanto non sieno di eguale ampiezza, e il ritardo che la resistenza del mezzo produce nell'oscillazione è presso che insensibile. L'effetto maggiore di questa resistenza consiste nel diminuire l'ampiezza delle oscillazioni.

198. *Determinazione del centro d'oscillazione*. — Per fissare la posizione del centro d'oscillazione, si chiami M la massa del pendolo composto, ω la velocità angolare che esso acquista allorchè è disceso per una certa porzione di arco, I il suo momento d'inerzia riferito al centro di moto, g la gravità, K la distanza del centro di gravità da quello di moto, y la discesa che fa un suo punto collocato all'unità di distanza dal centro di moto mentre il pendolo acquista la velocità ω; l la distanza del centro d'oscillazione dal centro di moto, e V la velocità effettiva di quel centro che corrisponde all'angolare. Avremo la forza viva che il pendolo ha acquistato nel percorrere

quell'arco $= I\,\omega^2$ (180); ed essendo Mg il peso del pendolo e Ky la discesa del centro di gravità potremo esprimere con $MgKy$, il lavoro meccanico della gravità: per conseguenza sarà

$$I\omega^2 = 2\,MgKy, \text{ e } \frac{I}{MK} = \frac{2gy}{\omega^2}$$

Ora per la proprietà del centro d'oscillazione la sua velocità effettiva è proporzionale a quella angolare ω ancorchè quel punto esistesse solo o slegato dagli altri, dunque

$$V = \omega l \text{ e } \frac{I}{MK} = \frac{2gyl \,.\, l}{V^2}$$

ma $V^2 = 2gyl$ perchè yl rappresenta l'altezza di cui è caduto il centro d'oscillazione, dunque

$$l = \frac{I}{MK}$$

Si determinerà pertanto il centro d'oscillazione prendendo sulla retta, che unisce il centro di moto con quello di gravità, prolungata una lunghezza eguale al momento d'inerzia del pendolo diviso per il prodotto della sua massa nella distanza del centro di gravità da quello di moto. E poichè tutti i punti che rimangono distanti di questa quantità dall'asse di rotazione fanno le loro oscillazioni nel medesimo tempo, a tutti potrà attribuirsi il nome di centri d'oscillazione, e si dirà che si ha un' asse di oscillazione parallelo a quello di rotazione e distante dalla quantità

$$\frac{I}{MK} = \frac{M(K^2 + K'^2)}{MK} = K + \frac{K'^2}{K}$$

Questa è la stessa formula che ci determinò il centro di rotazione dunque questi due punti coincidono, e si potrà anche qui concludere: *Se il centro di oscillazione diviene centro di moto, viceversa il centro di moto sarà centro d' oscillazione.*

199. *Modo per determinare sperimentalmente la lunghezza di un pendolo.* — Si faccia oscillare il pendolo tenendolo sospeso per il suo attacco ordinario; si tenga conto del numero delle oscillazioni che esso fa in un minuto primo. Si rivolti il pendolo e si ponga la sua lente fra due viti che pressando la ritengano in posto anche quando oscilla, e per tentativi si cerchi fra i diversi punti che rimangono nel piano di simmetria del pendolo, quello che permette al pendolo così rovesciato di fare in un minuto lo stesso numero d'oscillazioni, che esso faceva nell' altra posizione. Allora determinato questo secondo centro di moto non rimane che a trovare la distanza tra il primo e questo, la quale sarà la lunghezza del pendolo, giacchè per le cose precedenti quando le oscillazioni nelle due esperienze sono isocrone, è segno che il punto di sospensione nella seconda esperienza corrispondeva al centro d'oscillazione nella prima. Questa ricerca si fa solamente quando si vuole determinare la gravità di un luogo; quindi potrà a tale oggetto adoprarsi un pendolo di una forma che facilmente si presti all'esperimento, come sarebbe quella di un parallelopipedo. Sarebbe incomoda la lente, seppure non si foggiasse a guisa di basso cilindro di piombo. Dico di piombo perchè più facilmente possano le punte delle viti affondarvisi. Nel misurare la rammentata distanza si dovrà usare ogni diligenza e perciò non si trascurerà di mantener costante la temperatura per tutto il tempo dell'operazione, o almeno di far le convenienti riduzioni.

200. *Come si determini il centro d'oscillazione di un sistema, quando si conoscono i centri di gravità, e i centri d'oscillazione delle singole parti.* — Siano M', M'', M''' ec. le mas-

se che formano un sistema K', K'', K''' le distanze dei loro centri di gravità dall' asse comune di rotazione; l', l'', l''' ec. le distanze de' loro centri d'oscillazione da quell' asse. Siccome abbiamo ritrovato $MKl = I$, ed il momento d' inerzia di tutto il sistema non è altro che la somma dei momenti d' inerzia delle sue parti, sarà $MKl = M'K'l' + M''K''l'' + M'''K'''l''' +$ ec. D' altronde per la proprietà del centro di gravità si ha tra i momenti di rotazione la seguente eguaglianza

$$MK = M'K' + M''K'' + M'''K''' + \text{ec.}$$

e dividendo l'una per l'altra queste equazioni, rileviamo

$$l = \frac{M'K'l' + M''K''l'' + M'''K'''l''' \text{ ec.}}{M'K' + M''K'' + M'''K''' \text{ ec.}}$$

cioè se la distanza del centro d'oscillazione si rileva dal valore di questa frazione, la quale è il quoziente che si ottiene dividendo la somma dei momenti d' inerzia delle singole parti del sistema per la somma dei momenti di rotazione delle loro masse.

201. ***Modo di determinare coll' esperienza il momento d'inerzia di un corpo.*** — Per noi che ci occupiamo di cose utili per la pratica credo interessante indicare qui un metodo sperimentale dedotto dai precedenti principj per la determinazione del momento d' inerzia di un corpo. Si faccia oscillare il corpo intorno all' asse cui deve riferirsi il momento d'inerzia: si contino le oscillazioni che esso fa in un dato tempo, e si divida questo per il numero di quelle. Avremo la durata di un oscillazione che si era determinata colla formula

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

quindi col calcolo si ottiene la distanza del centro d'oscillazione dall' asse cioè

$$l = \frac{gt^2}{\pi^2}$$

Ma abbiamo sopra trovato il momento d' inerzia $I = MKl = \frac{PKt^2}{\pi^2}$ dunque se moltiplichiamo la distanza del centro di gravità dall' asse di rotazione per il peso del corpo e per il quadrato della durata di un' oscillazione, e dividiamo questo prodotto per π^2, si avrà il momento d'inerzia cercato. Supponiamo che il peso del corpo sia 1,5 kil.; che il centro di gravità sia distante $0^m,075$ dall' asse, e che faccia 154 oscillazioni in 1', avremo la durata di un' oscillazione $t = 0'',3896$, e perciò

$$I = 1,5 \times 0,075 \left(\frac{0'',3896}{3,1416} \right)^2 = 0,00175$$

Questo metodo può servire soltanto per i momenti d'inerzia riferiti ad assi che non passano pel centro di gravità, e per conseguenza quando si vorrà il momento d' inerzia I_1 riferito ad un' asse diretto per il centro di gravità, l' otterremo determinando sperimentalmente quello I di un' altro asse preso lontano dal centro di gravità, e facendo uso della formula $I_1 = I - MK^2$. Così se il corpo scelto nel precedente esempio fosse stato una ruota del diametro di $0^m,17$, nella quale il centro di gravità coincida con quello di figura, e se ne fosse come si è detto determinato il momento d' inerzia rapporto ad un asse che passa per l' estremità del diametro avremo quello relativo all' asse della ruota

$$I_1 = 0,00175 - \frac{1,5}{9,8} (0,075)^2 = 0,00088$$

202. ***Pendoli degli orologi.*** — Tutti i pendoli degli orologi sogliono avere la forma di una lente metallica appesa ad una verga, o a più verghe di metallo, pure convien distinguere il pendolo cicloidale da quello naturale, e tra i naturali i lunghi da quelli corti, i pesanti dai leggeri, i semplici da quelli a compensa-

zione. L'Ugenio introdusse l'uso del pendolo cicloidale per avere le oscillazioni sempre isocrone; e tutta la differenza di un tal pendolo e quello naturale consiste nell'imperniamento: (Tav. VII fig. 2) X è una verga d'acciajo nella quale prossima alla fine è infilata una lente di piombo coperta d'ottone, e alla parte superiore è unita solidamente una molla d'acciajo V la quale è fissata al sostegno T. Al suo punto di sospensione sono unite, e cominciano due curve cicloidali R, composte con due lastre metalliche curvate, e fra queste oscillando il pendolo, la molla V è costretta a piegarsi secondo il loro andamento ora per una, ora per l'altra parte, e perciò l'estremo del pendolo descrive l'evoluta di una cicloide, che è parimente una cicloide. Si conobbe per altro che poco o nulla influivano le curve cicloidali specialmente quando il pendolo si muoveva per un piccol numero di gradi, e la stessa curva che fa piegandosi la molla supplisce alla cicloide. Inoltre per l'orologio lo stesso meccanismo dello scappamento, il quale fa passare un dente della ruota quando il pendolo ha fatta un'oscillazione, obbliga il pendolo a compiere le oscillazioni tutte di eguale ampiezza, e perciò le fa necessariamente isocrone, ancorchè il pendolo non sia cicloidale.

Il pendolo naturale quando non é a compensazione ha una sola verga e si chiama reale se la sua lunghezza è quella che li conviene per marcare i minuti secondi. La sua lente suol esser molto pesante ed anche di 10 kil; se è meno pesa anche la sua forma vien fatta più stiacciata; sempre è ripiena di piombo perchè il molto peso in poco volume diminuisce la resistenza dell'aria. Allorchè il pendolo è corto le oscillazioni son molto più sollecite, e gli archi di cerchio per i quali oscilla più grandi, e per questo abbisogna all'orologio un maggior numero di ruote. In questo caso come anche quando il pendolo è lungo ma leggero molto ha influenza sul moto del pendolo la forza che muove il castello delle ruote. Quanto più la forza dei due meccanismi è indipendente, tanto meglio il moto dell'orologio è uniforme. Per regolare la lunghezza del pendolo esiste una vite sotto la lente la quale girata per uno, o per l'altro verso, serve ad inalzare o ad abbassare la lente istessa.

Il caldo fa allungare il pendolo e il freddo lo fa accorciare, e per questo quando un orologio è regolato in una stagione non seguita ad andar bene in un altra, e va avanti o indietro, ed ha bisogno di esser nuovamente regolato. Per togliere questo effetto della temperatura alcuni artisti formano l'asta del pendolo di legno ben seccato al forno e bollito nell'olio di lino, e poscia verniciato. Suggerì Kleemeyer di Berlino di far l'asta del pendolo di ardesia, perchè un tal pendolo in un anno intiero non varia che di 1'.33" di tempo medio.

Per lo stesso oggetto si usano i così detti pendoli a compensazione, e Graham ne ha costruiti con una canna di ferro piena fino ad un certo punto di mercurio, o anche con un tubo di cristallo unito alla verga nel quale ponesi del mercurio. Allungandosi al calorico la canna di ferro, ed in conseguenza venendo più in basso il centro di oscillazione si allunga anche la colonna mercuriale con dilatazione quindici volte maggiore, e si inalza riportando in alto il centro di oscillazione. Posto che siano i due effetti eguali come si può determinare coll'esperienza e con il

calcolo variando la massa del mercurio, il pendolo non sentirà alterazione al caldo e al freddo. In seguito il medesimo autore adottò la compensazione a 9 verghe parallele di differenti metalli, ottone, e ferro. Avendosi due verghe di ferro A, B (Tav. VII fig. 3) ai lati, ed una C in mezzo, e due d'ottone D, E intermedie, si possono collegare le prime due verghe ad una traversa superiore e ad una inferiore, e a quest'ultima si possono unire le verghe d'ottone per la parte inferiore, e per la superiore ad una terza traversa alla quale si fisserà la verga di ferro del mezzo facendola passare per un foro nella traversa più bassa, ed unendovi la lente del pendolo. Con questa disposizione quando la lunghezza delle verghe sia proporzionata alla loro dilatazione potranno al caldo le verghe di ferro abbassare il pendolo di quanto lo inalzano quelle di ottone. Se ne sono usate anche tre d'acciajo, e due di zinco, o d'argento.

Un altro metodo per compensare l'azione della temperatura sul pendolo consiste nel porre a croce colla verga del pendolo due lamine compensatrici (Tav. VII fig. 4) OM, OM'. Ciascuna di queste è formata da due verghe una di ferro saldata al di sopra, ed una di rame al di sotto. All'estremità d'ognuna è un globetto metallico M, M' che può avvicinarsi e allontanarsi col mezzo di una vite. Al variar della temperatura varia la lunghezza del pendolo, ma anche le lamine compensatrici si incurvano per l'inegual dilatazione dei loro due metalli, e tanto portanoin alto il centro d'oscillazione coll'inalzare i due globi M, M', di quanto lo abbassa l'allungamento della verga col fare scendere la lente. Questa compensazione che è generalmente incomoda nei pendoli, rimane comodissima per le bilancie degli orologi da tasca, perchè allora le due lamine collocate alle parti opposte della bilancia non alterano la posizione del suo centro di gravità, e fanno allungare o accorciare il loro raggio medio.

Finalmente dirò come anche senza usare due metalli si possa compensare il pendolo. Sia una verga di ferro fissata all'estremo A (Tav. VII fig. 5) che porti il punto di sospensione B dal pendolo CD. La molla colla quale termina il pendolo passi per una stretta fessura di un pezzo C fisso. Quando allunga la verga del pendolo che è di ferro, egualmente allunga l'altra verga AB, e questa di tanto inalza il punto di sospensione di quanto si abbassa il centro d'oscillazione per allungamento dell'altra, e perciò rimane sempre costante la distanza tra il centro d'oscillazione, e il centro di moto C.

Negli orologi da tasca si usa la bilancia, detta anche il tempo, la quale può propriamente dirsi un pendolo, e gode delle medesime proprietà che al pendolo appartengono. Consiste essa (Tav. VII fig. 6) in un cerchio metallico *mn* centrato per il suo centro di figura e messo in moto da una molla avvolta a spirale, la quale supplisce alla forza di gravità. Anzi perchè la gravità non vi agisca passa l'imperniamento per il centro di gravità, e così si ha il vantaggio di poter tenere il cerchio oscillante in qualunque piano. La bilancia deve avere un conveniente peso e presentare all'aria la minor superficie possibile onde trovarvi minor resistenza. Quindi le bilancie d'oro e di platino sono preferibili, e quelle d'acciajo sono peggiori perchè oltre alla

leggerezza, il magnetismo e la ruggine possono portare disordine nel cammino dell'orologio. Al centro del circolo avvi un asse o fuso ben fabbricato d'acciajo attorno al quale oscilla la bilancia. Affinchè l'orologio da tasca sia un buon misuratore del tempo conviene che le oscillazioni della bilancia sian sempre di durata eguale, e il più piccolo difetto che esiste nel sistema delle ruote opera su di esse rendendo le vibrazioni ora più celeri ora più lente. La durata delle oscillazioni è regolata dalla grandezza della bilancia, e si fanno anche ad alcuni orologi da tasca bilance grandi che fanno l'oscillazione in un minuto secondo. La spirale di molla d'acciajo *defc* che l'Ugenio pose in questo strumento per tener luogo con la sua elasticità della forza motrice, ha costante la forza colla quale tende a ristabilirsi nella primiera figura riportando la bilancia al posto perchè le è per un estremo unita, e per l'altro sta fissa in un ritegno *d* alla superficie della piastra che cuopre il castello dell'orologio. Per far più celere o più lento il moto degli orologi da tasca si accorcia o si allunga questa molla d'acciajo con un congegno che è detto *situazione*, il quale manda avanti o indietro il pezzo *e* che ha una fessura ove entra la molla. Quindi vedesi che oltre al compensare su queste bilancie l'effetto della temperatura nel modo che abbiam detto, si può come è stato usato da Harisson porre una lamina compensatrice che agisca sulla molla spirale.

Comunicazione del moto per mezzo dell'urto.

203. *Considerazioni generali.* — Il modo più frequente di comunicar moto ai corpi consiste nell'urto; e forse anche quando agisce una forza motrice continua può la sua comunicazione di moto riguardarsi come effetto di successivi urti. Noi vogliamo ora considerare l'urto di un corpo contro di un'altro, e perciò in gran parte le leggi del movimento che si sviluppa dopo un tale urto dipendono dalle proprietà de' corpi urtato ed urtante. V'influisce anche la figura e la massa del corpo, e la direzione che ha l'urto rapporto alla superficie del corpo, e al suo centro di gravità. Quindi necessariamente deve distinguersi: l'urto tra i corpi duri, e molli, ed elastici: l'urto centrale dall'urto eccentrico, secondochè la direzione passa, o no, pel centro di gravità: l'urto diretto dall'urto obliquo, avendosi il primo quando la direzione dell'urto é normale alla superficie urtata, ed il secondo quando è obliqua. Sempre in ogni urto si han da distinguere tre periodi, quello nel quale i corpi urtanti si comprimono, quando la compressione è giunta al suo massimo, ed il tempo nel quale i corpi dall'esser compressi ritornano totalmente o in parte per la elasticità alla primitiva figura. La durata del primo periodo è minore quanto è più piccola la compressione che soffrono i corpi (*Int.* 114), ed in ogni istante di questo il lavoro meccanico della compressione eseguita rappresenta per il doppio del suo valore altrettanta forza viva che si comunica al corpo urtato. Terminata la compressione han le particelle del corpo urtato ed urtante acquistata la medesima velocità; e nel tempo del risalto seguitano i corpi a premersi, e seguita il passaggio della forza dal corpo urtante nell'urtato. Per l'inerzia le quantità di moto perdute o

guadagnate da i due corpi saranno eguali fra loro per ciascuno istante infinitamente piccolo dell'urto.

204. *Dell'urto diretto e centrale nei corpi molli e duri.* — Fra i corpi molli e i duri non vi è altra differenza nell'urto che relativamente al tempo in cui si effettua la comunicazione del moto, e all'alterazione che segue nei corpi stessi. In quelli duri l'urto non produce deformazione alcuna, o almeno deformazione sensibile; e la forza si trasmette da corpo a corpo istantaneamente seguitando per un'istante solo a premersi i due corpi che si urtano. Si ha nei corpi molli per l'urto un alterazione di figura e la forza vi si comunica a gradi ed in tutto il tempo che segue la deformazione del corpo seguitando anche i corpi a premersi. Il problema che ci proponghiamo risolvere è di trovare la celerità che avranno i corpi dopo l'urto centrale diretto, quando si conosce quella che avevano per l'avanti, e la massa dei corpi che si urtano. Chiamando m, m' la massa dei due corpi, v, v' le respettive loro celerità, x la celerità che acquistano dopo l'urto. Questa deve essere eguale in ambedue i corpi urtante ed urtato, perchè cesseranno essi di premersi appena che avranno acquistata tal celerità, e si moveranno nel medesimo verso, essendo come gli supponiamo privi affatto di elasticità. Siano avanti l'urto i corpi mossi per la medesima direzione cosicchè si possa dare a v, e v' il medesimo segno, avremo onde segua l'urto $v > v'$ ed $m\,(v - x)$ sarà la forza perduta nell'urto del corpo urtante, $m'\,(x - v')$ sarà quella acquistata dall'urtato, onde dovendo per l'inerzia essere l'una eguale all'altra si potrà porre

$$m\,(v - x) = m'\,(x - v')$$

Da dove rilevasi

$$x = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$$

Che se la celerità dell'urtato è opposta a quella dell'urtante, rappresentando questa con v, e l'altra con $-v'$ la formula che ci determina la celerità comune dopo l'urto chiaramente vedesi in questo caso essere

$$x = \frac{mv - m'v'}{m + m'}$$

Nei corpi molli o duri la celerità dopo l'urto è uguale nel corpo urtante e nell'urtato, ed è data dalla somma algebrica delle quantità di moto che avevano i corpi avanti *l'urto* divisa per la somma delle masse *dei* due corpi.

205. *Esperienze.* — L'esperienza ci conferma tuttociò che ci viene indicato dalle precedenti formule e che io esprimo colle seguenti deduzioni. Quando un corpo in quiete è urtato da un'altro, la velocità di questa si reparte tra ambedue secondo la proporzione delle masse. La formula diviene allora

$$x = \frac{mv}{m + m'}$$

perchè $v' = o$, e quindi se le masse sono eguali la velocità dopo l'urto è metà di quella che si aveva nell'urtante avanti l'urto, ed è un terzo se l'urtante aveva metà di massa dell'urtato, o $^2/_3$ se la proporzione tra le masse era inversa. L'esperienza si eseguisce preparando dei globi d'argilla bagnata che abbiano le proporzioni notate fra le masse e siano a guisa di pendolo attaccate a dei fili. Questi fili si pongono raddoppiati e dilatati in modo che formino un angolo fra loro onde togliere il moto rotatorio al globo come mostra la figura (Tav. VI fig. 12). Una colonna ritiene all'estremità superiore dei ritegni adattati per *i fili*, e

alla sua base una divisione a gradi eguali in un arco circolare, e questi gradi indicano le velocità che acquista il globo C il quale è stato allontanato dalla sua posizione d'equilibrio per un dato numero di gradi. Le celerità che acquista il globo cadendo per archi assai piccoli di una curva circolare sono prossimamente proporzionali all'ampiezza stessa dell'arco. In fatti il seno di un arco è medio proporzionale tra il diametro e il seno verso, onde i seni crescono come le radici quadrate dei seni versi, e questi sono le altezze a cui vengon sollevati i corpi che muovonsi per archi: le velocità sono proporzionali alle radici delle altezze, dunque le celerità son proporzionali ai seni, ma in archi piccoli i seni si confondono con gli archi, perciò questi sono proporzionali alle velocità.

Sieno pertanto attaccati alla macchina due globi eguali di argilla bagnata, e stieno essi a contatto al mezzo della divisione in A e B. Si devii uno di questi in C per sei gradi e si lasci cadere, urterà l'altro ed ambedue giungeranno con egual celerità alla divisione tre sulla parte opposta. Lo che mostra che dopo l'urto avevano i corpi una celerità metà di quella avanti l'urto. Sia un globo doppio di massa dell'altro, si devii il primo fino al sesto grado della divisione e si lasci cadere contro l'altro: dopo l'urto si moveranno ambedue con egual celerità e giungeranno alla divisione quarta sulla parte opposta, cioè due terzi sarà la celerità dopo l'urto rapporto a quella che aveva l'urtante. Si rimuova ora il globo più piccolo fino alla divisione sesta, e si lasci cadere contro l'altro anderanno ambedue uniti fino alla divisione seconda, cioè con celerità eguale al terzo di quella che si aveva avanti l'urto. Quando ambedue i corpi sono in moto, e le celerità sono contrarie ed inverse alle masse i corpi si urtano distruggendosi l'un l'altro tutta la forza onde rimangano in quiete. Si porti il globo maggiore alla divisione quarta, e il minore alla divisione ottava. Cadendo l'un contro l'altro si fermeranno ambedue dopo l'urto. Di qui rileviamo che vi sono tre modi per distruggere coll'urto il moto di un altro corpo 1:° lanciandoli incontro un corpo della stessa massa e che si muova con egual velocità; 2:° lanciandoli con minor velocità un corpo più pesante; 3:° lanciando con maggior velocità un corpo più leggero. I lavori delle arti ci presentano ad ogni istante esempj di queste diverse specie d'equilibrio.

206. *Forza viva dei corpi molli e duri dopo l'urto.* — Sia che i due corpi nell'urto si vadano incontro o si inseguano, la forza viva avanti l'urto è $mv^2 + mv'^2$, e dopo l'urto diviene
$$(m+m')\,x^2 = \frac{(mv \pm mv')^2}{m+m'}$$
Per conseguenza la forza viva perduta nell'urto sarà
$$mv + mv'^2 - \frac{(mv \pm m'v')^2}{m+m'}$$
$$= \frac{m'm}{m+m'}.\,(v \mp v')^2$$
cioè sempre in questi corpi esisterà nell'urto una perdita di forza viva, giacchè convien che sia $v > v'$ onde l'urto possa aver luogo.

Quando il corpo m urta contro l'altro m' in quiete, siccome sarà $v = o$, potrem dire che la forza viva perduta sta alla forza viva primitiva come la massa del corpo urtato sta alla somma delle masse de' due corpi. La perdita adunque della forza viva è tanto più vistosa quanto è più grande la massa del corpo urtato.

Muovendosi i due corpi nel medesimo senso non si ha che quella perdita di forza viva, che accaderebbe se un corpo stasse fermo, e l'altro si muovesse colla differenza delle due velocità. Onde tal perdita è tanto minore quanto è più piccola questa differenza. Finalmente grandissima è la forza viva perduta quando i corpi si muovono incontro; e quando le masse stanno inversamente alle velocità si perde tutta. Quindi tanto minore sarà la perdita quanto più ci si allontana dall'accennata relazione.

Non si ha da ritener che nell'urto de' corpi non elastici si sia perduto una porzione dell'effetto della forza, sì è diremo piuttosto impiegata una porzione della forza nella compressione, e il suo corrispondente effetto si riscontra nell'alterazione di figura che dopo l'urto i corpi presentano. La metà adunque della forza viva perduta sarà la misura del lavoro impiegato nella deformazione de' corpi.

207. *Applicazioni*.- Una bella applicazione dell'urto si fa nel modo di far giocare in battaglia le masse dell'infanteria e della cavalleria. L'esperienza ha costantemente dimostrato che la cavalleria la più pesante non può mai sostenere a piè fermo l'urto della cavalleria la più leggera, ma può rovesciar questa se prende anche un moto lento. Torna conto per l'economia delle forze che si percorra dalla cavalleria di passo o di piccolo trotto la maggior parte del cammino che deve farsi prima di giungere allo scontro del nemico. Dipoi si metta al gran trotto, e al galoppo; ed infine si percorre l'ultimo spazio al più gran galoppo che i cavalli possono prendere senza disunirsi in modo che giungano sul nemico con molta velocità ed ancora vigorosi.

Poichè nell'urto, l'uno dei due corpi essendo stato in quiete, la velocità dell'urtante, produce minor moto a proporzione che è la massa dell'urtato maggiore, se ne deduce la conseguenza che il moto deve essere insensibile se l'urtato è infinitivamente maggiore di quello che viene a colpirlo. Per questa ragione una palla di cannone perde tutto il suo moto quando è stata cacciata contro un terrapieno o contro una grossa torre; e per questa stessa cagione all'incontro può dirsi che anche un piccolo urto comunicato ad una gran mole produce in questa sempre un qualche piccolo movimento, il quale può rendersi sensibile quando si considerino anche le oscillazioni. Una carrozza che passa dalla strada è capace col suo moto a comunicar vibrazioni sensibilissime alle fabbriche più grandi che sono lungo la strada stessa.

Dalle precedenti esperienze rileviamo ancora perchè abbia il fabbro a lamentarsi di un' incudine troppo leggera e che è collocata sovra un piano poco solido, perchè il ferro che egli lavora cedendo al martello col suo punto d'appoggio pel movimento dell' incudine non sorte l'effetto che dal colpo ei voleva rilevare. Possiam dunque riconoscere quanto sia il vantaggio di avere un martello con peso proporzionato all'effetto che si vuol produrre, di avere in quella macchina che vien detta il maglio, la testa molto pesante. Così anche il giocatore del biliardo trova vantaggio quando la stecca ha il suo conveniente peso.

In quanto alla deformazione dei corpi facilmente rileviamo perchè questi si rompono o perdono la loro figura urtando contro ostacoli inconcussi e la mantengono se ne incontrano dei

leggeri e mobili. Uno schifo urta in uno scoglio, e si spezza; mentre non perisce se è urtato da un altro schifo in quiete che egli incontra. La ragione si è perché cedendo lo scoglio pochissimo o niente, le parti del legno urtate perdon tutta la celerità mentre le altre dei legni connessi ancora la ritengono quasi nella sua totalità.

Quando due corpi diretti in sensi contrari si urtano, a meno che essi non siano elastici, si ha nell'urto la perdita della forza di quel corpo che ne aveva meno, e di altrettanta nel corpo che ne aveva di più che è servita a distruggere la prima. Se dunque si vuole che nell'azione di una macchina non vi sia forza perduta, conviene che non si abbia alcun urto tra le sue diverse parti che muovonsi in senso contrario. È questo un principio generale dal quale non bisogna allontanarsi mai nella costruzione e nel giuoco delle macchine. Ogni urto ha il doppio svantaggio di diminuire istantaneamente la forza viva di cui si può disporre, e di alterare la solidità e durata della macchina. Conviene nelle macchine evitare gli attriti irregolari, che generano urti e reazioni. E siccome questi urti si manifestano con cigolìo e scotimenti, così deve conchiudersi che non sono perfette se non che quelle macchine i cui movimenti si eseguiscono con regolarità, con dolcezza, senza rumore e senza scosse.

208. *Urto diretto e centrale dei corpi elastici.* — Si han da distinguere nell'urto i due periodi, del tempo che si fa la compressione dei corpi, e di quello in cui le parti compresse ritornano al loro posto. Il secondo periodo nei corpi perfettamente elastici è precisamente eguale al primo perchè la forza comprimente è uguale alla forza di risalto distruggendo questa precisamente l'effetto che quella aveva prodotto, e può anche dirsi che le pressioni tra i due corpi che si urtano seguono durante il risalto le stesse leggi che avevano nella compressione. Quindi nello stato di compressione potendo i corpi elastici essere considerati come molli; si dirà che la comunicazione di forza si fa in questo periodo colle regole per quelli notate (204). E nel secondo periodo tornando ad aver luogo fra i corpi le medesime pressioni che nel primo, devono anche aver luogo eguali passaggi di forza. Dunque possiamo concludere che la forza comunicata nell'urto dei corpi elastici è doppia di quella che si comunica fra l'urto dei corpi molli. Siccome poi l'elasticità non è mai perfetta rappresentando con n il grado dell'elasticità (talchè sia un corpo perfettamente elastico quando $n = 1$) avremo a cercare la forza che si comunica fra i due corpi durante la compressione con la regola stabilita per i corpi molli, ed a quella dovremo aggiungere ciò che si ottiene moltiplicando quella stessa forza per n. Molti esempj schiariranno questa regola, e ce la confermeranno con i resultati dell'esperienza.

Qui devo anche aggiungere che non rimanendo nei corpi perfettamente elastici alcun'effetto di deformazione non si può avere neppure per l'urto perdita di forza viva. Allorchè l'elasticità è imperfetta la perdita di forza viva sarà sempre proporzionale all'alterazione permanente che per l'urto subiscono i corpi, ed eguale al doppio del lavoro meccanico ivi impiegato. È dunque l'elasticità nell'atto della compressione come un serbatojo di forza viva, o di lavoro disponibile.

209. *Esperienze.* — Si abbiano alla macchina di sopra accennata (Tav. VI fig. 12) due globi di avorio, siano ambedue di egual massa, e supponiamo questo corpo perfettamente elastico come d'ordinario apparisce. Sia un globo in quiete, e l'altro gli si muova contro dalla sesta divisione. Dopo la compressione mezza forza sarà passata dall' urtante nell' urtato per la legge dei corpi molli. Durante il risalto l'altra mezza forza sarà passata parimente dall'urtante nell'urtato, e così dunque dopo l'urto dovrà star fermo il globo urtante, e muoversi l'urtato con la celerità che aveva il primo, e ciò appunto segue perchè il globo d' avorio urtato sale alla divisione sei, e l'altro rimane in quiete. Si abbia un globo di doppia massa dell' altro e sia il primo portato alla divisione sesta; dopo la compressione rimanendo all'urtante due terzi di celerità avrà comunicato un sol terzo della sua forza; e perciò un altro terzo comunicherà durante il risalto, e quindi dopo l'urto avrà l'urtante un sol terzo di velocità, e l'urtato ne avrà due terzi che nella sua minor massa fanno per quattro terzi di velocità, perciò seguiterà l' urtante a muoversi fino alla divisione due, mentre l'urtato va alla divisione otto, e l' esperienza conferma il resultato del ragionamento. Sia mosso fino alla divisione sei il globo minore: questo cadendo comprimerà quell'altro comunicandoli due terzi della sua forza, e poi avrà luogo il risalto durante il quale comunicherà pure due terzi, ossia riceverà un urto per un terzo di forza in parte opposta. Quindi l' urtato si muoverà fino alla divisione quattro, e l'urtante risalterà indietro fino alla divisione due, lo che realmente ha luogo. In fine si abbiano i due globi eguali mossi in senso contrario con velocità uno di sei, e l'altro di quattro dopo l' urto risalteranno indietro con velocità barattate: infatti durante la compressione si estinguerà la velocità dell' ultimo e quella di ambedue si ridurrà eguale a uno e nel senso della celerità maggiore. Per conseguenza il primo corpo aveva perduto cinque di volocità ed altri cinque perderà durante il risalto, lo che equivale a dire che 10 superando di 4. il sei acquisterà una celerità 4 in senso contrario a quella che aveva; il secondo avendo nella compressione perduto 5 di forza (contando i 4 perduti, e l'1 acquistato in senso contrario) altri 5 perderà nel risalto, e 10 supera di sei i 4 che aveva, dunque acquisterà 6 di forza in senso contrario al moto suo primitivo. E l'esperienza corrisponde vedendosi dopo l' urto risalire alla divisione 6 quello che era disceso dalla 4, e risalire alla 4 quello che era disceso dalla 6.

210. *Applicazioni.* — Abbiamo dal ragionamento e dall'esperienza rilevato che l' elasticità raddoppia l'effetto dell'urto, e serve anche a rivolgere in parte opposta la velocità, quindi possono rilevarsi le spiegazioni di molti fenomeni e processi d'arte. Il risaltare indietro di tanti corpi che sono gittati con forza contro di un piano immobile, non è che un effetto dell' elasticità, perchè durante la compressione il piano immobile distrugge tutta la forza dell' urto, ed altrettanta ne distrugge o ne produce in senso contrario nel tempo del risalto, se il corpo è perfettamente elastico. Nel caso poi di imperfetta elasticità non si riproduce nel risalto che una porzione della forza, e quindi si comprende perchè

alcuni corpi rimbalzan più ed altri meno, e tutti mostrano questo fenomeno del rimbalzare allorquando sono urtati con forza molto grande. Della forza viva restituita nel rimbalzo fa conveniente uso l'abile magnano che agisce sovra incudine ben fissa, mentre risparmia il lavoro occorrente nel sollevare di nuovo il martello. Questo rimbalzare dei corpi dopo l'urto non è però sempre utile; e gli artefici che lavorano sopra piccole incudi o su lastre d'acciajo come i brunitori, gli orefici, gli oriolaj, sogliono situare i corpi con un rotolo di stofe o altri corpi cedevoli su i quali posano la base di legno che sostiene lo strumento. Se non usassero questa precauzione una gran parte della forza impressa col martello, sarebbe trasmessa al suolo e cagionerebbe scuotimenti pregiudicevoli a tutto il lavorato, ed un rimbalzo nocivo alla loro operazione. Per ragioni simili si costruiscono di pietre cotte, o mattoni i ripari delle piazze fortificate, se si facessero di pietra più resistente ed elastica, le cannonate percuotendo questi corpi elastici trasmetterebbero il loro moto in una maggior profondità, e recherebbero maggior danno. Così pure deve intendersi che l'elasticità sia la cagione del gran danno che recano le palle del cannone nei legni navali quando vi sono scagliate da posizioni assai lontane. Allora vi producono danno anche maggiore che quando vi giungono da poca distanza, perchè in questo caso forano il legno, e non gli comunicano forza tale da conquassarlo; il foro può esser chiuso, ma l'urto comunicato alle diverse tavole le sconnette senza rimedio.

Si è veduto che i corpi duri come i molli provano una perdita di forze, principalmente se le loro direzioni sono in sensi opposti; perdita che non si riscontra nei corpi perfettamente elastici ove prima, e dopo l'urto la somma delle forze vive è sempre la stessa. Questo vantaggio dei corpi elastici sovra a quelli duri e molli gli rende di un uso vantaggiosissimo in meccanica. Se si considera per esempio il moto delle vetture, le cui ruote soffrono incessantemente urti più o meno grandi contro la parti salienti della strada, si troverà moltissimo vantaggio a far sostenere da molle la cassa delle vetture e il loro carico. Per l'effetto di queste molle, una parte della forza orizzontale che si perderebbe all'istante dell'urto è conservata, e per conseguenza serve al moto progressivo della vettura. In quanto poi alla parte della forza che spinge la vettura dal basso in alto dirò che per l'effetto delle molle, le quali si piegano nel momento in cui la forza spinge dal basso in alto, il centro di gravità della vettura si trova ben poco sollevato; e quando l'ostacolo è sormontato, quando le ruote dopo essere salite discendono, la molla sollevando la cassa o carico della vettura fa riprendere al centro di gravità la sua altezza primitiva per rapporto alle rote. In tal guisa per l'effetto delle molle il centro di gravità delle vetture deve provare de' movimenti dal basso in alto, e viceversa, meno violenti, e meno estesi. Quest' effetto è estremamente sensibile quando si paragonano le scosse che si soffrono in una vettura non sospesa, e in quelle che si hanno in una con molle, specialmente quando la celerità è grande. Questo resultato non giova solamente a diminuire la pena de' viaggiatori, ma serve moltissimo per risparmiare una porzione

di forza motrice, e gli urti che possono danneggiare le merci trasportate.

211. *Trasmissione dell' urto tra più corpi elastici; e applicazioni.* — Quello che abbiamo insegnato relativamente all'urto di due corpi elastici ha egualmente luogo quando se ne hanno molti contigui. Si sospendano sette, o otto palle d'avorio in maniera che stieno a contatto ed abbiano i loro centri in una medesima linea, e si faccia cadere la prima per un arco di cerchio contro la seconda, l'ultima si separerà dall'altre con una velocità simile a quella che avrebbe avuta la seconda se non fossero esistite tutte le altre. Facendone cadere due ad un tempo contro la terza, l'ultime due con pari velocità si sepereranno dalle altre le quali resteranno in quiete. Ben s'intende che la ragione è l'urtarsi di ogni palla contro la sua seguente, e quando son due che cadono anche gli urti son due ed uno dopo l'altro. Lasciando urtare una sola palla di doppia massa contro le precedenti non seguirà che si muovano le due ultime con egual celerità, ma acquisteranno velocità diverse perchè l'urtante non trasmette tutto il suo moto nell'urtato.

Queste dottrine dei corpi elastici devono anche applicarsi all'urto dei fluidi, coll'osservazione che in questi la massa ha le sue parti sconnesse e perciò il moto non si comunica tutto in un tempo, e solo dopo un dato tempo il corpo urtato riceve tutto il moto che gli può essere trasmesso, come rilevasi osservando le ali di un mulino a vento o la ruota di un mulino ad acqua quando cominciano ad esser mosse. L'elasticità delle corde le rende atte a resistere ad urti secchi e violenti facendoli tenere le veci di molle. Prima di porre in opera i cordami per fare degli sforzi considerevoli è duopo stirarli fortemente, perchè altrimenti si allungano e non rendono colla loro elasticità i servigi importanti ai quali sono destinati. A bordo delle navi quando vi si vuole stabilire dei mortai pesantissimi da lanciar bombe di peso considerevole, per diminuire la forza dell'urto che si produce all'istante del tiro, la quale spinge il mortaio contro la nave si ha cura di collocare sotto il ponte un grosso strato di corpi elastici per impedire il guasto nelle diverse parti della tessitura della nave. Quando gli artefici battono con un martello la cui testa è di ferro ed il manico di legno, l'urto prodotto dalla testa del martello trasmette al manico vibrazioni che affatican la mano dell'artefice, quando batte a colpi frequenti sopra superficie vibranti, come fa il calderajo il lattajo ec. Conviene allora dare all'impugnatura del manico maggior grossezza, che a quella parte di esso la quale incastra nella testa del martello. Con tal disposizione le vibrazioni dovendosi trasmettere da sezioni di poca superficie ad altre di superficie maggiore, queste vibrazioni hanno sempre minore energia, e l'artefice termina per non sentirle.

212. *Dell'urto eccentrico.* — Se la direzione dell'urto non passa per il centro di gravità si ha oltre al moto progressivo del quale abbiamo parlato, anche un moto rotatorio che nel centro di gravità non disturba punto le leggi stabilite per l'urto. Talchè qui dobbiamo semplicemente aggiungere che la celerità del moto rotatorio si calcola dal momento della forza communicata nell'urto, riferito al centro di gravità. Ordinariamente l'urto è più o

meno eccentrico e però i corpi si muovono con moto progressivo e rotatorio più spesso che con il primo soltanto.

215. *Dell' urto obliquo*. — Anche le leggi dell' urto obliquo facilmente si deducono da quelle del diretto e centrale; infatti non dee farsi altro che immaginare decomposta la forza del corpo urtante in due, una normale alla superficie del corpo urtato nel luogo ove si fa l'urto, e l'altra parallela alla medesima superficie. È manifesto che la prima componente produrrà un urto diretto pel quale avran luogo le leggi già stabilite; e la seconda non produrrà alcun urto e tutta si conserverà nel corpo urtante, componendosi con la porzione della forza normale che al medesimo potesse esser rimasta dopo l'urto. Se dunque un globo A d'argilla (Tav. VI fig. 15) urti obliquamente in un altro egual globo D in quiete, la forza rappresentata da AD si risolverà nelle due rettangolari BD, SD, e la prima di queste producendo l'urto si trasmetterà per metà al globo D e lo manderà in DE l'altra sua metà rimarrà nel globo A, e componendosi con la seconda forza SD lo manderà in DF, cioè per l'urto non solo seguirà in queste una diminuzione di celerità ma anche una deviazione di moto. Se il globo A va ad urtare obliquamente contro un altro globo di maggior massa, sarà più piccola la porzione della componente BD che si conserva nell'urtante, e però la direzione del suo moto si avvicinerà a DE. Se finalmente urterà A contro un corpo immobile e molle si distruggerà tutta la componente BD e sollecitato dall' altra SD si moverà A parallelamente al piano urtato secondo DB. L'esperienza conferma queste deduzioni di ragionamento, ma conviene aver cura di non usare forze troppo grandi perchè anche i globi di argilla umida e tutti gli altri corpi molli potrebbero risentire alquanto l'effetto dell'elasticità.

Nei corpi elastici fatta la medesima decomposizione si ha differenza nella porzione della componente BD che rimane nell'urtante, poichè deve determinarsi con le leggi sopra stabilite per l'urto diretto di questi corpi. Sia un globo A d'avorio mandato obliquamente contro l'altro egual globo D in quiete. La componente BD si trasmetterà tutta all'altro globo il quale sarà portato in E, e rimarrà in C la sola SD che lo porterà in P. Se A sia di maggior massa, non solo la componente BD si trasmetterà, ma anche una forza maggiore e risalterà il corpo A indietro con una forza più piccola di BD, onde componendosi questa con la SD andrà il corpo in una direzione DC facendo un angolo di riflessione BDC maggiore dell'altro d'incidenza BDA. Così intendesi perchè urtando un corpo contro un altro meno mobile risalta indietro il primo. Ciò accade in una vettura poco carica che urti contro un altra molto carica, con gran danno della prima, la quale è ordinariamente ribaltata. Ciò avviene anche per le stesse cagioni in due vetture che si urtano movendosi ambedue, e se una và più celere dell'altra o è più pesante, scaglia lontana e ribalta la seconda.

Finalmente se il globo A sia mandato contro una mattonella elastica, la componente BD si riprodurrà tutta in senso contrario onde l'angolo di riflessione BDC sarà eguale all'altro di incidenza BDA. L'esperienza lo mostra sia che si batta una

palla d'avorio sovra una mattonella bene imbottita e molto cedevole e sopra una grossa lastra metallica. Il gioco del biliardo è in gran parte appoggiato su questo teorema, e può il giocatore calcolando l'angolo di riflessione da quello d'incidenza conoscere se urterà la palla dell'avversario.

214. *Urto in un corpo che gira attorno ad un'asse.* — Sia un corpo Q infilato in un'asse A che suppongo perpendicolare al piano della carta: mentre questo corpo è in quiete venga urtato nel punto T da un altro corpo P nella direzione TL perpendicolare alla superficie di contatto, e contenuta in un piano perpendicolare all'asse A. Chiamiamo M la massa del corpo urtante, V la sua celerità avanti l'urto. Nell'atto d'incontro sia F la forza di compressione; questa dall'essere zero nel primo istante aumenta per gradi, e giunge poi al suo valore massimo. Potremo riguardare la forza F come applicata al corpo P, e ritenuta x per la velocità che rimane dopo l'urto al corpo P, sarà $V - x$ la sua celerità perduta, e la sua forza perduta, potrà esprimersi con $M(V - x) = F$. La forza F sù Q tende a farlo girare attorno al suo asse con un momento

$$F . AC = M (V - x) . AC ;$$

ma questo è eguale alla velocità angolare ω moltiplicata per il momento d'inerzia I, e perciò avremo

$$M (V - x) AC = \omega I .$$

Una volta che il corpo P avrà preso la velocità angolare dell'altro attorno all'asse A, lo che accade dopo l'urto, quando i corpi sono molli o duri la velocità effettiva di P sarà eguale alla velocità angolare ω che è comune ai due corpi moltiplicata per la distanza del centro G di gravità dal centro A cioè $x = \omega . GA$. Sostituito questo valore nell'eguaglianza precedente abbiamo

$$\omega = \frac{M . V . AC.}{M . GA . AC + I}$$

formola che dà la velocità angolare del corpo urtato per mezzo del suo momento d'inerzia, e delle cognizioni relative al corpo urtante.

215. *Centro di percossa.* — Si è già stabilito che esiste un punto che noi si disse centro di oscillazione (197. 198), il quale non riceve nè aumento nè diminuzione di moto per gli altri punti che compongono il corpo, e questo punto si trova sulla retta che unisce il centro di moto col centro di gravità, e distante dal centro di moto per una quantità

$$\frac{I}{MK}$$

ove I è il momento d'inerzia del corpo, M la sua massa, e K la distanza tra il centro di moto e quello di gravità. Ora è chiaro che se il corpo è in quiete, e si urta girerà attorno all'asse nel quale è infilato, ed una porzione della forza verrà distrutta da questo, a meno che l'urto non si faccia nella direzione del centro d'oscillazione e normale alla retta che unisce questo centro con quello di moto. In questo caso siccome la forza può intendersi applicata al centro d'oscillazione il moto di esso non sarà impedito dagli altri punti del corpo e perciò neppure dall'asse. Anche nel caso che il corpo ruoti attorno ad un'asse ed incontri uno ostacolo nella direzione del centro d'oscillazione, il moto cesserà senza che alcun urto venga risentito dall'asse di rotazione. Quindi l'asse stesso è uno dei principali (186) ed il centro d'oscillazione chiamasi centro di percossa. Questo centro sarebbe combinato con quello di gra-

vità se il corpo non avesse avuto alcun punto fisso. Può il centro di percossa di un corpo trovarsi sperimentalmente non solo come si è detto del centro di oscillazione ma anche nel seguente modo. Si stabilisca il punto di rotazione del corpo sovra un' appoggio fisso, e si lasci il corpo cadere sopra il cuspide di un prisma triangolare mobile lungo un piano orizzontale. Per tentativi si determini qual' è la posizione del cuspide, nella quale urtandovi il corpo non si ha oscillazione o ripercossa contro il punto di rotazione. Potremo ritenere che il piano verticale il quale passa allora per il cuspide, contiene il centro di percossa del corpo.

Pongasi che mentre un corpo gira attorno ad un' asse incontri un' ostacolo. Se l' ostacolo è incontrato in un punto che corrisponde al centro di percossa, resterà il corpo in riposo per effetto dell' urto, quand' anche non fosse stabile il centro di rotazione: quando l' ostacolo è incontrato tra il centro di moto e quello di percossa, o al di là di questo, si avrà sempre un' urto contro l' asse di rotazione, e nel primo caso sarà l' urto in senso contrario all' altro. E la componente della forza che agisce sull' asse è facile determinarla purchè si ritenga che la resultante è la forza d' urto applicata al centro di percossa, e le componenti devono essere parallele e applicate ai due punti, centro di rotazione, e dove incontrasi l' ostacolo.

216. *Applicazioni*. — Impresso moto di rotazione ad una spranga che si tiene in mano, sentiremo contro il braccio una reazione ogni qual volta verrà la spranga ad urtare contro un' ostacolo che non rimane nella direzione del centro di percossa. Interessa che un martello batta col suo centro di percossa onde tutto l' urto si comunichi al corpo battuto; e ciò suole sempre accadere perchè la testa del martello ha molto maggiore densità del manico. Affinchè l' asse di un martello non provi reazione all' istante dell' urto, bisogna che tutte le condizioni necessarie a far passare l' urto pel centro di percossa siano adempite, e che inoltre l' urto non sia obliquo. Così venendo il corpo posato sull' incudine, e a contatto con un dato punto del martello, dovrà la verticale che passa per quel punto rimanere perpendicolare alla superficie del martello, e dovrà passare per il centro di percossa. La forma del martello è spesso studiata a quest' oggetto.

217. *Pendolo balistico*. — Per la balistica è interessantissimo il determinare la velocità iniziale dei projetti, e ciò si fa usando il pendolo balistico, e disponendo il calcolo come segue. Questo pendolo consiste in un tronco solido di legno N (Tav. VII fig. 8) circondato da legami di ferro con una faccia, ove deve farsi l' urto, ricoperta di piombo per diminuire l' elasticità. L' urto diretto mette in moto il pendolo e lo fa oscillare, e dall' innalzamento di esso (*Int.* 72) o dalle sue oscillazioni si rileva la forza del projetto che l' ha urtato. Si tiri una palla d' archibugio o da cannone M nel pendolo N colla direzione per quanto si può secondo la retta che passa per il centro di percossa O. In tal direzione non si produce alcuna reazione sull' asse A e solo una velocità angolare nel pendolo, la quale è comune al projetto perchè l' urto segue tra corpi molli. Essendo G il centro di gravità, ritenute le denominazioni precedenti, ed osservato, che in questo caso è prossima-

palla d'avorio sovra una mattonella bene imbottita e molto cedevole e sopra una grossa lastra metallica. Il gioco del biliardo è in gran parte appoggiato su questo teorema, e può il giocatore calcolando l'angolo di riflessione da quello d'incidenza conoscere se urterà la palla dell'avversario.

214. *Urto in un corpo che gira attorno ad un'asse.* — Sia un corpo Q infilato in un'asse A che suppongo perpendicolare al piano della carta: mentre questo corpo è in quiete venga urtato nel punto T da un altro corpo P nella direzione TL perpendicolare alla superficie di contatto, e contenuta in un piano perpendicolare all'asse A. Chiamiamo M la massa del corpo urtante, V la sua celerità avanti l'urto. Nell'atto d'incontro sia F la forza di compressione; questa dall'essere zero nel primo istante aumenta per gradi, e giunge poi al suo valore massimo. Potremo riguardare la forza F come applicata al corpo P, e ritenuta x per la velocità che rimane dopo l'urto al corpo P, sarà $V - x$ la sua celerità perduta, e la sua forza perduta, potrà esprimersi con $M(V - x) = F$. La forza F su Q tende a farlo girare attorno al suo asse con un momento

$$F . AC = M(V - x) . AC;$$

ma questo è eguale alla velocità angolare ω moltiplicata per il momento d'inerzia I, e perciò avremo

$$M(V - x) AC = \omega I.$$

Una volta che il corpo P avrà preso la velocità angolare dell'altro attorno all'asse A, lo che accade dopo l'urto, quando i corpi sono molli o duri la velocità effettiva di P sarà eguale alla velocità angolare ω che è comune ai due corpi moltiplicata per la distanza del centro G di gravità dal centro A cioè $x = \omega . GA$. Sostituito questo valore nell'eguaglianza precedente abbiamo

$$\omega = \frac{M . V . AC}{M . GA . AG + I}$$

formula che dà la velocità angolare del corpo urtato per mezzo del suo momento d'inerzia, e delle cognizioni relative al corpo urtante.

215. *Centro di percossa.* — Si è già stabilito che esiste un punto che noi si disse centro di oscillazione (197. 198), il quale non riceve nè aumento nè diminuzione di moto per gli altri punti che compongono il corpo, e questo punto si trova sulla retta che unisce il centro di moto col centro di gravità, e distante dal centro di moto per una quantità

$$\frac{I}{MK}$$

ove I è il momento d'inerzia del corpo, M la sua massa, e K la distanza tra il centro di moto e quello di gravità. Ora è chiaro che se il corpo è in quiete, e si urta girerà attorno all'asse nel quale è infilato, ed una porzione della forza verrà distrutta da questo, a meno che l'urto non si faccia nella direzione del centro d'oscillazione e normale alla retta che unisce questo centro con quello di moto. In questo caso siccome la forza può intendersi applicata al centro d'oscillazione il moto di esso non sarà impedito dagli altri punti del corpo e perciò neppure dall'asse. Anche nel caso che il corpo ruoti attorno ad un'asse ed incontri uno ostacolo nella direzione del centro d'oscillazione, il moto cesserà senza che alcun urto venga risentito dall'asse di rotazione. Quindi l'asse stesso è uno dei principali (184) ed il centro d'oscillazione chiamasi centro di percossa. Questo centro sarebbe combinato con quello di gra-

vità se il corpo non avesse avuto alcun punto fisso. Può il centro di percossa di un corpo trovarsi sperimentalmente non solo come si è detto del centro di oscillazione ma anche nel seguente modo. Si stabilisca il punto di rotazione del corpo sovra un' appoggio fisso, e si lasci il corpo cadere sopra il cuspide di un prisma triangolare mobile lungo un piano orizzontale. Per tentativi si determini qual' è la posizione del cuspide, nella quale urtandovi il corpo non si ha oscillazione o ripercossa contro il punto di rotazione. Potremo ritenere che il piano verticale il quale passa allora per il cuspide, contiene il centro di percossa del corpo.

Pongasi che mentre un corpo gira attorno ad un' asse incontri un' ostacolo. Se l' ostacolo è incontrato in un punto che corrisponde al centro di percossa, resterà il corpo in riposo per effetto dell' urto, quand' anche non fosse stabile il centro di rotazione: quando l' ostacolo è incontrato tra il centro di moto e quello di percossa, o al di là di questo, si avrà sempre un' urto contro l' asse di rotazione, e nel primo caso sarà l' urto in senso contrario all' altro. E la componente della forza che agisce sull' asse è facile determinarla purchè si ritenga che la resultante è la forza d' urto applicata al centro di percossa, e le componenti devono essere parallele e applicate ai due punti, centro di rotazione, e dove incontrasi l' ostacolo.

216. *Applicazioni*. — Impresso moto di rotazione ad una spranga che si tiene in mano, sentiremo contro il braccio una reazione ogni qual volta verrà la spranga ad urtare contro un' ostacolo che non rimane nella direzione del centro di percossa. Interessa che un martello batta col suo centro di percossa onde tutto l' urto si comunichi al corpo battuto; e ciò suole sempre accadere perchè la testa del martello ha molto maggiore densità del manico. Affinchè l' asse di un martello non provi reazione all' istante dell' urto, bisogna che tutte le condizioni necessarie a far passare l' urto pel centro di percossa siano adempite, e che inoltre l' urto non sia obliquo. Così venendo il corpo posato sull' incudine, e a contatto con un dato punto del martello, dovrà la verticale che passa per quel punto rimanere perpendicolare alla superficie del martello, e dovrà passare per il centro di percossa. La forma del martello è spesso studiata a quest' oggetto.

217. *Pendolo balistico*. — Per la balistica è interessantissimo il determinare la velocità iniziale dei projetti, e ciò si fa usando il pendolo balistico, e dispenendo il calcolo come segue. Questo pendolo consiste in un tronco solido di legno N (Tav. VII fig. 8) circondato da legami di ferro con una faccia, ove deve farsi l' urto, ricoperta di piombo per diminuire l' elasticità. L' urto diretto mette in moto il pendolo e lo fa oscillare, e dell' inalzamento di esso (*Int.* 72) o dalle sue oscillazioni si rileva la forza del projetto che lo ha urtato. Si tiri una palla d' archibugio o da cannone M nel pendolo N colla direzione per quanto si può secondo la retta che passa per il centro di percossa O. In tal direzione non si produce alcuna reazione sull' asse A e solo una velocità angolare nel pendolo, la quale è comune al projetto perchè l' urto segue tra corpi molli. Essendo G il centro di gravità, ritenute le denominazioni precedenti, ed osservato, che in questo caso è prossima-

mente AG = AO = r ove r rappresenta la distanza del centro di percossa dal centro di moto, l'equazione della velocità angolare (215) si riduce

$$\omega = \frac{rM \cdot V}{Mr^2 + I}$$

dalla quale si rileverebbe la velocità V iniziale del projetto quando fosse determinata la celerità angolare ω del pendolo. Per evitare questa cognizione chiameremo A l'altezza alla quale s'innalza il centro di gravità del pendolo in virtù della celerità ω; siccome la forza viva si è detto essere eguale al momento d'inerzia moltiplicato per il quadrato della velocità angolare, e possiamo prendere per il momento d'inerzia della palla Mr^2, avremo $(Mr^2 + I)\omega^2$ per l'espressione della forza viva. Questa avvertendo che $2gA$ è il quadrato della velocità, può anche esprimersi con $2(M' + M)gA$. Eguagliate fra loro queste due quantità rileviamo

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{2(M' + M)gA}{Mr^2 + I}\right)}$$

Quindi abbiamo

$$V = \sqrt{\left[\frac{2(M' + M)gA(Mr^2 + I)}{Mr}\right]}$$

formula che assegna la velocità effettiva del projetto purchè si conosca il momento d'inerzia del pendolo.

Posto che voglia farsi anche senza questo dato, cercheremo di sostituirvi invece la durata delle oscillazioni. Nella consueta formula per questa durata (195. 198)

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{I}{MKg}}$$

converrà sostituire $Mr^2 + I$ invece di I, ed $M' + M$ in luogo di M perchè il projetto forma corpo col pendolo, e converrà porre r in luogo di l; onde si avrà

$$t^2 = \frac{\pi^2 r}{g} = \frac{\pi^2}{g} \frac{Mr^2 + I}{(M' + M)K}$$

e valendoci del valore di $Mr^2 + I$, e di r che di qui rilevasi per sostituirli nel valore di V abbiamo

$$V = \frac{\pi}{t} \frac{P + p}{p} \sqrt{2AK}$$

ove P, p rappresentano i pesi del pendolo e della palla, ed A l'altezza per cui il centro di gravità del pendolo monta descrivendo un cerchio col raggio K, cioè colla distanza dall'asse di rotazione. Ma è

RG'^{2} = RG (2AG - RG) = A(2K - A) = 2KA

supponendo molto piccole le oscillazioni del pendolo; ed RG' è la metà della corda C dell'arco descritto dal pendolo nella prima oscillazione dopo l'urto: dunque sarà

$$V = \tfrac{1}{2} \frac{\pi}{t} C \frac{P + p}{p}$$

Volendo usare questa formula o la precedente per ottenere la velocità iniziale del projetto converrà contare le oscillazioni che si fanno dal pendolo in un dato tempo per dedurne il valore t, e converrà misurare il seno $\tfrac{1}{2}$ C dell'arco che descrive il pendolo col punto G nel deviarsi dalla verticale per effetto dell'urto, ovvero l'altezza A alla quale vien sollevato questo punto G. Quando poi voglia usarsi la prima basterà aver determinato precedentemente il momento d'inerzia I del pendolo, e la sua lunghezza r; e dipoi si determinerà nell'atto dell'esperienza il valore di A, nè si commetterà errore ancorchè l'ampiezza dell'oscillazione sia grande, lo che accaderebbe facendo uso dell'altre formule. Per conoscere l'altezza A, o la corda C, si terminerà il pendolo con una punta, T e si porrà sotto a questa un arco XX' che contenga dell'argilla o altra materia molle su cui la punta possa lasciare nell'oscillazione un segno. Anche per dedurre il tempo t sarà utile terminare il pendolo alla parte superiore con

uno scappamento Y simile a quello che si usa nel pendolo dell' orologio.

218. *Della pressione confrontata coll' urto*. — Si abbia una molla tesa da un peso: essa disponesi con una certa determinata figura in equilibrio, e sostiene la pressione che il peso le produce. Sia questa molla urtata con un colpo di martello, cede, e si muove sotto l'urto mutando la sua figura. Ecco come la pressione ha luogo nell' equilibrio, e come l' urto cagiona sempre il moto: in quella vi è soltanto un' intensità d' una forza, e in questo vi è anche uno spazio percorso: in quella non si può come in questo parlare di forza viva e di lavoro meccanico. Contuttociò trovasi talvolta usato un peso che cade da una certa altezza per misurare una pressione, e viceversa con un peso fermo si trova misurato un urto. Queste misure in modo assoluto sono erronee, giacchè la pressione e l'urto son cose affatto distinte. Non vi è infatti pressione che non sia vinta dal più piccolo urto, perchè una forza motrice comunicata ad un corpo tenuto fisso da qualsivoglia pressione deve produrvi sempre un moto almeno per brevissimo tempo. Ma non sempre la pressione può considerarsi come forza equilibrata, e perciò mantiene talvolta i caratteri della forza comunicata per urto, cioè produce movimento nella resistenza. Allora una tal pressione produce i medesimi effetti dell' urto: allora non vi è altra differenza fra l' urto e la pressione che l' aversi in quello una celerità acquistata, ed in questa acquistarsi la celerità insensibilmente. Un peso collocato sopra una sostanza cedevole vi si affonda e la comprime, e nella sua discesa sviluppa una quantità di lavoro la quale può benissimo confrontarsi colla forza viva che perderebbe un corpo nel produrvi la medesima compressione. Se però quel corpo invece di essere stato riposato sopra alla sostanza cedevole senza celerità acquistata, vi si fosse lasciato cadere con urto avrebbe prodotto una compressione molto maggiore. Di qui l' immenso vantaggio che si ha da tutti gli strumenti che agiscono per urto nel vincere grandissime resistenze, e di quelli che agiscono con urto succeduto da pressione per comprimere i corpi. Tuttociò verrà ben dilucidato dalla seguente macchina.

219. *Della berta, e suo uso per battere i pali*. — La berta nella sua più semplice costruzione consiste in un pezzo di legno di figura rotonda, forato nel mezzo per esser tenuto in guida dalla candela del palo è guarnito di ferro, e per mezzo di adattate orecchiette di ferro si lega con corde. Alcune antenne formano come una piramide attorno al luogo ove si ha da battere nel terreno il palo, o pino: alla sommità di questa sono le carrucole per le quali passano le corde della berta, e tirate da alcuni individui la sollevano infilata nell'asse metallico che sorge verticalmente sulla testa del pino; e dipoi tutti ad un tratto lascian libere le corde, onde cade la berta con moto accelerato, incontra la testa del pino e l'urta, e lo fa affondare nel terreno. In questa operazione si scorge che interessa 1:° lasciar cadere lo strumento libero a se stesso il più che sia possibile, onde nell' urto la celerità sia massima, 2:° che l' urto sul pino tutto s' impieghi nel farlo affondare nel terreno, 3:° che dalla resistenza incontrata nell' affondamento del palo possa argomentarsi la

pressione che potrà esso permanentemente sostenere.

Nella berta capra (Tav. VII fig. 9) un verricello A mandato da ruote dentate B avvolta la corda che passa per la carrucola C e ritiene il montone D che è di ferro fuso, e lo porta a notabile altezza. Merita attenzione la tanaglia ab, perchè le due branche che si incrociano al mezzo nel loro impernamento rese più pesanti nella loro parte inferiore dal pezzo c entrano e si serrano nell' incavo dell'aggiunta piramidale che termina il montone. Pervenuto che è questo alla sommità della macchina la tanaglia vien pressata alla parte a dalla forma d che ha in alto il castello, e lascia libero il montone che cade sul pino E. Allora si abbassa di nuovo la tanaglia che riaggrappa da per se il montone, e si seguita l' operazione da uomini che stanno alle manovelle del verricello. Fatto il confronto tra il lavoro che un individuo produce colla berta semplice, e quello che si ha dal medesimo colla berta capra ottienesi il rapporto di 22 : 100, dal quale si può dedurre il grand' effetto di questo strumento.

L'essere la berta di ferro fuso permette di darli notabil peso, e di ottenere quell'urto secco che è necessario per l' affondamento dei pali. A quest'ultimo scopo la testa del pino deve esser guarnita da un cerchio di ferro, la superficie deve essere assai netta per tutta la lunghezza, e l' estremo ridotto a punta; perchè mancando l' armatura alla testa, questa si guasterebbe per l'urto, e le parti superiori urtate invece di trasmettere l'urto alle altre, distruggerebbero col loro acciaccamento buona porzione della forza viva; e lo stesso può dirsi delle altre preparazioni necessarie al palo. Alcuni sogliono anche seccare la punta al fuoco, e talvolta armarla con una puntazza o cono di ferro. Si usano berte che abbiano un peso considerabilmente più grande del pino, e il doppio o il triplo, perchè la perdita di forza viva non sia tanto considerabile (206).

Allorchè non si ha sensibile abbassamento, e si ode ripercuotere per rimbalzo due o tre volte la berta sulla testa del pino, è segno che questo è giunto alla roccia, o al terreno stabile, e si dice battuto al rifiuto. L'elasticità del terreno spesso risolleva dopo un certo tempo i pini, e si vince più facilmente a riprese, onde sarà utile tornare a batterli dopo un qualche riposo. Per un pino di $0^m,25$ in diametro, e lungo da 3 a 4^m, sugli ultimi colpi di una berta pesa 300, o 400^k, e lasciata andare dall'altezza di $1^m,30$, l'affondamento sia al più di 4 a 5 millimetri, allora secondo le esperienze del Perronet si può caricare la testa di quel pino fino a 25000^k senza temere affondamento nocivo alla stabilità della costruzione. Supponiamo che per l' ultima volata di 30 colpi si sia avuto un'affondamento di 5^{mm} e che la berta pesi 300 kil., il di lei lavoro sarà in questi 30 colpi $30 \times 300 \times 1,3 = 11700$, e nell' ipotesi della resistenza costante essa potrà dirsi eguale a

$$\frac{11700}{0,005} = 2340000^k$$

che è circa 94 volte quella che Perronet assegna come limite della carica, che si ha a dare ai pali. Da quest'esempio generalizzato deducesi il modo di calcolare la pressione di cui si hanno ad aggravare i pali. Ma avvertendo all'effetto della permanenza della pressione si comprenderà perchè si abbia a prendere anche la centesima parte del peso che assegna questa teoria in quei casi che vuolsi una stabilità monumentale.

CAPITOLO VIII.

Delle Macchine semplici.

220. *Generalità*. — Dicesi macchina un istrumento per mezzo del quale appoggiandosi ad alcuni punti fissi si trasmette l'effetto della potenza sopra la resistenza. Le macchine si distinguono in semplici e composte, e nelle semplici più facilmente si riconoscono le posizioni del punto fisso della potenza e della resistenza. Parlando noi delle macchine semplici le considereremo prima in equilibrio e poi in stato prossimo al moto, e in moto; cioè prima come strumenti che servono ad impedire l'effetto delle resistenze e quindi come destinati a dar moto a quelle stesse resistenze. Dobbiamo avvertire che qui usiamo il nome di resistenza per tutte le forze che devono essere vinte dall'azione della macchina.

Gli effetti delle macchine spesso si presentano come paradossi tali da eccitar meraviglia, e per non cadere in errore conviene fin d'ora riflettere che il lavoro della macchina non supera mai quello della potenza. Contuttociò vantaggi notabilissimi si hanno dalle macchine, perchè potrà in esse a piacere disporsi l'applicazione e la direzione della potenza, e si potranno render continui i suoi effetti. Così colui che vuol portare un gran peso di materiali, se non adopra macchine è costretto a repartirlo in più carichi e addossarsi un pezzo alla volta, ma se adopra una macchina potrà trasportarlo tutto in un tempo. Vero è che dovrà diminuire la celerità a proporzione che ha risparmiato dei viaggi che avrebbe fatti addossandosi a spalla, o in altro modo trasportando a poco alla volta il materiale, e dovrà vincere gli attriti e resistenze della macchina, ma non avrà l'incomodo di ridurre il corpo in parti, di porsi il carico in spalla, e del tornare indietro a riprendere il secondo carico dopo che ha portato il primo. Inoltre colla macchina dirigerà nel modo che più li torna comodo la sua forza. Devo qui aggiungere che potrà con una macchina usarsi quel motore che più piace, e non solo la forza dell'uomo come dovrebbe farsi senza macchina, ma anche quella di qualunque altro animale, e dei corpi pesanti e dell'acqua e del vento. Quando si tratta di tenere le macchine in equilibrio si ha anche un altro vantaggio, ed è quello di far sostenere al punto d'appoggio il peso, ed allora la potenza non ha altro uffizio che combinarsi con la resistenza, onde la resultante di ambedue passi per il punto d'appoggio. Avrem luogo di verificare queste cose parlando delle macchine semplici che si possono classare nell'ordine seguente: corde, leva, puleggia, argano, piano inclinato, cuneo, e vite.

Macchina funicolare o corde.

221. *Equilibrio di una corda, sua tensione, e lavoro prodotto sulla medesima*. — In questa prima macchina, detta comunemente funicolare, si racchiudono tutti gli usi che si fanno delle corde, o corpi flessibili per trasmettere l'effetto della potenza sovra la resistenza. Spesso la combinazione delle corde ci si rappresenta con un certo grado di complicanza.

Supporremo primieramente le corde non capaci di distendimento, e faremo anche il più delle volte astrazione dalla loro gravità. Il peso di esse è minimo in confronto delle forze che agiscono ai loro estremi. E l'ipotesi che esse non si allunghino è fondata su quello che accade nelle corde che sono già altra volta state sottoposte all'azione di una o più forze, perchè quando tornano a caricarsi si comportano come se fossero quasi rigide riprendendo l'allungamento che avevano quando altra volta si trovarono egualmente caricate.

Sia dunque una corda tirata ai suoi due estremi con forze qualsivoglia; immagineremo decomposte le forze ciascuna in due, l'una perpendicolare, e l'altra nella direzione della corda. E come non si suppone essa mobile perpendicolarmente alla sua direzione, è evidente che le componenti perpendicolari non producono effetto, e solo resteranno a considerarsi quelle che agiscono nella direzione della corda. Converrà per l'equilibrio, che questa corda sia continuamente tesa, e che in virtù del principio dell'azione eguale e contraria alla reazione, la somma delle componenti che agiscono secondo la direzione della corda ad un estremità, sia eguale, e contraria alla somma delle componenti che agiscono all'altro estremo. Sarà di più necessario che queste due forze esercitino la loro azione tirando in senso contrario sulla corda, perchè se esse spingessero contro quest'ultima ella si piegherebbe e non potrebbe trasmettere integralmente la loro azione reciproca. La tensione che soffre la corda in ciascun punto sarà data dall' intensitá d'una delle resultanti che agisce agli estremi. La tensione è la stessa in ciascun punto salvo il caso in cui la corda è tratta in direzione inclinata all'orizzonte, perchè oltre le forze dell'estremità vi é, per altra forza che fa variare la tensione da un punto ad un'altro, il peso della corda istessa, il quale nelle corde lunghissime non potrà sempre trascurarsi, e particolarmente nel caso che la corda oltre ad esser lunga stia in direzione verticale. Egualmente se le forze non sieno applicate soltanto agli estremi ma anche a dei punti intermedi la tensione non sarà eguale in tutti i tratti: alla fine di ciascun tratto si dovranno intendere applicate tutte le forze che sono da quel punto fino all'estremità della corda.

Il lavoro di queste resultanti dovendo essere lo stesso si conclude che la quantità del lavoro delle forse che agiscono ad un capo è uguale a quello delle forze che agiscono all'altro estremo. Finalmente il lavoro di queste resultanti è pure eguale a quello della tensione della corda in un punto qualunque; e per valutarlo serve moltiplicare questa tensione per il piccolo tragitto fatto da questo punto nella direzione di questa tensione o della corda. Che se ad una corda principale si uniscono più cordicelle, onde un pari numero di uomini tirino separatamente trasmettendo tutti il loro sforzo alla corda principale, sarebbe difficile valutare il lavoro parziale di ciascuno, perchè la direzione del suo sforzo varia in ogni istante. Ma vi è una tensione generale esercitata sulla corda principale, e la quantità del lavoro di questa tensione è precisamente eguale alla somma delle quantità del lavoro prodotto dagli uomini. Osserviamo che i loro sforzi si decompongono in sforzi normali e paralleli al canapo, i primi dei quali si

hanno da fare equilibrio tra loro, e distruggersi scambievolmente, e gli ultimi soli lavorano dando una tensione al canapo eguale alla loro somma. Gli sforzi normali sono dunque a pura perdita ed affaticano inutilmente gli uomini. Così per quanto tutta la quantità del lavoro degli uomini sia trasmessa al canapo la disposizione delle cordicelle inclinate è cagione di disperdimento di forza e tanto più quanto è più grande l'inclinazione fra loro. Per questa ragione in simili casi si usa di legare le cordicelle ad un cerchio comune, al quale sul centro rimane perpendicolare il canapo, cosicchè tutti i tratti delle cordicelle prendano direzioni parallele fra loro, e parallele al canapo.

222. *Equilibrio nelle corde che concorrono in un medesimo punto*. — Allorché si hanno più corde concorrenti tutte in tensione, conviene per l'equilibrio che la tensione di una sola sia eguale ed opposta alla resultante delle tensioni di tutte le altre. Prenderemo a considerare il caso di tre corde OS, OP, OR (Tav. VII fig. 10) che concorrono nel punto O. Per l'equilibrio con OR rappresentando la resistenza Q contraria ed eguale alla resultante della potenza P e dello sforzo S sofferto dal punto fisso, la intenderemo decomposta in due forze eguali e contrarie alle due indicate. Potremo dunque supporre che le forze P, S, e la Q siano applicate al punto O, e si determineranno le loro relazioni colla dottrina del parallelogrammo, cioè avremo Q : P : S :: *sen*SOP : *sen*SOQ : *sen*QOP. Quindi vedesi che 1:° il maggior vantaggio nella potenza si avrà quando il rapporto tra il seno dell'angolo SOQ e quello dell' altro SOP ha il minor valore, 2:° è la potenza

$$P = Q \frac{sen\ SOQ}{sen\ SOP}$$

3:° la potenza è minore della resistenza ogni qual volta il seno SOQ sia minore del seno SOP. 4.° Se i due tratti SO, OP di fune concorrono ad angolo, si avrà $Q < P + S$ e se sono paralleli $Q = P + S$, perciò la disposizione più vantaggiosa onde sia meno tesa la fune si avrà quando i suoi capi saranno in direzione parallela, 5:° I due tratti della fune non avranno eguale tensione se non sono egualmente inclinati alla direzione della resistenza perchè la tensione del capo SO stà a quella dell' altro capo OP come *sen* QOP : *sen* QOS; 6:° procureremo di ridurre il capo che stà attaccato al punto fisso in una direzione molto prossima a quella della resistenza ed allontaneremo da questa l'altro capo quando si vuole adoprare una piccola forza per tenere in equilibrio una gran resistenza: è chiaro che in questo caso il punto d'appoggio sostiene la maggior parte della resistenza. 7:° Precisamente la resultante della potenza e della resistenza è lo sforzo col quale viene sollecitato il punto S. 8:° Se in O rimane unito il tratto OQ per mezzo di una campanella (Tav. VII fig. 11) che scorra senza alcuna resistenza sulla fune SOP non può aversi equilibrio, che quando sono ridotte eguali le tensioni dei due capi della fune, ma in quel caso come abbiam detto di sopra dovendo esse eguali SOQ, QOP, avremo

$$P = Q \frac{sen\ {}^1/_2\ SOP}{sen\ SOP} = \frac{Q}{2 \cos {}^1/_2\ \widehat{PS}}$$

e la direzione della resistenza dividerà per metà l'angolo formato da due capi della fune.

La macchina funicolare col nodo fisso suole usarsi quando si tratta di dare ad una forza un punto d'appoggio in direzione differente da quel-

la che ci può essere data dal corpo solido sul quale si agisce.

Quando si tratta di sollevare con questa macchina dei pesi o di porre in moto la resistenza facendo fisso il nodo O, si ha l' incomodo che la resistenza non agisce sempre sulla medesima direzione, ed in oltre scemandosi un capo della fune mentre resta lo stesso l' altro, ben presto la disposizione della potenza diviene svantaggiosa. In questo caso della macchina in moto torna più conto o applicare due potenze ai due capi della fune, o usare una campanella di metallo nel punto O. Meglio è porvi una carrucola (Tav. VII fig. 12) come vedremo in seguito, ma in tutti questi casi interessa tenere a calcolo la flessibilità e scabrosità della fune, la quale può impedire che la campanella o carrucola scorra alla determinata posizione. Qui richiamo ciò che abbiamo detto della rigidezza delle funi, e l' esame delle tavole che rappresentano questa forza. E per la campanella occorrerà che si vinca l' attrito del quale parleremo nel paragrafo seguente, ed inoltre che si vinca la rigidezza della fune. Poniamo che sia r il raggio della sezione del filo metallico che compone la campanella, sarà

$$\frac{d^h}{2r}(H+H'P)$$

il valore di questa seconda resistenza (95). Per la puleggia chiamato R il suo raggio dovrebbe porsi questo in luogo di r, onde tal valore diverrebbe molto minore; ed inoltre in vece dell' attrito tra la campanella e la fune dovrà porsi l' attrito dell' asse della puleggia il quale è molto minore. In ambedue i casi la somma delle due rammentate resistenze nocive fa sì che la direzione della forza Q non divida per metà l' angolo dei due tratti di fune, e nella macchina in stato prossimo al moto, o in moto la direzione della resistenza si avvicini più a quella della potenza, onde ne viene in questa forza un' aumento, in modo che essa supererà la tensione dell' altro tratto di fune per la somma delle due notate resistenze nocive.

La macchina funicolare che abbiamo considerata è la più semplice e si rende più complicata allorquando crescono i capi della fune ed i punti nei quali essi concorrono, ma allora colla dottrina del poligono carico di pesi si posson ben conoscere le relazioni tra le potenze e le resistenze, supponendo che più potenze si adoprino per sostenere più pesi. Spesso si usano più potenze per sostenere un sol peso, e tutti i capi della fune non sono concorrenti in un medesimo punto ma sempre riman facile calcolare la potenza cogli accennati principj e con quelli del poligono carico di pesi (137).

225. *Attrito di una corda che scorre sovra un cilindro fisso.*— Sostenga la corda il peso Q (Tav. VII fig. 13) ad una sua estremità a mentre l' altra è tirata da una forza T che la strascina sul cilindro che ha per raggio oa=R. Dividiamo l' arco abbracciato in un numero di parti piccole ed eguali, e conduciamo per i punti di divisione delle tangenti. Gli archetti che chiameremo s potranno essere presi invece delle corde, si avranno così i triangoli isosceli abt, $tb't'$, e compite le lasanghe $abtm$, $tb't'm'$ ec., consideriamo la prima di queste. Si prenda ab come proporzionale a Q, questa medesima forza sarà la tensione che ha luogo da b in t, e la diagonale bm rappresenterà la pressione p esercitata sull' elemento at. I due triangoli mab, toa sono simi-

li e danno $mb : at :: ab : oa$, e perciò

$$p = mb = \frac{at}{oa}\, ab = \frac{s}{R}\, Q.$$

Ora la tensione della corda da t' a b' chiamata t sarà

$$= Q + fp = Q\left(1 + \frac{fs}{R}\right).$$

Così chiamato t' la tensione da t' a b'' si avrà

$$t' = t\left(1 + \frac{fs}{R}\right) = Q\left(1 + \frac{fs}{R}\right)^2$$

e lo stesso ripetendo per i successivi archetti, ed essendo n il loro numero, troveremo che nell' ultimo archetto la tensione nell'atto che la fune si muove sarà

$$T = Q\left(1 + \frac{f.s}{R}\right)^n$$

Vedesi adunque che per avere il rapporto tra la tensione T e il peso Q deve moltiplicarsi quest' ultimo per

$$\left(1 + \frac{fs}{R}\right)^n$$

ove s dovrebbe essere infinitamente piccolo, e perciò n infinitamente grande, ma in pratica si può prendere s anche eguale ad una quantità finita e piccola.

Nel precedente paragrafo, ove abbiam supposto che una campanella deva strisciare sulla fune l' arco abbracciato dalla fune sarà tutt' al più la metà della circonferenza cioè πr, onde tenuto conto dell' attrito della fune, la potenza diventerà

$$P\left(1 + \frac{f\pi}{n}\right)^n$$

Supponiamo per secondo esempio che una corda sia cinta tre volte attorno ad un cilindro che ha per raggio $0,^m1$. L' arco avviluppato sarà $3.2\pi.\ R = 3 \times 2 \times {}^{22}/_7 \times 0,1 = 1^m,9$ circa. Il coefficente d' attrito d' una corda sovra il legno o altra sostanza è circa $^1/_3$. Ora fatto $s = 0,^m01$ abbiamo

$$1 + \frac{fs}{R} = 1 + {}^1/_3 = {}^4/_3$$

e siccome allora sarà

$$n = \frac{3.2\pi R}{s} = \frac{1,^m9}{0,01} = 190$$

e per conseguenza

$$\frac{T}{Q} = (1,03)^{190} = 268$$

cioè la forza necessaria a fare scorrere la fune dovrà essere 268 volte più grande del peso Q. Dunque per tenere in equilibrio una forza T per mezzo di una fune avvolta per 3 giri ad un cilindro servirà una potenza 268 più piccola. Il qual resultato serve a spiegare molti processi di pratica ove per sostenere degli sforzi grandi si usa di avvolgere poche volte la fune ad un cilindro, e fare infine un nodo o un cappio, o passare l' ultima avvoltatura sull' altre avendosi in tutti questi modi la piccola potenza necessaria.

Della Leva.

224. *Diversi generi di Leva.* — Col nome di leva o vette s' intende una verga rigida retta o curva, la quale posata sopra di un punto d' appoggio ha in una sua parte applicata la potenza, ed in altra la resistenza. Il punto d' appoggio è detto ipomoclio o asse secondo che essa posa sopra la costola di un solido ovvero è infilata da un asse. La leva dicesi di primo genere allorchè (Tav. VIII fig. 1) il punto d' appoggio C rimane tra la potenza P e la resistenza Q; è di secondo genere (Tav. VIII fig. 2) quando la resistenza Q rimane fra la potenza P e il punto d' appoggio; e dicesi di terzo genere allorchè la potenza P è tra la resistenza Q e il punto d'appoggio C (Tav. VIII fig. 3). Quando la verga che fa da leva è piegata dicesi che la leva è falcata, ed in questo caso ben si conosca che anche se il punto d' appoggio

sia tra la potenza e la resistenza, si potrà avere la leva di primo genere con una disposizione analoga a quella del secondo (Tav. VIII fig. 4) o quella di terzo (Tav. VIII fig. 5), oppure quando i bracci di leva sono eguali (Tav. VIII fig. 6) si avrà una disposizione che somiglia molto quella del secondo e del terzo genere. Io fo osservare queste disposizioni per avvertire come facilmente un genere di leva si trasforma in un altro.

In tutti questi generi di leva si ravvisa sempre un sistema girevole intorno ad un asse onde una sola teoria potrà servire per tutti.

225. *Teoria generale per l' equilibrio astratto*. — Se la leva non può girare che in un piano che possa per l' ipomoclio C conviene che la potenza P e la resistenza Q agiscano in questo stesso piano, altrimenti produrrebbero delle pressioni contro l'asse e si potrebbe determinare qual loro porzione agisce sulla leva decomponendo ciascuna in due forze, una normale al piano di movimento, l'altra giacente in quel piano, e la prima componente tutta si distruggerebbe producendo una pressione sull' asse, la seconda tenderebbe a mettere in moto la leva. È anche necessario che la potenza e la resistenza siano applicate in direzione normale alla linea che unisce il lor punto d' applicazione all' ipomoclio altrimenti una porzione di esse si distruggerebbe, producendo pressione contro l' asse. Si potrà determinare quella porzione decomponendo come sopra le forze ciascuna in due, una normale alla detta linea e l' altra parallela, e la sola componente normale produrrebbe il moto nella leva, e l'altra darebbe solo una pressione contro l' asse. Comunque poi sien dirette le due forze P, Q converrà affinchè si abbia equilibrio che la resultante loro passi per l' ipomoclio C e tanto se le forze non sono parallele (Tav. VIII fig. 7) come se lo sono (Tav. VIII fig. 1. 2. 3). Nel primo caso potrebbe anche essere che non concorressero nel medesimo punto quando non giacciono nel piano del movimento della leva, ma sempre dovranno concorrere in uno stesso punto dopo che avremo fatta la decomposizione che abbiamo di sopra accennata. Quindi per la dottrina dei momenti, intendendoli riferiti all' ipomoclio dovrà il momento della resultante essere zero, e però il momento della potenza P, dovrà essere eguale al momento della resistenza Q, e trovate le distanze CA, CB delle loro direzioni dall' ipomoclio, dovremo avere nell' equilibrio $P.CA = Q.CB$.

D' ordinario hanno la potenza e la resistenza direzioni parallele, ed in questo caso ancorchè (Tav. VIII fig. 8) non rimangan le forze normali alla leva AB si avrà $P : Q :: CB : CA$ infatti condotta $A'B'$ normale alla direzione delle forze avremo $CB : CA :: CB' : CA'$ ma $P : Q :: CB' : CA'$. Dunque la potenza stà alla resistenza in ragione inversa dei respettivi bracci di leva. Chiamati a, b i bracci della potenza P e della resistenza Q, avremo per l'equilibrio della leva $Pa = Qb$.

A completare la teoria della leva converrebbe parlare di più forze che possono essere applicate ad un medesimo braccio, ma ciò riman ben chiaro dietro quanto abbiam detto sulla composizione delle forze (100, e seg.) sovra i momenti delle componenti e della resultante (113, e seg.), e sull' equilibrio pel moto rotatorio in un sistema invariabile (128).

226. *Osservazioni*. — Di qui vedesi nell' ipotesi che le forze sieno

normali ai respettivi bracci di leva, e giacciano nel piano di rotazione: la potenza sarà minore della resistenza ogni qual volta il suo braccio sia maggiore di quello della resistenza. Perciò una leva di primo genere nella quale sia lunghissimo il braccio della potenza, e molto corto quello della resistenza servirà a tenere in equilibrio con piccolissima potenza una grandissima resistenza. Così si spiega il grande sforzo che si può fare col palo di ferro allorquando si punta tra due pezzi murati per smuoverli; ed il vantaggio che ha colui che vuol tagliare con le forbici una lastra di metallo allungando il manico di esse ed accorciando la parte tagliente, essendo le due parti delle forbici leve di primo genere. E lo stesso si dica delle pinsette o altri simili istrumenti nei quali si fa molto lungo il manico ogni qual volta sono destinati a produrre un gran sforzo, ed all'incontro si fa corto quando lo sforzo deve essere piccolo e si vuol piuttosto celerità nell'azione che lo strumento produce.

Con una leva di secondo genere dovrà la potenza essere sempre nella detta ipotesi minore della resistenza, e ne abbiamo esempj nei remi delle barche, nella coltella dei fornai ec.

Ritenendo la stessa ipotesi potrà dirsi che le leve di terzo genere equilibrate han la potenza maggiore della resistenza, ed in queste si ha svantaggio se pure non torna conto di ottenere una gran celerità di azione a scapito di forza, così vedesi essere nei pedali degli organi e quasi sempre nelle ossa degli animali. Anche le molle da camminetto e alcune pinsette che hanno costruzione analoga a quelle sono leve di terzo genere; così pure la penna, il pennello ec.

Quando le forze sono parallele come ora abbiamo supposto, nella leva di primo genere l'ipomoclio sostiene la somma di esse e nelle leve degli altri due generi soltanto la differenza perchè la potenza è diretta in senso contrario alla resistenza.

227. *Effetto del peso della leva.*— Dobbiamo qui considerare l'effetto del peso della leva il quale sarà nullo ogni qual volta il centro di gravità suo corrisponderà coll'ipomoclio, e quando non corrispondono questi due punti si renderà sensibile con un momento eguale al prodotto del peso nella distanza del centro di gravità della leva dall'ipomoclio. Questo momento sarà favorevole alla potenza se tende ad aggirare la leva nella stessa direzione con essa, e le sarà contrario se tende ad aggirarla in senso opposto: quindi chiamando p il peso della leva e d la detta distanza, potremo con $\pm p.d$ rappresentare il suo momento, e l'equazione precedente si ridurrà $Pa = Qb \pm pd$. E l'ipomoclio sostiene l'effetto delle tre forze P, Q, p; e converrà che questo come anche la leva offrano resistenza sufficiente per non cedere per l'effetto di queste forze, e per tal calcolo rimandiamo al Capitolo II. Quando la leva è una verga retta ed appartiene al primo genere siccome il braccio della potenza suol essere maggiore del braccio della resistenza, e si suol dirigere in basso tanto la potenza quanto la resistenza, il momento del peso in questo caso è favorevole alla potenza e farà sì che minor potenza serva a tenere in equilibrio una resistenza maggiore. Nella leva di secondo e terzo genere la potenza essendo volta in alto e la resistenza in basso si ha il peso a danno della potenza. Onde si scorge che nell'allungare tal leva di secondo genere fino ad un certo

limite si farà vantaggio alla potenza, e oltre a quello se ne avrà danno per l'effetto del peso.

Ritenute le precedenti ipotesi, sia a la lunghezza della leva di secondo genere, o il braccio della potenza, e b quello della resistenza, p' il peso della leva per la lunghezza uno, avremo $p = p' a, d = {}^1/_2 a$, e l'equazione della leva sarà $Pa = Qb + {}^1/_2 p' a^2$. Onde affinchè riesca un minimo il valor di P con i soliti metodi che c' insegna il calcolo differenziale, avremo

$$a = \sqrt{\frac{2\,Qb}{p'}}$$

228. *Effetto dell' attrito del perno nella leva*. — Nelle macchine tutte, non che per la leva, si ha lo stato prossimo al moto quando la potenza tiene precisamente ferma la resistenza, o è per porla in movimento. Nel primo caso ha a suo vantaggio le resistenze passive, e nel secondo le ha a suo carico. La leva conta tra queste resistenze l'attrito del perno, e chiamando N la pressione che la potenza e la resistenza producono sul pernio, la quale prossimamente corrisponde alla loro resultante sarà fN l'attrito, e chiamando r il raggio del pernio, il momento col quale agisce l'attrito, e che è da sottrarsi o da aggiungersi a quello della potenza sarà frN. Onde l'equazione dello stato prossimo al moto potremo dire essere $Pa \pm f r N = Qb$. Per valutare con maggiore esattezza il valore dell'attrito del perno, come anche quando questo fosse un cardine che girasse sul dado sottoposto potranno consultarsi i due successivi paragrafi.

E qui dobbiamo aggiungere che moltiplicando tutti i termini per l'arco s, che descriverebbe in un certo tempo un punto della leva distante dal perno dell' unità quando la potenza pone in moto la resistenza, abbiamo $P a s = Q b s + f N r s$, ma as, bs, rs sono gli spazj che in quel tempo vengon percorsi dal punto d'applicazione della potenza, della resistenza e dell' attrito: Dunque il lavoro della potenza è eguale al lavoro della resistenza aumentato di quello dell'attrito. Cioè comunque vantaggiosa sia la leva sempre il lavoro della potenza supererà quello della resistenza.

229. *Attrito de' pernj*. — Abbiamo preso N per la resultante della potenza e della resistenza nella loro situazione d'equilibrio perchè dovendoci per f servire dei valorí che si hanno nell' attrito di terza specie sono quelli sempre determinati in questo concetto. Per altro quando prendasi f dai valori dell' attrito di prima specie converrà avvertire che mentre un cilindro M è fatto girare monta nella sua canna finchè (Tav. VIII fig. 9) non si è disposto sù tale elemento che abbia l'inclinazione dell' angolo limite dell' attrito. Per quell' elemento e non per l' altro di mezzo passerà la resultante $N = dm$ delle forze, e decomponendola in due, una parallela da, ed in una am normale all' elemento, dovremo avere $da = f.am$,
e poichè dm è N, avremo

$$N^2 = \overline{am}^2 + \overline{da}^2 = \overline{am}^2\,(1 + f^2)$$

cioè

$$f.am = \frac{Nf}{\sqrt{(1+f^2)}}$$

Dunque l'attrito che proviene dalla pressione contro l'asse eguaglia quello che proviene dalla resultante diviso per la quantità $\sqrt{(1 + f^2)}$; ma siccome quando è $f < {}^1/_5$ si può dire che questa quantità differisce minimamente dall'unità, perciò in tal caso, che è il più frequente, possiam prendere la resultante invece della forza di pressione, ancorchè si

faccia uso dei valori del coefficiente d'attrito di prima specie.

230. *Attrito di un cardine contro il suo dado*. — In questo caso l'attrito che è di prima specie agisce ne' diversi punti con differente braccio di leva, e convien determinare il braccio di leva medio. Sia A l'area del circolo che forma la base del cardine, e che io suppongo piano e orizzontale, ed a ne rappresenti un' elemento. Chiamata N la pressione totale tra il cardine e il dado sottoposto sarà

$$fN\frac{a}{A}$$

l'attrito elementare che deve intendersi agire nella stessa direzione sù tutte le particelle superficiarie. Per conseguenza considerando un settore S elementare del circolo, e potendosi questo avere per un triangolo, la dottrina del centro di gravità c'insegna che il punto d'applicazione della resultante

$$f\frac{NS}{A}$$

è ai due terzi del raggio R, e perciò il momento d'attrito sovra un settore sarà $\frac{2}{3}Rf\frac{NS}{A}$

Ma lo stesso si può ripetere per tutti i settori, e la loro somma forma l'area A del circolo; dunque il momento d'attrito tra il cardine e il suo dado sarà $\frac{2}{3}RfN$, e il braccio medio di leva sarà $\frac{2}{3}R$.

Accade spesso che l'estremità d'un asse invece di fregare per tutto un cerchio freghi per un'anello i di cui raggi interno ed esterno indicheremo con R', R. La superficie di fregamento sarà $A = \pi R^2 - \pi R'^2$, ed il momento dell'attrito nel settore S elementare di raggio R si esprimerà con $\frac{2}{3}Rf\frac{NS}{\pi(R^2-R'^2)}$

e per un settore S' di raggio R' con

$$\frac{2}{3}R'f\frac{NS'}{\pi(R^2-R'^2)}$$

onde per la differenza dei due settori, cioè per l'elemento dell'anello con

$$\frac{fN}{\pi(R^2-R'^2)}\left(\frac{2}{3}RS-\frac{2}{3}R'S'\right)$$

e per la somma di questi elementi dovendosi porre la somma dei settori o i circoli, avremo il momento d'attrito

$$fN\frac{\frac{2}{3}R^3-\frac{2}{3}R'^3}{R^2-R'^2}$$

esprimendo la frazione il braccio medio di leva. Questo si trova

$$r+\frac{l^2}{12r}$$

indicando con r il raggio medio dell'anello, e con l la larghezza del medesimo; dalla quale espressione si scorge che quando l'anello è molto stretto poco ci allontaneremo dal vero se prendiamo per braccio medio di leva il raggio medio dell'anello.

231. *Della leva in moto*. — La leva non è destinata ad un moto di rotazione continuo ma deve ordinariamente sollevare grandi pesi a piccolissime altezze per ciascuna azione che vi si produce: quindi per ottenere quest' intento, talvolta si fa agire un palo, ora da leva di primo, ora di secondo genere (Tav. VIII fig. 10). L'appoggiare soltanto la leva sopra un corpo solido B particolarmente se questo sia fatto a canto acuto, è per quest' uso la miglior disposizione perchè quando s'infila in un asse il lavoro $fNrs$ diviene così grande quando si tratta di grandi forze, che assorbe una considerabil parte del lavoro della potenza, all'incontro usando il canto acuto può questo lavoro trascurarsi; e però il lavoro della potenza rimane eguale a quello della resistenza: massimo vantaggio che possa ottenersi da una

macchina. Per farsi un' idea del tempo necessario a sollevare con una leva un gran peso per una certa altezza supponiamo che il peso sia di 1000000 kil., e che si voglia inalzare $1^{m},20$. La quantità del lavoro che dovrà fare la potenza sarà

$1^{m},20 \times 1000000^{k}$, ovvero 1200000^{k}.

Se valutiamo lo sforzo di un' uomo eguale 75 kil., che è questo il peso del suo corpo, il cammino di quest' uomo dovrà descrivere all' estremità della sua leva

$$\frac{1200000 \text{ kil. m.}}{75 \text{ kil.}} = 16000.^{m}$$

Se solamente ogni quattro secondi facesse movere di $0^{m},20$ il punto della leva ove applica la sua azione immediata abbisognerebbe per 16000^{m} un tempo eguale a

$$\frac{16000^{m} \times 4''}{0^{m},20} = 320000'' = 89 \text{ ore} = 9 \text{ gior.}$$

presso a poco supponendo che l'operajo lavori 10 ore per giorno, e perciò quest' uomo da per se solo non potrebbe eseguire il lavoro perchè nella leva si suppone l' operazione continuata fino alla fine. Quindi noi comprendiamo che quello che si acquista in forza si perde in celerità, e che le leve sono sommamente utili per sforzi momentanei, o per sollevare i pesi a piccolissime altezze, come quando si tratta di smurare una pietra.

Si usano le leve anche nella trasmissione dei moti cioè quando col mezzo di corde si vuole che un moto dalla direzione AP (Tav. VIII fig. 6) sia trasmesso nella direzione BQ. Quando non debbano trasmettersi che piccoli movimenti, siccome il punto A passerà in a e B in b per archi piccolissimi, potrà dirsi che la cordicella AP e l'altra BQ non hanno variato quasi di direzione. Tale è il sistema, che si usa per i campanelli nei quartieri, ed anche nelle grandi macchine si adopra un simil meccanismo per trasmettere i moti alternativi, e noi lo vedremo in seguito.

232. *Combinazioni di leve*. — Anzichè aumentare il braccio della potenza giova spesso combinare più leve insieme, perchè allungando moltissimo la spranga che si adopra come leva si fa risentir troppo la sua flessibilità. Sia una resistenza Q tenuta in equilibrio da una potenza P per mezzo di tre leve di primo genere AB, A'B', A"B"; si scorge facilmente che una leva agendo sull' altra, la resistenza di una serve da potenza nell' altra. Chiameremo X la forza che la prima fa sulla seconda, ed Y quella che la seconda fa sulla terza, ed avremo per l' equilibrio

$$P.CA = Y.CB$$
$$Y.C'A' = X.C'B'$$
$$X.C''A'' = Q.C''B''$$

Onde moltiplicando membro a membro fra loro queste equazioni, ed eliminati i fattori eguali dei due membri abbiamo

$$P.CA.C'A'.C''B'' = Q.CB.C'B'.C''B''$$

Vale a dire nelle combinazioni delle leve la potenza starà alla resistenza, come il prodotto dei bracci della resistenza, sta al prodotto dei bracci della potenza. Per brevità indicheremo con a, a', a'' ... i bracci della potenza, e con b, b', b''... quelle dalla resistenza e sarà nell' equilibrio

$$P.a.a'.a'' ... = Q.b.b'.b'' ...$$

Nulla aggiungerò per l' effetto del peso delle leve, e per l' effetto dell' attrito de' pernj, poichè ben si comprende dietro quello che ho detto di una sola leva cosa dovrebbe aggiungersi a questa equazione per aver riguardo a tali forze, e per dedurre la equazione dello stato prossimo al moto.

Quindi è manifesto che con picco-

lissima potenza potrà tenersi in equilibrio una resistenza grandissima. Infatti se i bracci che rimangono dalla parte della potenza si suppongano dieci volte più lunghi di quelli che sono dalla parte della resistenza, avremo P. 10. 10. 10=Q. 1. 1. 1 cioè P 1000=Q ossia

$$P = \frac{Q}{1000}$$

vale a dire che sarà la potenza 1000 volte più piccola della resistenza.

Siano s, s', s'' gli archetti che in un certo tempo vengon descritti dai punti che rimangono all' unità di distanza dal perno nelle leve AB, A'B', A''B''. Saranno as, bs; $a's'$, $b's'$; $a''s''$, $b''s''$ gli archetti che descrivono gli estremi delle tre leve; ed il lavoro della potenza essendo $P.as$, sarà $Q.b''s''$ quello della resistenza. Ora avvertendo che il principio della seconda leva deve muoversi quanto l' estremo della prima, ed egualmente il principio della terza deve muoversi quanto l' estremo della seconda, avremo $bs = a's'$, $b's' = a''s''$, e per conseguenza

$$s'' = \frac{b's'}{a''} = \frac{bb's}{a'a''}$$

Dunque il lavoro della resistenza diviene

$$Q \frac{bb'b''s}{a'a''}$$

e per la notata equazione d' equilibrio scorgesi eguale a quello della potenza. Questo teorema (seguitando a fare astrazione dagli attriti, come abbiam qui fatto) si verifica non solo per la leva semplice ma anche per le sue combinazioni, e egualmente per tutte le macchine. Dal medesimo si deduce il noto (*Int.* 197) principio, che nelle macchine in movimento nella loro disposizione più favorevole *si perde in velocità quello che si acquista in potenza*; quando poi si consideri l' attrito si perde in velocità assai più di quello che si è acquistato in potenza.

233. *Applicazione al ponte levatojo.* — Tra le applicazioni delle leve possono rammentarsi le dottrine sulle bilance e sulle stadere delle quali parliamo in appresso: qui diremo del ponte levatojo che ci rappresenta una combinazione di leve. In esso (Tav. VIII fig. 12) si uniscono due leve uno di primo e l'altra di secondo genere. AB è il tavolato del ponte mobile attorno al fulcro A, e la sua estremità B è congiunta per mezzo della catena BC coll'estremo C della KDC mobile attorno al fulcro D. Sebbene le due leve AB, KC non agiscano immediatamente l' una sull' altra, le condizioni dell' equilibrio si avranno per la proporzione sopra accennata (232), purchè nel determinare le forze si abbia riguardo al peso ed alla tensione della catena BC. A a tale oggetto chiamiamo X la tensione della catena, e 2R sia il suo peso supponendo non solo la catena di uniforme peso in tutte le sue parti, ma anche il tavolato, e ciascuno dei due bracci DK, CD della leva CK. È chiaro che il punto B si potrà considerare gravato di mezzo il peso della catena con più mezzo il peso del tavolato che chiamo 2T, cioè R + T il punto C dell' altra metà del peso della catena con più la metà del peso del braccio DC della leva che rappresento con 2Q, e però di R + Q: finalmente il punto K sarà aggravato della sola metà P del peso del braccio KD della leva che chiamo 2P.

Si conducano le perpendicolari AG, DF sulla BC e le orizzontali AH, LO, e le verticali BH, CO, KL avremo per la leva AB l' equazione $(T + R)\,AH = X.AG$ e per l' altra leva KC dovrà essere $P.DL = (Q + R)\,DO + X.DF$. Dalle quali equaz. eliminando X si avrà $P.DL.AG = (Q+R)DO.AG + (T+R)AH.DF$

equazione che determina l'equilibrio del ponte levatojo. Se il quadrilatero ABCD è parallelogrammo avremo $P.DL = (Q + 2R + T).AB$.

Allorquando la catena BC si incurva per il proprio peso segue qualche divario perchè il suo peso non si reparte come abbiamo supposto, ma ciò può portare poca differenza come anche quando il tavolato non è omogeneo e non lo sono i bracci della leva CK, il reparto dei loro pesi non dovrà farsi precisamente come si è supposto, ma è facile lo scorgere come potrà dirigersi il calcolo. Se poi il parallelogrammo ABCD avrà la catena CB verticale il peso di questa dovrà intendersi tutto applicato al punto C, e ciò non varierà il resultato.

Della Bilancia e della Stadera.

234. *Bilancia.* — Qualunque sia la forma che presenta lo strumento essenzialmente si compone di un giogo AB (Tav. VIII fig. 13) sospeso pel punto di mezzo C, ed unito nelle estremità a due piattelli C,D. Noi dobbiamo osservare che hanno da essere adempite le seguenti condizioni. 1.° che il giogo rimanga orizzontale, in perfetto equilibrio quando i piatti sono scarichi, per il che sarà opportuno che il centro di gravità della macchina si trovi nella stessa verticale col punto di sospensione, e che chiamati M, N i momenti delle due parti della bilancia si abbia $M = N$, 2.° Che il giogo rimanga in equilibrio ed orizzontale anche quando siéno tolti i piattelli, e che le sue braccia sieno di egual lunghezza, cioè sia $CA = CB$. 3.° Che il peso della bilancia non sia molto grande quando essa è destinata a pesare corpi piccolissimi giacchè non essendo mai possibile distruggere tutte l'attrito può quando la bilancia è pesante anche in una buona costruzione aversi un'attrito superiore alla minima differenza dei pesi posti sui piattelli; e perchè anche quando questa differenza decidesse un movimento nella bilancia questo sarebbe sì piccolo da rendersi inapprezzabile. 4.° Conviene che per ogni disuguaglianza dei due pesi il giogo s' inclini lentamente e si fermi in una situazione obliqua all' orizzonte senza però che del tutto trabocchi. 5.° Bisogna che se il giogo viene casualmente ad inclinarsi quando i pesi sono eguali non si fermi in quella situazione inclinata e non trabocchi, ma lentamente ritorni alla situazione orizzontale. 6.° Si deve avere un qualche meccanismo che mostri anche le piccole inclinazioni del giogo, e la sua situazione orizzontale.

Se il braccio CB non fosse eguale all'altro CA si dice che la bilancia è falsa, ed allora non si può conoscere immediatamente il vero peso che cercasi, poichè il piatto corrispondente al braccio più lungo fà equilibrio al contrappeso con minor carico compensandosi la minor quantità del carico colla sua maggior distanza dall' ipomoclio. Per scuoprire questo difetto basta porre il peso nel piattello ove era la mercanzia e viceversa, e allora sarà turbato l'equilibrio, e si vedrà andare in basso quella parte che ha il braccio più lungo. Per altro anche da una bilancia falsa può rilevarsi il vero peso di un corpo con i due seguenti metodi. Si porrà nel primo piatto il corpo Q da pesarsi, e nell' altro il contrappeso P che li fà equilibrio: quindi si muterà dal primo nel secondo piatto il corpo Q, e si porrà

nel primo il contrappeso P′ conveniente per farli equilibrio, e la radice quadrata del prodotto $P \times P'$ sarà il giusto peso del corpo Q. Infatti nel primo equilibrio si aveva $P.CA = Q.CB$, e nel secondo $P'.CB = Q.CA$ onde moltiplicando termine a termine, e togliendo i fattori eguali si ha $P \times P' = Q^2$. L'altro metodo consiste nel collocare la merce o corpo da pesarsi in un piattello e nell' altro fare equilibrio con un peso, e poi togliere il corpo dal primo piattello e sostituirvi in sua vece un marco conveniente per ristabilire l'equilibrio, il quale indicherà il vero peso del corpo, giacchè tanto esso quanto il corpo hanno fatto equilibrio al medesimo contrappeso: questo è il metodo che vien detto delle doppie pesate, e che suole sempre usarsi quando scrupolosamente interessa assicurarsi dell'esattezza del peso.

L'adempimento delle condizioni 4. e 5. dipende soprattutto dalla forma del giogo, la quale fissa la situazione respettiva dei tre punti O, C, G, (Tav. VIII fig. 14). O è il centro del moto, G è il centro di gravità del giogo della bilancia, C è il punto dove l' orizzontale AB che unisce i punti di sospensione dei due piatti incontra la verticale OG. Sia in equilibrio la bilancia avendo in un piattello il peso P, e nell'altro la merce Q. Rompendosi l'equilibrio per l' aggiunta di un piccolo peso p all'altro P, il giogo passerà nella situazione aOb, e chiamando P′ il peso del giogo, per esso sia impedita un' inclinazione maggiore, e debba fermarsi il giogo in quella posizione, avremo

$$Q.\,ah + P'.gi = (P+p)\,bk.$$

Ora osservando che $Q = P$, e che possiamo rappresentare con α gli angoli AOC, BOC eguali, come pure gli altri angoli AOa, BOb, GOg eguali possiamo rappresentare con β avremo

$$ah = AO\, sen\,(\alpha+\beta) = AO\, sen\,\alpha\, cos\,\beta + AO\, sen\,\beta\, cos\,\alpha = AC\, cos\,\beta + OC\, sen\,\beta$$

$$bk = AO\, sen\,(\alpha-\beta) = AO\, sen\,\alpha\, cos\,\beta - AO\, sen\,\beta\, cos\,\alpha = AC\, cos\,\beta - OC\, sen\,\beta$$

$$gi = OG\, sen\,\beta$$

e fatta la sostituzione di questi valori nella precedente equazione si ha

$$P.AC\, cos\,\beta + P.OC\, sen\,\beta + P'.OG\, sen\,\beta = P.AC\, cos\,\beta - P.OC\, sen\,\beta + p.AC\, cos\,\beta - p.OC\, sen\,\beta$$

e quindi

$$2P.OC\, sen\,\beta + P'.OG\, sen\,\beta + p.OC\, sen\,\beta = p.AC.\, cos\,\beta$$

ovvero

$$\frac{sen\,\beta}{cos.\,\beta} = tang\,\beta = \frac{p.AC}{(2P+p)OC + P'.OG}$$

E questa è l'equazione che determina l'inclinazione alla quale si fermerà il giogo della bilancia, e che ci fa conoscere 1.° che sarà la bilancia tanto più mobile quanto più lunghe saranno le sue braccia, e quanto più vicini tra loro rimarranno i tre punti O, C, G, e quanto meno sarà carica e pesante la bilancia stessa, come sopra avevamo avvertito. 2.° Che se fosse $OC = o$ verrebbe

$$tang\,\beta = \frac{p.AC}{P'.OG}$$

ed allora l'agilità della bilancia è la stessa qualunque sia il carico, non tenendo però conto dell'attrito. 3.° Se fosse $OC = o$, e $CG = o$, cioè i tre punti O, C, G coincidessero sarebbe $tang\,\beta$ infinita, ed allora per ogni menomo disequilibrio il giogo della bilancia traboccherebbe d'un quarto di cerchio e si farebbe verticale; che se OC e CG fossero negative $tang.\beta$ sarebbe negativa e il giogo traboccando trascorrerebbe oltre il quarto di cerchio; ed in tutti questi casi si avrebbe difetto nella bilancia.

Per la 5. delle rammentate condizioni conviene ricercare la forza colla quale il giogo tende a rimettersi in equilibrio e chiamato I il momen-

to d' inerzia della bilancia carica preso relativamente all' asse del moto in modo che le masse dei due pesi P, R si intendano concentrate nei punti A, B; la celerità angolare colla quale il giogo tenderà a rotare nel senso $aAbB$ per rimettersi nella situazione d' equilibrio sarà il momento della forza diviso pel momento d' inerzia cioè

$$= \frac{P.ah - P.bk + P'.gi}{I}$$

e sostituendo i valori sopra trovati per ah, bk, gi, avremo

$$= \frac{sen\ \beta}{I} (2P.OC + P'.OG)$$

$$= \frac{sen\ \beta}{I} (P''.OC + P'CG)$$

essendo $P'' = 2P + P'$ cioè tutto il carico. Da questa formula rileviamo che se $OC = CG = o$ la forza restituente è nulla, ed allora la bilancia si dice *pigra*, anzi si arresta del tutto, essendo l' ago indifferente a fermarsi in qualunqne situazione. Che se OC e CG fossero negative la forza restituente è negativa, allora la bilancia è *folle* giacchè per ogni minima inclinazione del giogo invece di rimettersi nella situazione d' equilibrio se ne allontana e trabocca. Se coincidono i punti O e C soltanto si avrà una forza restituente proporzionale alla distanza tra questi e il terzo punto G, ed il carico della bilancia non fa che aumentare il momento d' inerzia, e scemare perciò la forza restituente. Quindi allorchè si costruisce una bilancia per conoscere se il centro di gravità del giogo sia collocato troppo vicino o troppo lontano dal punto d'appoggio O, bisogna contare durante un dato tempo le oscillazioni del giogo stesso. Se sono estremamente lente e difficili a prodursi, il centro di gravità sarà troppo prossimo, e farà d' uopo allontanarlo dal punto d'appoggio. Per alzarlo ed abbassarlo converrà togliere o aggiungere della materia alla parte inferiore del giogo. Questo deve riguardarsi in una parola come un pendolo composto, e tutto quello che altrove abbiamo detto del pendolo può ripetersi ora per le rammentate oscillazioni.

La sesta condizione si vedrà come viene adempita dalla seguente

235. *Descrizione della bilancia.*— Il giogo della bilancia (Tav. VIII fig. 13) è di acciaio (meno che in quelle di mezzana grandezza suol farsi d'ottone intagliato) sottile in larghezza, ed assai alto perchè non si fletta, ben simmetrico ed omogeneo sù ambedue le parti. Per pernio suol porsi in C un piccol prisma triangolare di acciaio ben temperato con un'angolo volto in basso, il qual suol chiamarsi coltello. Simili coltelli si usano nelle bilancie in tutti gli imperniamenti come negli attacchi dei piattelli per evitare gli attriti, e perché sia ben determinato l' asse di rotazione. In M si vede la forma di un gancio d' attacco de'piattelli, l'estremità del giogo, e il coltello d' acciaio, incavato ove riposa il gancio. I piattelli invece di esser solo in C, D sono qualche volta anche in c, d per quei casi nei quali occorre di tener separate alcune sostanze che hanno da formare un sol peso. Il coltello che è in C quando la bilancia è in azione riposa sopra pezzi d' acciaio ben piani e puliti, o sopra lastre di agata incastrate nella sommità della colonna: quando è d'essa fuori d'azione riman distante da queste lastre, e allora riposa il giogo sù due pezzi V, V' che stanno in piano orizzontale. Per porla in azione con una leva E si abbassa un' asta metallica che sta lungo l' asse della colonna la qua-

le porta l'arco d'ottone FG in basso e lascia il giogo libero sul coltello, e così tutta la bilancia, che può oscillare liberamente tra i due pezzi V,V'. Rimanendo il giogo in situazione orizzontale un lungo e sottile ago CI che parte di sopra al coltello e giunge fino al piede della colonna marca il zero di una divisione che ivi esiste. A tale oggetto conviene che il piede della colonna sia in perfetto piano orizzontale, il quale si determina con tre vite usando un livello a bolla d'aria. Se per una piccola differenza dei pesi che esistono nei piattelli si inclina anche minimamente il giogo l'ago devia dal zero della divisione o sovra una parte o sull'altra ed accenna quale è il peso maggiore. Nei tempi passati (e tuttora in alcune bilance ordinarie) si usava di porre l'ago volto in alto, ed anche si sopprimeva l'ago e si giudicava dell'orizzontalità del giogo per la egual distanza che ha da conservare nell'atto che è sollevato dai due punti di riposo V,V', o per mezzo di altro analogo congegno. Nelle bilance più delicate sul pezzo di riposo FG si ferma il giogo con quattro punte in adattati incavi. Tutta la bilancia si tiene in una cassa con cristalli onde sia difesa dalle agitazioni dell'aria, ed ivi conservasi dalla calce per togliere il guasto dell'umidità. Comunque ottima sia la bilancia grand'esercizio ed accortezza occorre nell'uso. Se la bilancia è leggerissima non si destina che a pesi minori di un decagrammo, e se ne fanno alcune da tenersi a mano le quali per la loro mobilità potrebbero dirsi folli. Per decidere dell'equilibrio non preme aspettare che le oscillazioni sieno del tutto estinte, può avvertirsi se si compiono fra i medesimi limiti. Nè preme in tutte le pesate riportare al zero l'ago per mezzo dell'adattato contrappeso, si confrontano anche dalla divisione ove giugne l'ago in quiete, o nelle sue oscillazioni.

256. *Bilancia ad altalena* (*bascule*) *per grandissimi e per piccoli pesi*. — Nelle dogane, nei porti di mare, e dovunque occorra di pesare dei cariaggi e pesi considerabilissimi e molto adattata la bilancia di Quintenz. Essa può avere il suo piatto in piana terra, e senza oscillazione può dare le pesate con molta sollecitudine. Ad una leva AB di primo genere a braccia ineguali riposata sopra un coltello d'acciaio C è in un'estremo il vassoio ove si pongono i contrappesi P, e sull'altra parte ai punti RB' gravita la resistenza Q, o merce da pesarsi. Dico vi gravita perchè vi sono col mezzo di due spranghe metalliche BR, B'S connesse due leve di secondo genere RD, SE. Esse sono due piani notabilmente estesi, e sopra RD che rimane collocato a piano di terra sta la resistenza Q. In D, E, B, B', A sono dei coltelli d'acciaio che danno piccolo attrito, e seguitano ad agir bene giacchè la resistenza rimane fra quelli repartita. Ordinariamente è rogolata in modo la lunghezza del braccio AC che con un kil. di contrappeso si fa equilibrio a dieci kil. di merce; e tale è la posizione dei punti B, B', O, E che in qualsivoglia punto F del piano RD venga collocata la merce produce il medesimo sforzo sulla leva AB. Si comprenderà ciò osservando che il momento P.AC del contrappeso deve essere eguale alla somma dei momenti degli sforzi che fa la merce sù due punti B, B. Questi momenti sono

$$Q.\frac{FD}{RD}\,CB, \qquad Q\frac{FR}{RD}\cdot\frac{OE}{SE}\cdot CB'.$$

e se supponiamo che stia OE : SE :: CB : CB′ e li sommiamo, avremo

$$P.AC = Q.BC \left(\frac{FD}{RD} + \frac{FR}{RD}\right) = Q.BC.$$

Dunque la indicata proporzione stabilisce la regole per la costruzione della bilancia.

Si costruiscono adesso delle bilance a *bascule* le quali hanno la forma di una leva di primo genere AB (Tav. VIII fig. 17) a braccia eguali, che ha in un piattello A il contrappeso, e nel piatto B la merce. Gli assi AA′ BB′ di questi piatti si mantengono presso a poco verticali per le due verghe A′O, B′O imperniati in O. Gli imperniamenti in A, B, C sono sovra coltelli d'acciaio. Queste bilance adunque in teoria non differiscono dalle comuni se non per presentare più attriti, ed in pratica hanno il vantaggio che il piatto rimane totalmente libero alla parte superiore, e tengono minore spazio.

237. *Romana, e stadera composta.* — La stadera o romana è un altro strumento che si usa per conoscere il peso dei corpi. È composta di una verga AB (Tav. VIII fig. 15) da cui pende il piatto D sostenuta nel punto C intorno al quale può rotare d'alto in basso e contrappesata da un pezzo metallico che può scorrere lungo la leva ed è detto romano.

Si usa ponendo nel piatto la merce da pesarsi Q e trasportando il romano P a quel punto della leva ove occorre per ottenere equilibrio. Primieramente conviene che la stadera stia in equilibrio da per se allorquando non vi è merce nel piatto ed il romano sta al principio della divisione del braccio per il quale percorre, cioè il peso del piatto e del suo respettivo braccio deve fare equilibrio al peso del romano e del suo braccio in detta posizione supponiamo che sia O il luogo ove deve trovarsi il romano per avere l'equilibrio a stadera scarica chiamando N + P.OC il momento dello strumento sulla parte del romano M + P′.CB quello sulla parte del piatto avremo

$$N + P.OC = M + P'.CB$$

ove M, N sono i momenti dei pesi dei bracci e P, P′ sono il peso del romano e del piatto. Chiamato Q il peso della merce, a stadera carica equilibrata quando il romano è in A′ si avrà

$$N + P(OC + OA') = M + P'.CB + Q.CB$$

e per l'equazione precedente si riduce questa a $P.OA' = Q.CB$. Onde vedesi che si può con esattezza ottenere il peso della merce perchè l'effetto che essa produce quando è posta sul piatto rimane compensato dal portare il romano ad una maggior distanza OA′ e da questa per conseguenza si potrà dedurre il peso di Q. In fatti avremo

$$Q = \frac{P.OA'}{CB}$$

ed essendo costante il valore di $\frac{P}{CB}$ rimane Q proporzionale a OA′. Quindi dopo avere segnato il zero nel punto ove deve stare il romano quando la stadera è in equilibrio scarica, trasporteremo il romano nel punto ove conviene per ottenere l'equilibrio quando il piatto si è caricato di un unità di peso come per es.° di una libbra, e si segnerà uno al luogo ove si è questa seconda volta collocato il romano; si seguiterà a dividere il braccio della stadera in lunghezze tutte eguali alla distanza tra le due posizioni precedenti e si avranno così marcate le libbre, che può pesare la stadera. Suddivideremo in dodici parti eguali ogni spazio ed avremo le once, giacchè se consideriamo il romano quando è alla divisione delle tre libbre e 7 once, que-

sta sarà distante da 0 per una quantità eguale a $3\ {}^7/_{12} \times a$, indicando con a la distanza da 0 ad 1, ed avremo $Q = \frac{P}{CB} . 3\ {}^7/_{12} . a$, ma $\frac{P.a}{CB} . = 1$ ℔, onde $Q =$ ℔ $3\ {}^7/_{12}$. Se verrà mutato il romano è chiaro che la divisione non starà bene, cioè non indicherà i veri pesi, e ce ne potremo accorgere dal non essere in equilibrio la stadera scarica allorquando il romano è a zero. Supposto poi che con adattata mutazione nel peso del piatto si sia anche in questo caso posta in equilibrio la stadera scarica, si avranno dal nuovo romano dei pesi di unità differente, giacchè ogni unità di peso è $= \frac{P}{CB} a$

Che se mutasi il punto di sospensione C anche in questo caso la divisione primitiva non indicherà i pesi. Si fa una tal mutazione quando si rovescia la verga AB perchè dalla sua parte inferiore suol portare un altra divisione, la quale serve a dar pesi molto maggiori se il punto C è trasportato in C′ più prossimo a B. Molte osservazioni che abbiamo fatte per la bilancia sono applicabili anche alla stadera, come sarebbe il metodo delle doppie pesate, che può indicare se lo strumento è esatto; e il dovere essere i punti A, B in linea retta col punto d'appoggio C, ed il centro di gravità un poco al disotto di quest'ultimo punto e sulla stessa verticale quando la leva è orizzontale.

La stadera composta ha una disposizione di leve analoga ai ponti levatoi (131). Sono V, S (Tav. VIII. fig. 16) due anelli per i quali si attacca il telajo della stadera che porta in C l'ipomoclio di una leva di secondo genere. Le due leve sono connesse mediante una staffa DA alla prima in K sta attaccato il corpo Q da pesarsi, e lungo la seconda si pone il romano P. E per quello che sopra abbiamo detto della composizione delle leve posto che lo strumento scarico stia in equilibrio quando il romano è in B, avremo nel caso dell'equilibrio a stadera carica $P . BO . CA = Q . KC . DE$, e perciò $Q = \frac{P . CA}{KC . DE} . BO$, cioè essendo $\frac{P . CA}{KC . DE}$ quantità costante, varia Q al variare di BO, e la divisione di questa stadera sulla verga BO può regolarsi come quella della stadera semplice.

Puleggia.

238. *Ruota sollecitata da due forze equidistanti dal centro.* — Una ruota piana che gira attorno al suo asse può essere sollecitata da due forze P, Q (Tav. IX fig. 1) situate nel suo piano e tangenti alla sua circonferenza, comunque fra loro inclinate, e starà in equilibrio quando sono le due forze eguali, perchè ambedue agiscono con egual braccio di leva, cioè quando $P = Q$. Supposto che non vi sia attrito crescendo un poco una di queste forze, essa vincerà l'altra e porrà la ruota in moto. Ma se deve vincere anche l'attrito dell'asse converrà che superi la seconda forza di una quantità maggiore dell'attrito. Chiamata N la pressione che agisce sull'asse, ed r il raggio di questo avremo fNr per il valore del momento dell'attrito (trascurando il maggior rigore della valutazione dell'attrito degli assi che abbiamo di sopra (229) avvertito); e perciò chiamando R il raggio della ruota, l'equazione dello stato prossimo al moto sarà $PR = QR + fNr$. Ora si può trovare un valore di N approssimato osservando che quando è $P = Q$, e prolungate queste due forze s'incontrano in M, la loro resultante Mc pas-

sa per il centro C. Compito il parallelogrammo *Macb*, e condotti i raggi AC, BC e la corda AB si ha $Md = \frac{1}{2} N$ ed i triangoli ACD, *aMd* sono simili e danno la proporzione

$$Md : Ma :: AD : AC$$

e quindi

$$Md = \frac{Ma.AD}{AC} = \frac{Q\ AD}{R} \text{ cioè } N = \frac{Q.AB}{R}$$

onde l'equazione si riduce

$$PR = Q.R + rf\frac{Q.AB}{R}$$

Che se vuolsi la quantità di lavoro che deve prodursi dalla potenza in un tempo determinato, si chiami R*s* l'arco percorso dal punto d'applicazione della potenza P, e della resistenza Q, quello descritto all'unità di distanza dal centro sarà *s*, ed avremo

$$P.Rs = Q.Rs + rsf\frac{Q.AB}{R}$$

equazione la quale ben mostra che il lavoro della potenza deve essere eguale al lavoro della resistenza con più quello distrutto dall'attrito.

Volendo esattezza, nello stato prossimo al moto sarà N maggiore di

$$\frac{Q.AB}{R}$$

pure il più delle volte può trascurarsi questa differenza; che se nella particolarità del caso

$$\frac{Q.AB}{R}$$

sembri un valore troppo piccolo per N chiamando quello N', potremo approssimarci al valore vero, e valendoci dell'equazion precedente porremo

$$Q + \frac{r}{R}.fN' = P' \text{ e } N = \frac{P'AB}{R}$$

con la qual posizione veniamo ad aumentare non solo una componente di M*c* come dovrebbe essere, ma ambedue, e perciò chiamando N'' quest'ultimo valore di N, avremo

$$P'' = Q + \frac{r}{R}fN''$$

ed allora siccome il vero valore della potenza è più piccolo di P'', e più grande di P' si potrà prendere eguale a $\frac{P'+P''}{2}$, e perciò $P = Q + \frac{r}{R}f\frac{N'+N''}{2}$

Poichè in tal modo vien considerata la pressione come una media tra le due resultanti, che si hanno dalla potenza e dalla resistenza, quando si dà alla potenza il valore che avrebbe indipendentemente dall'attrito e così alla resistenza, e quando alla potenza si dà un valore approssimato, e alla resistenza quello che dovrebbe avere per fare equilibrio a questa nuova potenza indipendentemente dall'attrito.

239. *Puleggia fissa.*— Dopo ciò possiamo determinare le condizioni d'equilibrio di una potenza, e di una resistenza le quali sieno applicate agli estremi di una corda (Tav. IX fig. 2) che passa sopra una ruota scanalata alla sua circonferenza, e mobile soltanto attorno all'asse, la qual macchina vien detta puleggia fissa. D'ordinario una staffa di ferro, e talvolta di legno, come mostra la fig., sostiene l'asse, e vien detta la cassa della puleggia. Qui la potenza non dovrà vincere soltanto la resistenza Q e l'attrito dell'asse, ma anche la rigidezza della corda. La rigidezza resiste sulla parte ove la corda si avvolge alla circonferenza, e dall'altra parte non produce alcuno effetto per l'elasticità della fune. Quando le corde sono molto grosse può dirsi che la potenza, e la resistenza agiscono lungo il loro asse, e perciò il raggio R della puleggia è accresciuto di quello della corda. Ora come si è detto di sopra quando non vi sono resistenze per lo stato prossimo al moto potremo avere $P = Q$, e l'ufizio della puleggia è solo quello di mutare la direzione alla forza, e perciò si chiama puleggia o car-

rucola di rimando, per questa proprietà l'abbiamo veduta applicata alla macchina di Atwood. In questa se le forze non fossero eguali la più piccola distruggerebbe una porzione della più grande e rimarrebbe attiva di quest' ultima la differenza, e la carrucola si muoverebbe nel senso della forza più grande come se non fosse sollecitata al moto che dalla differenza delle due forze.

Allorchè si considera la rigidezza della fune e l'attrito dell'asse, ritenute le denominazioni già adottate (95) per la prima resistenza avremo

$$\frac{d^h}{2R}(H+H'Q)$$

e per la seconda fN. Onde il momento di queste resistenze passive aggiunto a quello della resistenza Q applicata alla macchina eguagliando il momento della potenza, avremo l' equazione che determina lo stato prossimo al moto, cioè sarà

$$P=Q+d^h\left(\frac{H+H'.Q}{2R}\right)+\frac{r}{R}fN$$

Accade spesso in pratica che le due forze potenza e resistenza tirano i due estremi della corda in direzioni parallele e verticali, come quando un uomo agisce con questa macchina per levar l'acqua d'un pozzo, ed in questo caso $N=P+Q$. Allora se la puleggia è molto pesante da non doversi trascurare il suo peso in confronto delle forze, chiamato questo p avremo

$$P=Q+\frac{d^h(H+H'Q)}{2R}+\frac{r}{R}f(P+Q+p)$$

Se la resistenza Q non è molto grande, o non occorre molto rigore nel valutare N porremo $N=2Q$, e perciò nell'ultimo termine di quest' equazione porremo $P=Q$. È facile confermare le cose precedenti coll' esperienza.

Sia $Q=100^k$, $R=0^m,08$; $r=0^m,006$; $d=0^m,014$; $f={}^1/_8$, che è il valore per l' asse di ferro che frega sull'ottone unto da qualche tempo; e sia la fune bianca, e secca, e si riguardi come trascurabile il peso p della carrucola. I tre termini del valore di P saranno

$$100; \frac{0^k,109+0^k,00477.100}{2.0,08}=3,66$$

$$\frac{0,006}{0,08}.{}^1/_8(100+100)=1,67$$

e per conseguenza si avrà

$$P=100+3,66+1,67=105,33$$

senza le resistenze sarebbe questo valore stato 100, e si è preso nel termine dell' attrito $P=Q$. Che se anche in questo si pone per P il giusto valore avremo per terzo termine

$$\frac{0,006}{0,08}.{}^1/_8(P+100)={}^1/_{120}P+0,83$$

ovvero $P=\frac{104,5.120}{119}=105,41$

D'onde scorgesi che quando la resistenza è piccola siccome abbiam supposto, conclude pochissimo il porre nel termine dell'attrito per P un valore differente da Q. Eseguito questo calcolo sarà ben facile rifarne la prova sperimentale, cioè porre $6.^k$ circa di aggiunta alla potenza di 100^k, che teneva in equilibrio un' egual resistenza, i quali la porranno in stato prossimo al moto, seppure la puleggia sia ben centrata, e non abbia difetti di costruzione.

I tratti della fune col loro peso possono far variare la proporzione tra la potenza e la resistenza. Questa considerazione è molto importante quando si tratta di inalzare pesi ad altezze considerabili; in tali casi a misura che la potenza P agisce aggiunge a suo vantaggio il doppio del peso di quel tratto della fune che fa discendere, e perciò imprime alla resistenza un moto sempre più accelerato. Per togliere questa

accelerazione quando sia pregiudicevole si fa uso della catena C di compensazione fissata sotto il peso Q e pesante in egual lunghezza il doppio della fune. Questa è al principio tutta giacente sul suolo e si solleva col peso e contrabilancia il tratto della fune che esce dalla parte della resistenza e passa da quella della potenza.

240. *Puleggia mobile.* — Si può applicare la resistenza Q (Tav. IX fig. 3) all'asse per mezzo della cassa della puleggia, e tenere la fune attaccata in un estremo ad un punto fisso T, mentre l'altro estremo è sollecitato dalla potenza P; la macchina dicesi allora puleggia mobile, e partecipa della macchina funicolare come si è sopra (222) accennato. L'oggetto è di tenere in equilibrio la resistenza, o inalzarla facendo girare la carrucola sul tratto TB della fune. Nell' equilibrio astratto richiedesi che i due tratti della corda prolungati in linea retta si incontrino sulla verticale che passa per il centro C, e che sia la resistenza Q una forza eguale e contraria alla resultante delle eguali tensioni P, con le quali restano tirati i due capi della fune. Per ciò servendoci del ragionamento che abbiamo fatto sopra la ruota in equilibrio mentre si determinava il valore di N che ora vien sostituito da Q, potremo stabilire che è

$$Q = \frac{P.BA}{CA} \text{ ovvero } P : Q :: CA : BA$$

cioè nell' equilibrio della puleggia mobile trascurato l'attrito, la potenza sta alla resistenza, come il raggio sta alla corda dell'arco che è abbracciato dalla fune. Quindi sarà la potenza più piccola della resistenza, e si dirà che la carrucola mobile dà vantaggio ogni qual volta l'arco abbracciato della fune sarà maggiore di un sesto dell' intiera circonferenza: il vantaggio sarà massimo quando quest' arco sarà la metà della circonferenza, allora BA è un diametro, e però avremo

$$P : Q :: CA : 2CA :: 1 : 2$$

cioè la potenza sarà metà della resistenza. Quando l' arco abbracciato dalla fune è minore di un sesto della circonferenza dovrà essere $P > Q$. Tuttociò può anche confermarsi coll' esperienza purchè si procuri di aggiungere alla potenza quel che occorre per vincere il peso della carrucola.

Per considerare lo stato prossimo al moto, avuto riguardo all' attrito dell'asse e alla rigidezza della *fune*, osservo che queste resistenze devono calcolarsi come per la puleggia fissa, e perciò deve usarsi la stessa formula, ove ora la resultante N sarà $= Q$, e in luogo di Q si porrà T cioè la tensione di BT, e perciò si ridurrà a

$$P.R = TR + \frac{d^h (H + H'T)}{2R} . R + rfQ$$

e prossimamente

$$T = \frac{Q.R}{BA}$$

Quindi nel caso che i tratti della fune sieno paralleli può porsi prossimamente

$$P.R = {}^1/_2\, QR + d^h \frac{(H + H'.\, {}^1/_2\, Q)}{2} + rfQ$$

ma volendo il valore di P con esattezza si dovrebbe sostituire nella precedente equazione $T = Q - P$, lo che dà per P il valore seguente

$$PR \left(2 + \frac{d^h H'}{2R} \right) =$$

$$QR + \frac{d^h}{2R} (H + H'Q) R + rfQ$$

Ed applicandovi l' esempio numerico di sopra si avrà

$$P \left(\frac{2 + 0^h,00477}{2.0,08} \right) = 100$$

$$+ \frac{0^k,109 + 0,^k00477 . 100}{2,0.08}$$

$$+ \frac{0,006}{0,08} \cdot {}^1/_2\ 100$$

ovvero $P . 203 = 100 + 3,66$
cioè $P = 51,9$

241. *Puleggia a ruota.* — Un terzo genere di puleggia si ha allorquando si pongono all'asse della ruota le due forze (Tav IX fig. 4) potenza P e resistenza Q, e si passa per la scanalatura una corda fissata per i suoi due estremi obliquamente all'orizzonte. Questa puleggia si adopra quando si vuole attingere l'acqua da un pozzo che è distante dalla verticale che passa per il luogo ove si opera; ed è di un uso frequente sebbene con costruzione alquanto variata; si ha per es.° nelle ruote delle vetture, delle carrette ec. Le condizioni dell'equilibrio sono diverse secondo la direzione della fune relativamente alle due forze. Sempre vi si ravvisa un corpo che deve stare in equilibrio o salire lungo un piano inclinato, e perciò daremo la sua teoria parlando di quest' ultima macchina. Qui solo avvertirò che il tratto BA della corda non sarà mai precisamente in linea retta coll' altro AC, e converrà nello stato prossimo al moto valutare l'inclinazione del tratto che ha da esser percorso.

Conoscendo quanto è lunga la corda CAB sappiamo calcolare l'inclinazione per i due tratti di fune per qualunque posizione della puleggia giacchè nel di lei moto il punto A descrive un' ellisse: Onde se anche fossero C, B sovra una medesima orizzontale per il lenteggiare della fune si avrebbe il piano inclinato.

242. *Puleggia in movimento.* — Ritenute le precedenti notazioni, ed indicando con φ la forza acceleratrice, e con I il momento d'inerzia della puleggia. Quando la puleggia è fissa il momento d'inerzia di tutta la macchina carica sarà

$$I + \frac{PR^2}{g} + \frac{QR^2}{g}$$

ed il momento di rotazione delle forze sarà (259)

$$PR - QR - \frac{d^h}{2}(H + H'Q) - rfN$$

La forza acceleratrice angolare φ deve eguagliare (180) questa quantità divisa per la precedente. Quella della Potenza e della resistenza sarà φR, e perciò anche essa sarà costante e il moto sarà uniformemente accelerato, quando la potenza e la resistenza son date da un peso come noi abbiam supposto. In questo concetto supponendo trascurabile la rigidezza della fune, e l'attrito; e che la ruota avendo la figura di un basso cilindro abbia per peso p e per momento (182) d'inerzia $gI = {}^1/_2 pR^2$, riducesi la forza acceleratrice della potenza e della resistenza

$$9^m,8 \frac{P - Q}{{}^1/_2\, p + P + Q}$$

lo che combina con quello che abbiamo stabilito parlando della macchina d'Atwood, se non che invece di ${}^1/_2\, p$ doveva colà porsi una quantità molto minore per la figura particolare della ruota.

Non sempre la potenza e la resistenza sono forze continue costanti come i pesi, ma è però facile dietro l'esempio precedente applicando alla puleggia le dottrine del moto rotatorio (180, e seg.) dedurre in qualsivoglia caso le leggi del moto. Nelle combinazioni delle pulegge che si usano spesso nelle grandi operazioni meccaniche, non si prendono in esame le leggi del movimento, perchè suol darsi sempre alla resistenza un moto lento. Onde basta notare che quando la potenza ha un valore più grande di quello che le si è assegna-

to per lo stato prossimo al moto, con questo eccesso si ottiene il movimento.

243. *Osservazioni sulla costruzione della puleggia.* — Per avere economia di forza conviene scegliere convenientemente le dimensioni delle puleggie e della corda. Così quando si fabbricano pulegge metalliche se sono un poco grandi si ha cura di compor le ruote tra l' incavatura del contorno e l' asse per mezzo di raggi isolati come le razze di una ruota da carrozza (Tav. IX fig. 4), o con una sottile traversa che riunisce il contorno al mezzo della ruota, o assottigliando tutta la parte intermedia tra il centro e la circonferenza (Tav. IX fig. 3). Per una stessa velocità angolare in due carrucole la velocità effettiva nella resistenza è proporzionale al loro diametro, e l' effetto delle resistenze nocive è in ragione inversa di esso; onde torna conto a far le carrucole grandi di diametro. Come anche torna conto tenerne piccolo il volume perchè proporzionale alla massa è il momento d' inerzia (181). Basta che la carrucola abbia per grossezza un poco più del diametro della corda onde essa non si consumi strisciando contro le pareti dell' incavo. Devono le carrucole essere ben rotonde, ben centrate, e simmetriche attorno all' asse. E l' esperienza ha dimostrato utili le seguenti proporzioni per le loro parti. Il diametro della ruota deve stare a quello dell' asse :: 12 : 1 la grossezza deve essere $^1/_6$ del diametro e per conseguenza il doppio dell' asse. La distanza fra una parte e l' altra della cassa deve essere $^7/_6$ della grossezza della puleggia; il contorno di essa sia incavato ad arco di circolo con una profondità $= ^1/_{10}$ della puleggia stessa. Asserisce il Rondelet averli mostrato l' esperienza che nelle citate proporzioni essendo il diametro della ruota $0^m,135$, quale è quello nelle più piccole pulegge che sogliono usarsi per sollevar pesi nelle costruzioni, può tal macchina resistere ad uno sforzo di 489^k. Con questo dato si potrà facilmente determinare l' asse di un altra puleggia e l' altre dimensioni dato che sia il peso da sollevarsi. La cassa suol farsi di legno ferrata (Tav. IX fig. 2) perchè quelle di ferro logorano le funi, e l' asse si fa di ferro, ed alla ruota ponesi al centro un' anello d' ottone. È preferibile usare l' asse fisso alla carrucola anzichè fissarlo nella cassa. Deve aversi molta cura che l' asse non sguazzi troppo nella sua canna, perchè un tal difetto combina quasi con quello della cattiva centratura. Si chiamano carrucole o taglie girevoli quelle la cui staffa termina in un uncino mobile, e sono utili quando si sospetta che le corde si avvolgano perchè col girarle attorno all' uncino si distrigano le corde. Si dà il nome di taglia ad una combinazione di più carrucole, e alle taglie di grandi dimensioni quello di paranchine.

244. *Combinazioni di più pulegge ne' tre notati generi.* — Le combinazioni delle pulegge fisse non danno alcun vantaggio per diminuire la potenza ma grandissimo se ne ottiene circa la sua direzione. Nè vi è miglior modo che l' uso di queste pulegge per dirigere a nostro talento la forza da una in un' altra direzione ancorchè non giacesse nello stesso piano (Tav. IX fig. 13). Si dispongono delle pulegge fisse anche per tenere in guida e facilitare lo scorrere dei pezzi. Così dalla gran puleggia AA' (Tav. IX fig. 12) non si scarrucola la fune per esservi ai la-

ti ritenuta dalle due B, B′, ed è tenuta la fune in guida dalle due rotelle C, C′.

Ogni volta che si usa la puleggia mobile per sollevare pesi suole adoprarsi anche una puleggia fissa per rivoltare dall' alto in basso il tratto della fune ove si applica la potenza, e così avere una disposizione di questa più favorevole. Si combinano più puleggie mobili insieme facendo che alla fune TBA (Tav. IX fig. 5) di una ove dovrebbe essere applicata la potenza venga attaccata la cassa di un altra puleggia mobile A′ e così la potenza di una faccia da resistenza all'altra, seguitando con questa regola a disporne un certo numero A, A′, A″. La resistenza Q pende dalla cassa della prima puleggia, e la potenza P è attaccata alla fune dell'ultima dopo che è passata su quella fissa M Nella pratica questa combinazione è incomoda perchè si richiedono più punti fissi T, T′, T″ e perchè quando l' ultima puleggia mobile A″ è giunta in M, non sempre si è portata la resistenza Q al punto ove conviene. Del resto il vantaggio è grandissimo specialmente quando i tratti di fune sono paralleli, infatti siccome ogni puleggia trasmette alla successiva metà della propria resistenza, avremo $P : Q :: 1 : 2^n$ essendo n il numero delle pulegge mobili.

Le pulegge a ruota si possono combinare, come le altre fisse e mobili, facendo (Tav. IX. fig. 14) che la resistenza di una puleggia serva da potenza nella successiva; e allora mossa la puleggia A sovra una linea, potrà l'altra B esser tratta lungo una linea diversa, o anche sulla medesima linea, o potranno seguire linee curve. Le ruote delle carrozze comuni offrono esempio di pulegge a ruota di differente diametro che si muovono per una medesima linea: nel treno di una locomotiva si hanno ruote tutte di egual diametro. Allorchè sono diverse le linee percorse dalle successive pulegge deve porsi mente al rapporto tra la lunghezza della corda che lega una puleggia coll'altra e la distanza delle due linee nei loro differenti punti, perchè da questo dipende il rapporto fra i movimenti delle pulegge; come anche deve porsi mente all' angolo che nelle successive posizioni fa la potenza e la resistenza di ciascuna puleggia colle linee da percorrersi, poichè da quello si desume il rapporto fra la potenza e la resistenza, siccome scorgesi dalla dottrina del piano inclinato.

Si combinano le pulegge di un genere con quelle di un' altro ed anche di tutte e tre insieme. Si voglia sollevare un peso Q (Tav. IX. fig. 10) fino ad una certa altezza, e dipoi trasportarlo orizzontalmente, come quando si ha da porre una statua sul suo piedistallo. La potenza P tira la corda per una puleggia fissa M; e con la taglia A composta da due pulegge fisse, e l'altra B composta da due mobili solleva il peso Q fintantochè l' una taglia non tocca l'altra; finalmente con la puleggia a ruota N trasporta trasversalmente il peso Q, muovendosi essa fino alla puleggia fissa M. Più minutamente si esamineranno queste combinazioni parlando delle taglie.

245. *Taglie.* — Per combinare le pulegge fisse con le mobili, si usa una taglia fissa che contiene più pulegge fisse, ed una taglia mobile la quale è composta di pulegge mobili e porta la resistenza. La fune attac-

cata ad una taglia va da una all'altra, passando alternativamente da una fissa ad una mobile, finchè non le hà percorse tutte. Essa porta alla sua estremità la potenza, mentre la resistenza è unita alla taglia mobile. Si dispongono le carrucole in modo da avere tutti i tratti della fune paralleli, e ciò si può fare in tre modi differenti 1.° ponendo in ciascuna taglia più carrucole una sotto all'altra con diametri decrescenti, (Tav. IX. fig. 6) e lasciando tutte le pulegge in un medesimo piano, 2.° infilando le puleggie di una taglia in un medesimo asse (Tav. IX. fig. 8) separate con tramezzi fissi che fan parte della taglia, e tenendo le ruote con diametri decrescenti. In questi due casi vedesi che per mantenere il paralellismo alle funi i diametri delle pulegge 1ª, 2ª, 3ª, 4ª dovranno stare come gli stessi numeri 1, 2, 3, 4. In pratica non premendo il perfetto parallelismo delle corde si fa il diametro di una puleggia eguale a due terzi di quello della puleggia precedente, ed anche sono eguali le due taglie (Tav. IX fig. 10) e basta che nella medesima taglia l'una puleggia differisca dall'altra per circa due volte la grossezza della fune, 3.° infilando le pulegge in un medesimo asse e facendole tutte di egual diametro (Tav. IX fig. 9). In questo sistema quando le taglie sono prossime i tratti della fune rimangono un poco obliqui fra loro, ed al piano delle respettive pulegge, lo che tende a deformare l'asse, ma siccome si usano le due taglie ordinariamente assai distanti, questa obliquità si rende quasi insensibile, e riman sempre il rilevantissimo vantaggio d'aver la macchina raccolta in poco spazio e con pulegge tutte di egual diametro. Negli altri due sistemi avendosi da usare pulegge di piccol diametro si ha gran perdita per la rigidezza della fune, e troppa è la differenza di tensione nei diversi tratti di essa, nè si possono seguire le migliori regole per la proporzione tra il diametro della fune e quello delle ruote (242). In tutti questi sistemi se facciamo astrazione dall'attrito, l'equilibrio è sottoposto ad una condizione semplicissima, cioè che la tensione della fune deve essere la stessa in tutta la sua lunghezza, quindi deve la potenza fare equilibrio soltanto a questa tensione. Ora siccome tutti i tratti delle funi si suppongono paralleli, quindi le loro tensioni formano un sistema di forze parallele ed eguali che hanno da tenere in equilibrio la resistenza, e perciò la tensione di ciascun tratto, e quindi la potenza sarà uguale alla resistenza divisa per il numero dei tratti della fune che vanno da una taglia all'altra. Questa espressione dei tratti delle funi, si vede bene che esclude l'ultimo capo che và dalla puleggia fissa al punto d'applicazione della potenza, e perciò il vantaggio delle taglie è quello stesso che si ottiene dal numero delle pulegge mobili che vi si adoprano quando la fune é attaccata alla taglia fissa. Fissando la fune alla taglia mobile (Tav. IX fig. 7) con due sole pulegge mobili si riduce la potenza $^1/_5$ della resistenza ed in generale per un numero n di puleggie mobili avremo

$$P : R :: 1 : 2^n + 1$$

ma conviene che il numero delle pulegge fisse superi di una quelle mobili. Si è riconósciuto che non si ha vantaggio mettendo più di quattro ruote parallele nelle taglie, giacchè producono imbarazzo e grandi attriti.

Nelle grandissime operazioni si ha

vantaggio raddoppiando la taglia coll'infilare (Tav. IX. fig. 11) due sistemi di ruote in due assi perpendicolari l'uno all'altro, e facendo agire contemporaneamente due canapi.

246. *Taglia nello stato prossimo al moto.* — Non sia nella taglia trascurabile l'effetto dell'attrito degli assi, e della rigidezza delle funi: potrà aversi equilibrio ancorchè la fune non abbia egual tensione in tutti i tratti. E quando si vorrà impedire il movimento della resistenza, potrà la potenza avere un valore assai minore di quello che sopra le abbiamo assegnato per l'equilibrio astratto, come le dovrà avere assai maggiore per metterla in movimento. Nel primo caso saranno più tesi i primi tratti della fune, nell'altro gli ultimi, cioè quelli più prossimi all'attacco della potenza. Applicando a ciascuna puleggia l'equazione dello stato prossimo al moto, potremo conoscere il preciso valore delle tensioni $t', t'', t''', t^{\prime v}$ dei respettivi tratti di fune (Tav. IX. fig. 6). Infatti indicando con $R', R'', R''', R^{\prime v}$, i raggi delle carrucole, e con $r', r'', r''', r^{\prime v}$ i raggi dei loro assi avremo per le successive carrucole

$$t''R' = t'R' + \frac{d^h}{2}(H + H't') + r'f(t' + t'')$$

$$t'''R'' = t''R'' + \frac{d^h}{2}(H + H't'') + r''f(t'' + t''')$$

$$t^{\prime v}R''' = t'''R''' + \frac{d^h}{2}(H + H't''') + r'''f(t''' + t^{\prime v})$$

$$PR^{\prime v} = t^{\prime v}R^{\prime v} + \frac{d^h}{2}(H + H't^{\prime v}) + r^{\prime v}f(t^{\prime v} + P)$$

E con queste equazioni unite all'altra $t' + t'' + t''' + t^{\prime v} = Q$, la quale provieue dall'essere i tratti di fune paralleli, potremo determinare le tensioni $t', t'', t''', t^{\prime v}$, e la potenza P. Ma poichè il metodo diretto suole esser troppo faticoso si potrà nella pratica iniziare il calcolo col porre $t' = {}^1/_4\, Q$. Quindi sostituito questo valore di t' nelle precedenti equazioni si avranno dei valori per $t'', t''', t^{\prime v}$, i quali sommati con quello preso per t' daranno un valore maggiore di Q che chiamerò Q'. Allora ponendo

$$t' = {}^1/_4\, Q . \frac{Q}{Q'}$$

si ricomincerà il calcolo per determinare le altre tensioni con una sufficiente approssimazione. Per farne un'applicazione supporremo che la taglia sia con tutte le puleggie eguali (Tav. IX. fig. 9), e con raggio di $0,^m08$, e con perno di $0,^m02$. La fune sia bianca e secca, quasi nuova, del diametro $0,^m016$ e perciò si abbia $d^h H = 0,1394$ $d^h H' = 0,2787$. La resistenza sia di 200^k, e le taglie abbiano ciascuna due puleggie e con assi di ferro con anelli d' ottone unti da qualche tempo, onde possa porsi $f = {}^1/_8$, faremo $t' = 50$ ed otterremo

$$t'' = \frac{0,08534.\ 50 + 0,0697}{0,0778} = 55,7$$

$$t''' = \frac{0,08534.\ 55,7 + 0,0697}{0,0778} = 61,9$$

$$t^{\prime v} = \frac{0,08534.\ 61,9 + 0,0697}{0,0778} = 68,8$$

Onde $Q' = 236,4$ e ricominceremo il calcolo ponendo

$$t' = 50 \frac{200}{236,4} = 42,3$$

$$t'' = \frac{0,08534.\ 42,3 + 0,0697}{0,0778} = 47,3$$

$$t''' = \frac{0,08534.\ 47,3 + 0,0697}{0,0778} = 52,7$$

$$t^{\prime v} = \frac{0,08534.\ 52,8 + 0,0697}{0,0778} = 58,7$$

Ora che la somma di queste quattro tensioni è molto prossima a quella che deve essere, dall'ultima di esse dedurremo

$$P = \frac{0,08334.\ 58,7 + 0,0697}{0,0778} = 65,2$$

Dell' asse nella ruota.

247. *Asse nella ruota.* — In questa macchina si ha sempre un cilindro AB (Tav. X fig. 1) e concentrica ad esso una ruota MN, o altro simile congegno, e stà la potenza P applicata alla circonferenza della ruota, e la resistenza Q alla circonferenza del cilindro. Prende il nome di *argano* allorquando l'asse è verticale, e di *burbera* se l'asse è orizzontale. Invece della ruota si applica una manovella, o due manubri a due estremi del cilindro, o degli assi che si incrociano come raggi di una ruota, o un tamburo capace di contenere degli animali attaccato concentricamente al cilindro stesso. Mentre la potenza agisce, la ruota gira e con essa il cilindro al quale si avvolge la fune che porta la resistenza. Con questa macchina possono sollevarsi dei pesi, e tirarsi dei corpi orizzontalmente, o si può trasmettere una forza ad altra macchina.

Le condizioni dell'equilibrio si sogliono determinare nel caso che la potenza e la resistenza agiscano in piani normali all'asse del cilindro, giacchè altrimenti una porzione della forza si spenderebbe in stirare l'asse lungo la sua direzione. Pur tuttavolta vi sono alcuni casi nei quali è necessaria questa decomposizione di forza, come per le ruote che non hanno il loro piano normale (come noi supporremo) all'asse del cilindro. Si cercherà allora lo sforzo che spinge il cilindro secondo la sua lunghezza, e l'attrito che si fa contro i suoi cuscinetti, il quale deve essere vinto dalla potenza.

Sia la resistenza un peso Q attaccato ad una corda che si avvolge attorno al cilindro; la potenza P applicata tangenzialmente alla ruota tirerà col momento P.R, essendo R il raggio della ruota, e la resistenza agirà con un momento Q.R', chiamato R' il raggio del cilindro, e per l'equilibrio avremo P.R = Q.R'. Dunque indipendentemente dall'attrito la potenza sta alla resistenza come il raggio del cilindro sta a quello della ruota, e perciò qualora si allunghi il raggio della ruota e si accorci quello del cilindro diminuirà la quantità della forza necessaria per l'equilibrio in questa macchina.

Il rapporto delle celerità della potenza e della resistenza sarà inverso al precedente come ben comprendesi, e come si è detto essere principio generale delle macchine. Allorchè non vi sono resistenze passive l'equilibrio viene ad esigere che la resultante delle due forze P, Q passi per l'asse. Sia rappresentata questa da N, potrà essere decomposta in due forze parallele applicate ai punti A, B pernj estremi. Si chiami N_1, la forza che può intendersi applicata in A, ed N_2 quella che deve essere applicata in B sarà fN_1, fN_2 l'attrito in questi estremi, ed essendo r il raggio dei perni rappresenteremo con rfN_1, rfN_2 il momento degli attriti; onde nello stato prossimo al moto si avrà

$$FR = QR' + rfN_1 + rfN_2 = QR' + rfN$$

Quando l'argano o verricello deve essere messo in moto la rigidezza delle corde accresce la resistenza e ritenute le consuete denominazioni la corda ove è applicata la resistenza agirà col momento

$$\frac{d^h(H + H'Q)}{2R'} R'$$

e l'equazione completa dello stato prossimo al moto potrà dirsi

$$PR = QR' + \frac{d^h(H + H'Q)}{2R'} . R' + rfN$$

Il termine dell'attrito è messo per valutare quello che ha luogo tra l'asse e la sua canna, non già per

quello che ha luogo tra la base e il dado.

Posto che l'asse sia verticale (Tav X fig. 3) il peso p della macchina posa sul perno inferiore e produce un' attrito fp, che ha per braccio di leva $^2/_3$ del raggio del perno (230) e però resisterà col momento $^2/_3\,fpr$. Allorchè si ha da considerare solamente quest' ultimo attrito come nel caso dell' argano verticale ove il solo peso p della macchina produce la pressione, e la potenza agisce orizzontalmente ed è applicata a' punti della circonferenza della ruota diametralmente opposti si avrà

$$PR = QR' + {}^2/_3\,frp + \frac{dh\,(H + H'Q)}{2R'}\,R'$$

Per conseguenza chiamato s il piccolo arco descritto da un punto della macchina che sia collocato all' unità di distanza dall' asse avremo (Ben s' intende che in N_1, N_2 è compreso anche il peso delle macchine)

$$P.Rs = Q.R's + rsfN + R's\frac{dh(H+H'Q)}{2R'}\;;$$

cioè il lavoro della potenza deve essere eguale al lavoro della resistenza con più quello consumato nelle resistenze passive. È essenziale avvertire che nel calcolo si può agire come se le forze fossero tutte in un sol piano, e come se l' attrito si facesse sovra un sol perno.

248. *Costruzione della macchina.* — È evidente che nella costruzione della macchina e massimamente dei perni conviene aver riguardo allo sforzo che devon sostenere, cioè alle due forze N_1, N_2. L' azione della potenza sollecita il cilindro a girare in un senso, mentre l' azione della resistenza lo farebbe girare in senso contrario, e se l' albero non è composto di una materia resistente cede più o meno a questi due effetti, e si torce proporzionalmente ai momenti di queste due forze. In quanto alla corda che si avvolge con una estremità al cilindro e sostiene coll' altra la resistenza dobbiamo anche in questa macchina osservare che a misura che essa è avvolta cessa di far parte della resistenza e solo compone una porzione del peso del cilindro. Così diminuendosi il valore della resistenza sempre più, può aversi questa per cattiva condizione di lavoro, e allora si procura di mantenere costante la resistenza con un contrappeso che svolge altra fune mentre la fune della resistenza si avvolge. Per il medesimo oggetto, ma con molto maggiore economia di potenza si usano i così detti tamburi regolatori si fa grado a grado più grosso il verricello in guisa che quando la fune o catena è al punto più basso e che per conseguenza riesce più pesante, essa si avvolge ove il diametro è più piccolo, e quindi agisce sovra una leva più corta: a misura che il suo peso diminuisce il diametro sul quale essa si avvolge aumenta, e così la resistenza è sempre la stessa. Per tal modo si mettono al verricello gli uomini bastevoli a vincere il massimo di resistenza: ed il vantaggio che si ha con questo genere di verricello si è che facendo costantemente lo stesso sforzo inalzano il peso con una velocità sempre crescente. Un esempio di tali tamburi si ha nelle piramidi degli orologi. Ordinariamente nelle grandi operazioni non si fa accavallare sul cilindro tutta la fune, ma si svolge a misura che viene avvolta, e solo ne rimangono tre o quattro giri i quali col loro attrito impediscono che il canapo scorra (Tav. X fig. 10). Per svolgere la fune non si fissa il suo capo, e si pongono degli uomini che l'allunghino a misura che gira il cilin-

dro; si usano anche dei meccanismi particolari, come di far passare la fune da uno in un' altro cilindro giacchè è da temersi l' accavallamento della fune. La corda chiusa o senza fine chiamata *tarnavire* di tratto in tratto presenta dei nodi o pomi per attaccare la gomena che si vuol tirare; fa 5 o 6 giri sulla campana dell'argano; ed a misura che questo si gira essa si avvolge colla sua parte inferiore, e si svolge colla superiore. Se la campana fosse cilindrica continuandosi questo movimento, la corda del tarnavire arriverebbe ben presto al basso della campana, e allora si accavallerebbe e s' impegnerebbe nell' impernamento. Quindi si fa la campana conica convergente verso l' alto e la resistenza fa salire sempre il tarnavire. Questa disposizione si usa principalmente a bordo dei vascelli ove il grand' argano rappresenta un' albero che attraversa due ponti.

Nel misurare il raggio della ruota ove è applicata la potenza distinguiamo i due casi che si abbia un tamburo mosso da animali oppure una corda che debba ravvolgersi sopra se stessa. Nel primo caso, posto che animali si trovino nei punti D, G, F (Tav. X fig. 2) del cerchio D, L, Q che rappresenta una sezione ad angoli retti del tamburo annesso al cilindro, le lunghezze dei raggi da calcolarsi sono

$$CK = KL\,cos.\,LKD,\ EK = KL\,cos\,LKG,$$
$$NK' = KL\,cos.\,LKF$$

talchè l' espressione del momento della potenza dovrà sempre risultare dal prodotto del peso di uno dei tre animali nel raggio KL moltiplicato per la somma dei coseni degli angoli che col raggio orizzontale KL fanno i raggi tirati dal centro K ai punti in cui essi animali si trovano. Nel secondo caso siccome la potenza può supporsi appesa all' asse del canapo, così quanto questo sarà più grosso, tanto più sarà lontana la direzione di essa dall' asse dei momenti. Onde per la necessaria esattezza converrà nell' espressione del momento della resistenza aggiungere al raggio del cilindro il raggio del canapo $2n - 1$ volte, se n sia il numero delle circonvoluzioni, che esso avrà dovuto fare sopra di sè, al tempo in cui vuol calcolarsene l' equilibrio.

Nelle manovelle ordinariamente non si ha il braccio della potenza costante, perchè non agisce questo sempre normalmente alla manovella. Se la potenza è data da un peso, devesi dirigere il calcolo come si è detto per il tamburo; e presso a poco in egual modo anche se è data da un' animale perchè lo sforzo di esso si fa sempre nel medesimo senso.

Nelle ruote a piuoli (Tav. X fig. 10) gli uomini montano su piuoli piantati a destra, e a sinistra del contorno della ruota come su i bastoni di una scala, e si ha moto se lo sforzo del loro peso moltiplicato per la distanza del centro della ruota alla verticale condotta pel loro centro di gravità supera la resistenza moltiplicata per la distanza dall' asse della ruota, e i momenti delle resistenze nocive. Il vantaggio di questa macchina consiste nell' essere gli uomini che montano su piuoli il più possibilmente lontani dalla verticale condotta pel centro della ruota.

Delle ruote, che larghe e scavate presentano una strada interna sulla quale camminano gli operaj incaricati di porre in moto la macchina, chiamate tamburi, si fa uso nelle macchine destinate a pulire il fondo del mare nei porti che chiamansi curaporti. Si hanno sulla circonferenza inchiodati piccoli gradini fatti in

modo che un uomo le di cui mani sono applicate alle tavole che compongono il tamburo (Tav. X fig. 2) possa con facilità nei passi successivi montare sopra a questi diversi gradini. Più individui stanno uno vicino all'altro, e tutti si sostengono con la loro mano alle tavole del tamburo. Questa specie di lavoro si usa per esercitare le forze de prigionieri, ed è riguardato come un castigo efficacissimo.

Spesso si usa una stanga (Tav. X fig. 3) che viene infilata in alcuni fori che sono nella testa del cilindro, e lungo quella stanga si fanno agire più individui ed allora il momento della potenza dovrà riguardarsi come la somma di tutti i momenti delle potenze somministrate da ciascuno individuo. Tale è il meccanismo dell'argano per le ancore, e quello dell'argano che si usa sulle vetture di carico per stringere le mercanzie onde non escano dal loro posto, ed anche negli strettoj o presse ec.

249. *Combinazioni di argani*. — Torna conto combinare più argani insieme in modo che l'uno serva di potenza all'altro e viceversa questo al primo di resistenza (Tav. X fig. 4) ove ABC rappresenta un argano connesso coll'altro A'B'C' e questo col terzo A''B''C'' mediante la corda BA', B'A'' le quali o possono essere avvolte alle ruote, e ai cilindri. Siano X, X'... le tensioni nell'equilibrio provate dalle corde che connettono il primo col secondo... avremo

$$\frac{P}{X} = \frac{CB}{CA}\ \ \frac{X}{X'} = \frac{C'B'}{C'A'}\ \ \frac{X'}{Q} = \frac{B''C''}{C''A''}$$

moltiplicando tutte queste equazioni abbiamo

$$\frac{P.X.X'.}{X.X'.Q} = \frac{P}{Q} = \frac{CB.C'B'.C''B''}{CA.C'A'.C''A''}$$

cioè in un sistema di verricelli o di argani facendo astrazione dall'attrito nel caso dell'equilibrio la potenza sta alla resistenza come il prodotto dei raggi di tutti i cilindri stà al prodotto dei raggi di tutte le ruote. Se si vuole fare entrare nel calcolo il diametro delle corde converrà dire che esiste l'equilibrio quando il prodotto della potenza per i raggi di tutte le ruote, aumentati dei respettivi raggi della corda, è eguale al prodotto della resistenza per i raggi di tutti i cilindri aumentati anche questi dei raggi delle respettive corde.

L'argano chinese può considerarsi come una combinazione di argani, e della puleggia mobile: consiste questa macchina in due cilindri M,N (Tav. VIII fig. 7) di differente diametro che hanno un medesimo asse AB, e sono contemporaneamente messi in movimento da una manovella. A questa si applica la potenza P, e la resistenza Q pende da una carrucola mobile c per la quale passa una fune unita alla superficie dei due cilindri e disposta in modo che quando si avvolge ad uno viene svolta dall'altro. Si possono considerare separatamente i due argani come se a ciascuno fosse attaccato la metà della resistenza cioè $\frac{1}{2}$ Q perchè si ritengono come paralleli i due tratti della fune, e facendo astrazione dall'attrito chiameremo R', R'', i raggi dei cilindri M, N, ed R la lunghezza del gomito della manovella. Nell'equilibrio il momento della potenza sarà eguale alla differenza de' momenti co' quali la resistenza agisce sù due argani, e si avrà

$$PR = \tfrac{1}{2}\, Q\, (R' - R'')$$

cioè la potenza stà alla resistenza come la semi-differenza dei raggi de' cilindri stà al gomito della manovella. D'onde scorgesi nella piccolezza che si può dare alla potenza

tutto il pregio di questa macchina

Il modo di combinar gli argani indicato dalla precedente fig. 4 non è vantaggioso perchè nei moti continuati dovrebbero esser troppo lunghe le corde, che avvolte al cilindro di uno si hanno da raccogliere sulla ruota dall'altro argano, e colle loro spire addossate altererebbero il rapporto tra i diametri. Si fa uso di una fune o cigna di cuoio chiusa, chiamata fune senza fine (Tav. XII. fig. 12) la quale cinge il cilindro di un'argano, e la ruota dell'altro alcune volte senza incrociarsi $aa'a''a'''$ altre incrociandosi $bb'b''b'''$. Tra queste due disposizioni si ha differenza per il maggiore sforzo che può comunicare la fune incrociata atteso il maggiore attrito che risente nell'abbracciar maggior porzione della circonferenza, e per essere dalla fune incrociata mosso il secondo argano in senso contrario al primo. La tensione della fune senza fine produce una pressione sù pernj, e perciò un'attrito nella macchina del quale dobbiam pur tener conto, aumentando il valore della resultante N nell'equazione dello stato prossimo al moto. È chiaro che la tensione della fune vuole essere determinata perchè se è poca non comunica il moto, e se è molta aumenta di troppo l'attrito dell'argano. Ma di ciò terremo discorso parlando di quest'argano meccanico.

250. *Ruote dentate*. — Nelle macchine che che hanno a servire per operazioni di gran forza si comunica il moto da ruota a ruota per mezzo di ingranaggio; e si hanno allora le così dette ruote dentate. La ruota A (Tav. X. fig. 8) ingrana nel rocchetto b', e la ruota A' concentrica a questo rocchetto ingrana in altro simile rocchetto b'' che appartiene ad una terza ruota A'', la quale ha la potenza P applicata alla sua circonferenza. La resistenza Q per mezzo di una corda si lega al cilindro della prima ruota. I denti delle ruote ingranando nelle pinne dei rocchetti, o nei fusi delle lanterne che tengon luogo di quelle, girano le ruote in senso contrario ai rocchetti o lanterne; cosicchè la comunicazione del moto è quella stessa che si aveva nelle corde senza fine incrociate. Anche degli ingranaggi dovremo parlare più estesamente in seguito, e qui ci limiteremo a dire dell'uso delle ruote dentate, e del rapporto in esse tra la potenza e la resistenza, cioè del modo di applicarvi la teoria dell'asse nella ruota. Le ruote dentate si usano alcune volte siccome gli argani ad ottenerne un determinato sforzo, e spesso a regolare la velocità del movimento. Avvertito però che nelle macchine in moto si perde in velocità quello che si acquista in potenza nel loro equilibrio astratto, rimane facile dedurre dalla dottrina degli argani quella delle ruote dentate per ambedue gli usi. Onde stabiliremo per le ruote dentate considerate nel loro equilibrio astratto, che la potenza sta alla resistenza come il prodotto de' raggi de' cilindri stà al prodotto de' raggi delle ruote; e che considerate in movimento la velocità della potenza sta a quella della resistenza come il prodotto de' raggi delle ruote sta al prodotto de' raggi de' rocchetti.

Si può al rapporto dei raggi sostituire quello del numero dei denti perchè è questo proporzionale all'ampiezza delle circonferenze. Quindi ne viene che la velocità della ruota ove è applicata la potenza sta alla velocità della ruota ove si collega la resistenza come il prodotto

dei numeri de'denti delle ruote (mosse) sta al prodotto de' numeri delle pinne de' rocchetti (o denti delle ruote motrici). In luogo delle velocità si sogliono indicare i numeri dei giri N della prima e N' dell'ultima ruota, e per avere il loro rapporto si dividerà il prodotto p dei numeri de' denti che appartengono alle ruote mosse, per il prodotto p' dei numeri dei denti delle ruote motrici, cioè si avrà

$$\frac{N'}{N} = \frac{p}{p'}$$

Così se abbiamo due ruote e due rocchetti o lanterne, e le ruote abbiano 48, o 36 denti, e le lanterne 6, e 9 fusi sarà

$$\frac{N}{N'} = \frac{p}{p'} = \frac{48.36}{6.9} = \frac{1728}{54} = 32$$

251. ***Ruote dentate nello stato prossimo al moto.*** — Oltre alle resistenze provenienti dalla rigidezza delle funi, e dagli attriti degli assi di cui si è tenuto discorso parlando dell'asse nella ruota (247), devesi nelle ruote dentate tener conto anche dello sfregamento tra i denti per stabilire l'equazione dello stato prossimo al moto. L'attrito di due ruote che s'ingranano può aversi per una forza tangenziale, e perciò può nella formula comprendersi facendo un piccolo aumento alla resistenza, ovvero al suo braccio di leva, il quale aumento per ogni ingranaggio si considera eguale alla diciottesima parte.

Siano C, C' i centri delle due ruote, e rimanga in O il contatto tra il dente della ruota e il fuso della lanterna: sia F che io rappresento con OF lo sforzo che fa il dente contro il fuso: decomposta la forza F in due una OA normale, ed una OB parallela a CO si avrà che nello stato prossimo al moto il momento della potenza, la quale agisce per far girar la ruota che ha il centro in C, è eguale al momento della reazione OA che si fa sul raggio CO, con più il momento dell'attrito tra il dente e il fuso che proviene dalla pressione OB, vale a dire è $= OC\ (OA + f.\ OB)$ $= F\ .\ OC\ (\cos.COE + f \operatorname{sen} COE)$. Questa espressione però è variabile perchè dal punto nel quale il dente comincia ad appoggiar sul fuso, fino al punto in cui lo abbandona, variano la lunghezza CO e l'angolo COE. Ben piccola è la variazione di CO e si potrà sempre nella pratica prendere il suo massimo valore che è la lunghezza del raggio della ruota aumentata di quella del dente. E per il binomio compreso tra parentesi cercheremo il massimo valore con i noti metodi, il quale si ottiene quando è $tang$ COE $= f$ ovvero quando $\cos.COE + f \operatorname{sen}.COE = \sqrt{1+f^2}$ Ne vien dunque la regola di aumentare per ogni ingranaggio la forza, o il respettivo braccio di leva per la quantità $\sqrt{1+f^2}$, la quale combina coll'indicata regola di pratica, giacchè suol'essere $f = {}^1/_3$ ed allora è $\sqrt{1+f^2} = {}^{19}/_{18}$.

252. ***Argani e ruote dentate in moto.*** — Dalla forza acceleratrice si conosce la legge di movimento che prenderà la macchina. Deve questa forza essere eguale a zero affinchè il moto divenga uniforme, ma è eguale a zero nel caso dell'equilibrio, onde la stessa relazione che abbiamo stabilito tra la potenza e la resistenza per l'equilibrio, e per lo stato prossimo al moto deve aver luogo per il moto uniforme della macchina. Mantenendosi costante la forza acceleratrice il moto è uniformemente accelerato, ed essendo essa variabile anche il moto è vario. Per dare anche qui un'esempio della ri-

cerca di questa forza supporrò che non vi sieno resistenze passive, e chiamando a il raggio della ruota, b quello del cilindro, P il peso che serve da potenza, Q quello che serve da resistenza, il momento delle forze agenti sarà $Pa - Qb$, e il momento d'inerzia della macchina carica sarà

$$I + \frac{P}{g} a^2 + \frac{Q}{g} b^2$$

e il rapporto fra queste due quantità darà la forza acceleratrice angolare, la quale moltiplicata per a o per b determinerà la forza acceleratrice effettiva (179, 180) della potenza o della resistenza, cioè esse saranno

$$a \frac{Pa - Qb}{I + \frac{P}{g} a^2 + \frac{Q}{g} b^2} \qquad b \frac{Pa - Qb}{I + \frac{P}{g} a^2 + \frac{Q}{g} b^2}$$

Dagli elementi che compongono queste formule è facile decidere se il loro valore è costante o variabile, e perciò la natura del movimento. Nel caso particolare da me supposto si vede che il moto deve essere uniformemente accelerato; ma se invece della ruota si avesse una manovella o un tamburo per modo che il braccio di leva a variasse nelle differenti sue posizioni (248) il movimento sarebbe vario. Dietro quello che ho detto nel caso più semplice si comprende come dirigere il calcolo anche nel caso che si debba tener conto delle resistenze nocive.

Uno studio particolare merita il caso della manovella, e procedendo colla formula sopra stabilita dovrei porre invece del gomito a il suo prodotto per il coseno dell'angolo che esso fa colla direzione orizzontale (248), ma svilupperò questo soggetto in seguito valendomi del principio della trasmissione del lavoro meccanico. Aggiungo qui che stabilita la formula della forza acceleratrice può essa servire per dirigere la costruzione della macchina, o la sua disposizione più vantaggiosa. Vogliasi a cagion d'esempio determinare il raggio a affinchè sia il peso Q sollevato colla massima velocità: dovremo eguagliare a zero la derivata della forza acceleratrice presa nell'ipotesi di a variabile dopo avere sostituito in luogo del momento d'inerzia I della macchina la sua espressione ove probabilmente entrerà a.

253. *Altre combinazioni di argani.* — Si combina l'argano con la leva, con la puleggia, e con le altre macchine semplici. Per combinarlo colla leva, si fa dentata a guisa di sega la sua ruota GC (Tav. X. fig. 8) ed al cilindro CN si attacca la resistenza. Una leva AB imperniata in O è fatta muovere da una o due potenze che agiscono ai suoi estremi, e con due uncini DG, EF prende nelle oscillazioni successive di dente in dente la ruota e la costringe a girare. L'effetto della macchina si calcola moltiplicando quello della leva per quello dell'argano. chiamato X lo sforzo che si fa in G dall'uncino sulla ruota dentata, e supposto che questo solo uncino sia in azione condurremo RO perpendicolare a DG, e si avrà per la leva X . RO = P . AO, e per l'argano Q . NC = X . GC onde dedurremo P : Q :: NC × RO : GC × AO.

È frequente la combinazione dell'argano colle carrucole, sia per sollevar pesi in luoghi ove non si può agire che dall'alto (Tav. X. fig.10), sia per agire a distanza sù delle taglie (Tav. X. fig. 11), sia per dare una più comoda direzione alla fune che collega gli argani (Tav. X. fig. 12), come si fa nel meccanismo del sostegno pei navicelli ec. Spessissimo vedesi il verricello combinato colla pressa a vite,

e particolarmente nei frantoj da olio, negli strettoj da pasta ec.

Il Martinetto (Tav. X. fig. 9) si usa per sollevar pesi sulla testa di una riga dentata o cremagliera che viene inalzata con un arganetto, cioè con un rocchetto dentato unito ad una manovella. Si fanno dei martinetti composti ove due arganetti a ruote dentate si combinano, ed il secondo inalza la cremagliera. Dalla dottrina degli argani si deduce il rapporto tra la potenza e la resistenza.

Del Piano inclinato.

254. *Piano inclinato.* — Più volte siamo tornati a parlare del piano inclinato, ma adesso non lo consideriamo particolarmente inclinato all'orizzonte, in un aspetto più generale come inclinato alla resistenza, e per conseguenza come una macchina alla quale se la resistenza è un peso potranno applicarsi le dottrine che abbiamo stabilito per i gravi in equilibrio e in moto sui piani inclinati; se è altra forza potranno applicarsi gli stessi principj e le stesse formule solo che si cambj il peso nella resistenza che agisce sulla macchina. Un grave il cui centro di gravità è in G (Tav. XI. fig. 1) sia tenuto in equilibrio sul piano inclinato AB che fa colla resistenza GQ un angolo GQR che noi chiameremo m; e sia P la potenza che agisce nella direzione PK, e incontra in K il piano inclinato coll' angolo BKP $= n$. È chiaro che 1.° la resultante RG dovendo per l' equilibrio essere distrutta intieramente dalla reazione del piano inclinato gli dovrà essere normale. 2.° Il punto R su cui cade la resultante sarà il punto fisso d'appoggio intorno al quale debbono farsi equilibrio la potenza e la resistenza, e perciò condotte le normali Rb sulla direzione di Q, e Ra sulla direzione di P dovrà essere per l'equilibrio P . Ra = Q . Rb: quindi anche il piano inclinato si lega alla leva. 3.° Tenendo conto anche dell'attrito la resultante potrà essere inclinata al piano per un'angolo minore di quello che è limite d'attrito. 4.° Nello stato prossimo al moto decomponendo tanto la potenza quanto la resistenza in una forza normale ed in una parallela al piano, quindi eguagliando la differenza delle forze parallele alla summa delle altre normali moltiplicata per il coefficente d'attrito, si trova come di sopra abbiamo avvertito (144)

$$P = Q \frac{\cos m + f \operatorname{sen} m}{\cos . n - f \operatorname{sen} n}$$

5.° Quando la potenza sarà normale alla resistenza avremo

$$P = Q \frac{1 + f \operatorname{tang} m}{\operatorname{tang} m - f}$$

Nel caso che la potenza tragga parallelamente al piano verrà

$$P = Q\,(\cos . m + f \operatorname{sen} m)$$

Questi sono i valori che mettono la potenza in atto di sollevare la resistenza, mentre quelli che bastano ad impedire la discesa del corpo sono gli stessi cangiando il segno al coefficente f.

6.° Nel caso che si consideri l' attrito, la disposizione più vantaggiosa per la potenza non è la direzione parallela al piano, ma quella che diverge dal piano con un angolo che ha f per *tang*, poichè cercando col metodo de' massimi e de' minimi il valore minimo di P nel caso che sia variabile l'angolo n trovasi

$$\operatorname{tang} n = -f.$$

7.° Non esistendo attrito la formula precedente diviene

$$P = Q \frac{\cos . m}{\cos . n}$$

lo che mostra che in tal caso la potenza deve stare alla resistenza come il cos. dell'angolo che fa il piano colla direzione della resistenza al cos. dell'angolo di inclinazione della potenza col piano. Si rileva anche che tanto minor forza si richiederà per l'equilibrio, quanto sarà minore il rapporto tra i due detti coseni, e che se la direzione della potenza sarà parallela al piano avremo $P = Q\, cos\, m$ cioè avrà essa il minor valore possibile; e finalmente che se la direzione della potenza sarà normale a quella della resistenza avremo

$$P = Q\, \frac{cos.\, m}{sen.\, m} = Q\, cot.\, m$$

cioè la potenza sta alla resistenza come l'altezza del piano inclinato alla base.

255. *Lavoro sopra il piano inclinato.* — Abbiam detto che quando la potenza è parallela al piano si ha

$$P = Q.\, cos\, m = Q\, \frac{AV}{AB}$$

e questa è la situazione in cui si agisce ordinariamente quando si usa il piano inclinato come una macchina. Da quella formula abbiamo

$$P.\, AB = Q.\, AV$$

cioè il lavoro della potenza è lo stesso che quello della resistenza. Quando si considera l'attrito la formula sopra trovata per la potenza parallela al piano si riduce

$$P = Q\, \frac{AV}{AB} + fQ\, \frac{BV}{AB}$$

dalla quale rileviamo

$$P.\, AB = Q.\, AV + fQ.\, BV$$

cioè il lavoro della potenza supera quello della resistenza della quantità $fQ.\, BV$, che è il lavoro dell'attrito.

256. *Uso delle ruote sul piano inclinato.* — Supponiamo che la resistenza graviti al centro di una ruota il cui raggio sia R, ed r sia il raggio del suo asse. Allora la forza $P\, cos n - Q\, cos m$ tende a far girare il centro della ruota attorno al punto dove la ruota stessa si appoggia sul piano, e il suo momento per indurre questa rotazione è

$$= PR\, cos n - QR\, cos m$$

A tal rotazione si oppone l'attrito di seconda specie della ruota sul piano, e quello di terza specie sull'asse della ruota; il primo sarà

$$f''P\, sen\, n + f''Q\, sen\, m,$$

ed il secondo $f'''P\, sen n + f'''Q.\, sen.\, m$ indicando con f'', f''' i respettivi coefficenti d'attrito. L'uno agisce col momento $f''PR\, sen\, n + f''QR\, sen\, m$, e l'altro col momento

$$f'''Pr\, sen.\, n + f'''Qr\, sen\, m.$$

Onde per l'equazione dello stato prossimo al moto avremo

$$P.\, R\, cos\, n - QR\, cos\, m = f'''Pr\, sen\, n + f'''Qr\, sen\, m + f''PR\, sen\, n + f''QR\, sen\, m$$

cioè

$$P = Q\, \frac{R\, cos m + (f'''r + f''R)\, sen\, m}{R\, cos m - (f'''r + f''R)\, sen\, n}$$

la quale equazione posta sotto la forma

$$P = Q\, \frac{cos m + \frac{f'''r + f''R}{R}\, sen m}{cos n - \frac{f'''r + f''R}{R}\, sen n}$$

mostra che differisce il caso in cui si usano le ruote, da quello in cui si striscia il corpo sul piano nell'avere

$$\frac{f'''r + f''R}{R}$$

invece del coefficente d'attrito di prima specie f. Lo che porta una diminuzione ben notabile nella potenza, e principalmente per essere il raggio della ruota maggiore di quello dell'asse per le differenze che si hanno negli attriti delle diverse specie. In questo caso in cui si adoprano ruote la più vantaggiosa direzione per la potenza che deve alzare il peso sarà quando

$$tang\, n = -\frac{f'''r + f''R}{R}$$

si ha poi lo stesso vantaggio tanto quando il peso è portato da una ruota che quando si usano più ruote eguali perchè repartendosi tra le ruote la pressione del peso, la somma degli attriti sarà sempre la stessa. Questi calcoli sono applicabili alla puleggia usata come ruota nel modo che ho detto al §. 241.

257. *Nuova macchina chiamata ginocchio.* — Questa macchina si compone di due verghe rigide AO, OB congiunte in O a cerniera onde possa montare e scendere il punto B lungo la verga AB. La potenza P viene applicata alla verga AO per mezzo del manico MN, e tiene in equilibrio la resistenza Q che è in B. Rappresenta essa una combinazione della leva e del piano inclinato, siccome vedremo essere anche nella vite, e può servire per produrre con moderata potenza pressioni molto grandi, come pure per dirigere convenientemente l' azione della potenza. Chiamando a la distanza della direzione della potenza dal punto A, e chiamando X la forza da applicarsi ad AO nella direzione di BO per fare equilibrio a detta potenza, si avrà che il braccio di leva della forza X è AO. *sen* AOB, e perciò la teoria della leva darà X.AO *sen* AOB = P. a. Allora la forza X agisce sovra AB come in un piano inclinato, e si ha per l' equilibrio X : Q :: 1 : *cos* OBA. Onde rileviamo

$$P = \frac{Q . AO \; sen . AOB}{a \; cos \; OBA}$$

cioè la potenza è minore quanto più si avvicina a due retti l' angolo del gomito, e quanto è più piccolo l' angolo B.

Che se poniamo eguali i lati AO, BO del gomito siccome è

$$sen \; AOB = 2 \; sen \; OAB \; cos \; OAB$$

ne viene $P = \frac{Q . 2 \; AO . sen \; OAB}{a} = Q \frac{2b}{a}$

essendo b la freccia OI del gomito. Dunque nel gomito isoscele in equilibrio la potenza sta alla resistenza come il doppio della freccia del gomito sta al braccio di leva della potenza. Facile è tener conto del peso del gomito, e più interessa farsi idea delle pressioni che soffre l' asse AB nei punti A, B. Decomposta la potenza P di cui si è determinato il valore in due forze una normale e l' altra parallela alla riga AO, la prima componente dà una trazione nel senso AO e l' altra moltiplicata per MO, e divisa per AO dà una compressione in A normale ad AO; e colla dottrina del parallelogrammo rimane facile ottenere la resultante di queste due pressioni che si fanno nel punto A. Nel punto B la pressione nasce dalla resultante delle due forze X, Q già determinate. Conosciute le pressioni nei punti ove si effettua il movimento si potranno conoscere gli attriti, e quindi la relazione tra la potenza e la resistenza nello stato prossimo al moto.

Del Cuneo.

258. *Cuneo* — Il cuneo è un prisma triangolare (Tav. XI fig. 2) che si usa per introdurlo fra due parti di un solido le quali devono separarsi. Volendo adoprarlo a tale oggetto si pone in una fessura già formata la parte tagliente c, e si fa riposare colle sue faccie a, a sulle superficie che si devono allontanare l' una dall' altra. Chiamasi testa del cuneo l' altra faccia b, sulla quale agisce la forza che lo fa discendere nella fessura; e noi supporremo questa forza agente in direzione perpendicolare, essendo facile da questo caso rilevare l' effetto della forza obliqua.

259. *Equilibrio del cuneo.* — L' og-

getto della forza P che agisce sulla testa della macchina è di vincere le resistenze che la materia oppone al moto del cuneo, e queste resistenze essendo respettivamente perpendicolari alle superfici sulle quali si esercitano possono rappresentarsi con due forze Q, Q′ (Tav. XI fig. 4) applicate in a, b. Onde per l'equilibrio la forza P dovrà rimanere eguale e direttamente opposta alla resultante delle due Q, Q′. Fatto il parallelogrammo IYXZ potrà essere IY = Q, IZ = Q′, e dovrà aversi IX = P, e la condizione dell' equilibrio sarà P : Q : Q′ :: IX : IY : IZ. E siccome i triangoli ABF, IYX sono simili, quella relazione si trasformerà nell' altra P : Q : Q′ :: AB : AF : FB. Posto che il punto a non possa muovèrsi che allontanandosi da b sulla direzione ab si domanderà quanta è la forza colla quale tende a farsi quest' allontanamento: rappresenteremo IY con aQ, e IZ con bQ′, e fatti i due parallelogrammi agQi, bkQ′l si avrà rappresentata da ag la forza colla quale tende ad essere smosso il punto a, e con bk quella che smuove il punto b. Dunque nel caso che i due punti a, b appartengano ad un medesimo solido lo sforzo che essi fanno per allontanarsi essendo dato dalla tensione che riceverebbe una fune la quale servisse a collegarli verrà determinato dalla più piccola delle due forze ag, bk, e la differenza di queste forze tenderà a muovere tutto il solido. Ora alcune osservazioni si presentano secondo la forma del cuneo: quando il triangolo ABF è rettangolo in B, e i punti d'appoggio ab rimangono sopra una retta parallela alla testa è impossibile che la potenza P concorra nel punto ove si riuniscono le due direzioni di Q, Q′ se pure il punto d' incontro non è in a. Nel caso che il cuneo presenti in ABF un triangolo isoscele (Tav. XI. fig. 5) avremo Q = Q′, e il punto I sarà sull'asse del triangolo, e starà P : Q :: AB : AF, parimente saranno eguali le due forze che tendono ad allontanare i punti a, b, ed il triangolo agQ essendo simile all' altro BNF avremo gQ : ag :: NF : BN, onde avremo P : ag :: AB : FN cioè la potenza e lo sforzo per separare le parti staranno come la testa del cuneo all' altezza. Di qui ne viene che comunemente si usa il cuneo isoscele, e si fa la testa molto stretta, o l' angolo tagliente molto acuto.

260. *Effetto dell' attrito sull' azione del cuneo.* — Per farsi idea del vantaggio che nelle arti può ottenersi dal cuneo deve anche porsi mente all' attrito che si fa sulle sue faccie. Questo è proporzionale alle pressioni Q, Q′, e quando esse sono grandissime in confronto alla potenza P, anche l' attrito diverrà molto grande, e darà sempre un' effetto che deve esser vinto dall' azione della potenza. È facile conoscere che quando il cuneo è isoscele e i punti d' appaggio a, b sono sovra la retta parallela alla testa AB, dovrà la resultante delle resistenze passare per l' asse del triangolo isoscele. Preso Fa' proporzionale all' attrito fQ, e sulla direzione di AF, e lo stesso fatto per Fb' si avrà nella diagonale Ff' la resultante dell' attrito che deve vincersi, e poichè il triangolo F$b'o$ è simile all' altro ANF rileviamo

$$Ff' = 2Fo = 2Fa' \frac{NF}{AF}$$

Perciò nello stato prossimo al moto dovrà essere

$$P = Q\frac{AB}{NF} + 2fQ\frac{NF}{AF}$$

Nel caso più favorevole sarà $f = {}^1/_{10}$,

e supposto che la forma del cuneo ci dia $AB = {}^1/_{10}\ NF$, sarà $\frac{NF}{AF}$ prossimamente eguale all'unità. Quindi $P = {}^1/_{10}\ Q + {}^1/_5\ Q = {}^3/_{10}\ Q$ vale a dire che anche nel caso il più favorevole l'attrito triplica la resistenza del cuneo.

Mentre nella macchina in moto si ha molto danno dall'attrito, grande è il vantaggio che esso presenta per la macchina in equilibrio giacchè impedisce che essa ritorni indietro quando è stata affondata in un solido ed ha cessato di agirvi la potenza. E poichè l'affondamento del cuneo si fa per l'urto, anche l'attrito riman vinto più facilmente. Quando un martello batte la testa del cuneo devono distinguersi due tempi: uno corrisponde alla durata dell'urto cioè all'intervallo compreso tra l'istante in cui il martello batte e l'istante in cui cessa la compressione fra il martello e il cuneo; l'altro ne viene in seguito e comincia quando il corpo premuto fa nascere una reazione. Si vede che partendo immediatamente dal lavoro del martello o dalla metà della sua forza viva una gran parte di questo lavoro è consumato inutilmente nella deformazione del cuneo e dall'inerzia della macchina, le quali perdite non avrebbero luogo se il cuneo fosse sottoposto a semplici pressioni; in parte si diminuiscono quando il cuneo è di materia ben dura come di ferro.

Un caso molto rimarcabile è quello nel quale dopo essere affondato in un corpo per esempio in un legno ritorna fuori naturalmente da per se per effetto delle pressioni cagionate nei punti d'appoggio. Supponiamo che sia il cuneo isoscele avremo equilibrio tra la resultante delle pressioni, e l'attrito quando sarà

$$Q\frac{AB}{AF} = 2fQ\frac{NF}{AF}$$

ovvero $AB = 2fNF$. Dunque se AB diverrà più grande di $2fNF$ il cuneo verrà spinto fuori del corpo. Supponiamo come sopra $f = {}^1/_{10}$ allora la testa del cuneo dovrà essere minore di ${}^1/_5$ della sua altezza affinchè possa penetrare nel corpo. Questo resultato dà anche il modo di misurare l'attrito perchè se per una certa apertura dell'angolo del cuneo esso non s'inalza nè si abbassa quando si spinge nella sostanza, ciò sarà prova che è $f = \frac{AB}{2NF}$

261. *Pressa a cuneo.* — La pressa a cuneo ridotta alla sua costruzione la più semplice consiste in un cuneo troncato ABFE (Tav. XI fig. 6) che scorre tra due blocchi di cui uno $ahgf$ riposa contro un appoggio OG fisso e l'altro $bikl$ trasmette l'azione del cuneo contro la sostanza H che vuol premersi. Questa reagisce e produce la resistenza Q e l'attrito fQ le quali forze devono essere vinte dalla potenza P. La medesima pressione e il medesimo attrito han luogo sul pezzo fisso $afgh$ contro il lato AE del cuneo. Ciò posto conviene che il lavoro della potenza P sia eguale a quello della forza colla quale si preme il corpo, con più il lavoro dei due attriti che han luogo sui lati AC, BC egualmente inclinati, e siccome è fisso il pezzo $afgh$ il cammino descritto dai punti del cuneo ABEF sarà parallelo ad ah, e quando la testa AB abbia presa la posizione A'B' il corpo si sarà compresso per $B'B'' = AA''$; parimente il cammino percorso della direzione di AC e di BC sarà $AA' = BB''$ e il cammino percorso perpendicolarmente alla testa AB sarà DD' o l'altezza verticale x del triangolo $AA'A''$. Dun-

que il lavoro della resistenza opposta dalla reazione del corpo sarà la forza con la quale si preme che io chiamo P′ moltiplicata per AA″; i lavori dei due attriti saranno $2fQ.AA'$ quello della potenza $P \times DD'$. Ma DD′ è l'altezza del triangolo A′A′A″ il quale essendo simile ad ABC rileviamo

$$DD' = \frac{DC}{AB} AA''.$$

Come ancora

$$AA' = \frac{AC}{AB} AA'';$$

inoltre la resistenza Q può aversi per componente della P′ che è rappresentata da *sn* ipotenusa del triangolo *snm*, simile all'altro BCD, e si ha la proporzione $sn : sm :: BC : AC : CD$ dalla quale posto Q invece di *sm* che lo rappresenta ottenghiamo

$$Q = P'.\frac{CD}{AC}$$

e sostituiti questi valori nei lavori sopra indicati abbiamo

$$P.AA''\frac{CD}{AB} = P.AA'' + 2fP'\frac{CD}{AB}.AA''$$

conosciuta perciò la compressione AA″ potrà aversi a ciascun' istante il lavoro della potenza P, il quale evidentemente supera l'altro della resistenza P′. Divisa l'espressione precedente per AA″, e posta la reazione P′ del corpo da pressarsi $= 1000^k$ e che la testa del cuneo sia $^1/_{20}$ della sua lunghezza, e che sia $f = {}^1/_{10}$ troviamo

$$P = \frac{1000}{20} + \frac{2.1000}{10} = 50^k + 200^k = 250$$

cioè esser molto piccola la potenza in confronto della resistenza.

Si conoscono due modi differenti per disporre i cunei nella pressa. Il primo consiste nel collocare in un bacino dei cunei (Tav. XI. fig. 7) *b,b′,b″*, colla parte stretta in alto, e fra questi porne altri colle *a,a′*,... colle parti strette in basso, e comprimere la materia il tra la parte del bacino e l'ultimo cuneo, col battere soltanto i cunei superiori. Nell'altro (Tav. XI. fig. 8.) con una forte staffa due pezzi solidi collegati insieme formano un telajo dentro al quale stanno le due serie dei cunei, e la materia da comprimersi. Questa si comprime col battere l'una e l'altra serie de cunei.

Si fa uso anche di un'altra pressa (Tav. XI fig. 9) che ha molta analogia con quella a cuneo, ma mi piacerebbe piuttosto chiamare pressa ad eccentrico perchè consiste in una ruota sormontata da un cuneo piegato in cerchio; la quale gira attorno al suo asse che è fisso, e comprime coll'ingrossatura del cuneo la sostanza che li è posta di contro. Su questo principio sono costruite alcune presse da stampatori.

262. *Diverse forme e combinazioni di cunei.* — Si ha nei chiodi esempio di cunei piramidali, e in forma di coni; vi si ravvisano più combinazioni di cunei, e sebbene sieno moltiplicate le resistenze col numero delle facce sempre però sarà loro applicabile la dottrina del cuneo isoscele, cioè la potenza starà alla resistenza come il diametro della testa del cuneo stà alla lunghezza di esso.

Negli strumenti da taglio si hanno infiniti esempi di cunei, e lo studio dell'inclinazione delle facce è di grandissimo interesse per l'operaio. Quando la materia da tagliarsi è durissima come sarebbe il ferro a freddo si usano cesoie con il taglio di 90.° si fa meno grosso il taglio in altri strumenti destinati a materie meno resistenti, e perciò il ferro della pialla lo ha di 50.° ed i coltelli, i rasoj lo hanno acutissimo.

La sega presenta nei denti dei cu-

nei, e la lor forma spiega il vantaggio che si ha nel moto col quale si adopra. Si usano denti piccolissimi e molto vicini per segare i corpi duri perchè ogni dente si impegni a portar via poca materia del corpo, e all'incontro quando si tratta di segare corpi poco resistenti si fan più grandi i denti più sottili ed incurvati.

Sono superficie guarnite di piccoli cunei anche le lime, e le raspe ordinariamente situati in modo che facciano fila per molti versi e tagliati con inclinazione di 45.° coll'asse dello strumento. Come anche le polveri che si usano per lavorare le pietre agiscono a guisa di cunei.

Della Vite.

263. *Modo di descrivere la vite.* — Alla superficie di un cilindro (Tav. XI. fig. 10) ABB'A' intendasi avvolto un triangolo rettangolo ABC; l'ipotenusa AC descriverà su quella superficie una curva che la cinge più volte e che sempre mantiene la stessa inclinazione al lato AB. Questa curva chiamasi *elice*. Che se un rettangolo *a*, o un triangolo, nel tempo che si genera l'elice percorra l'ipotenusa AC mantenendosi col suo lato in contatto colla superficie cilindrica e stando sempre perpendicolare alla superficie verrà generato un rilievo quadrato o triangolare che cinge la superficie cilindrica, il quale chiamasi verme della vite. Ogni punto del rettangolo *a*, o del triangolo genera un elice, e però dicesi che l'asse del verme è un elice. Facile è intendere che ogni sezione fatta nel verme da un piano che passa per l'asse del cilindro sarà eguale alla superficie generatrice, e che la distanza tra un giro e l'altro dell'asse del verme presa nella direzione di quel piano sarà per tutti i giri la medesima; questa si chiama passo della vite. Ordinariamente nelle viti il verme è triangolare (Tav. XI. fig. 12) e si fa quadrato (Tav. XI. fig. 11) in quelle metalliche che si costruiscono per servire a sforzi molto grandi. Alla vite sempre va unito un pezzo solido il quale ha un foro del diametro del cilindro della vite, che è cinto da un incavo eguale al rilievo della vite stessa e vien detto madrevite. Perciò la vite può muoversi nella madrevite, e si usa ora tenendo fissa la vite e movendo lungo essa la madrevite, ora tenendo fissa questa e movendo la vite. In ambedue i casi si adopra una leva per facilitare il moto, la qual leva nelle piccole viti si riduce ad una maggiore estensione che si dà alla testa della vite.

264. *Relazione tra la potenza e la resistenza nell'equilibrio della vite, fatta astrazione dall'attrito.* — La potenza P si applica all'estremità della leva in direzione perpendicolare a questa e nel piano in cui può rotare, e la resistenza Q agisce nella direzione dell'asse del cilindro; e perciò sono una perpendicolare all'altra, e mentre la prima fa percorrere un giro alla leva si inalza la vite e la resistenza per un passo e viceversa mentre la resistenza facesse percorrere un'intiero giro alla vite o l'abbassasse d'un passo, la potenza verrebbe mossa per l'intiera circonferenza che descrive l'estremità della leva. Dunque nell'equilibrio astratto dovendo il lavoro della potenza essere eguale a quello della resistenza prenderemo il lavoro che esse farebbero in un intiera rivoluzione della vite, e chiameremo *h* il passo della vite, ed R la

leva ed avremo per il lavoro della potenza $2\pi R . P$ e per quello della resistenza $Q . h$, e sarà $P . 2\pi R = Q . h$ ovvero $P : Q :: h :: 2\pi R$ cioè nell'equilibrio astratto della vite la potenza starà alla resistenza come il passo della vite alla circonferenza che la potenza tende a descrivere. Questo rapporto è indipendente dalla forma del verme della vite, e dal numero dei punti di contatto che esistono tra la vite e la madrevite finchè non si ha riguardo all'attrito. Per una medesima vite l'effetto della potenza è tanto più grande quanto è applicata più lontana dall'asse; e per due viti differenti la potenza essendo applicata alla stessa distanza dall'asse il suo effetto è tanto più considerabile quanto il passo della vite è minore, cioè i vermi sono più serrati.

Abbiamo considerato l'effetto della vite unita ad una leva che sarebbe di secondo genere; che se facciamo il braccio della leva eguale al raggio del cilindro che chiameremo r, allora avremo $P' : Q :: h :: 2\pi r$, e la potenza P' sarà applicata alla circonferenza del cilindro, ove si può pure intendere applicata la resistenza. Allora la vite presenta il caso di un piano inclinato che ha la potenza parallela alla base e la resistenza parallela all'altezza ed appunto h è l'altezza, e $2\pi r$ è la base e perciò ricorre la stessa teoria che abbiamo stabilito in tal caso per il piano inclinato. Possiamo dunque dire che la vite si compone di una leva di secondo genere e di un piano inclinato.

265. *Equilibrio della vite a verme quadrato e di grossezza trascurabile rapporto al diametro della vite, tenendo conto dell'attrito.* — Dalle due analogie sopra stabilite $P : Q :: h : 2\pi R$, $P' : Q :: h : 2\pi r$ si deduce l'altra $P : P' :: r : R$ che è quella che dà l'effetto della leva. Questa non viene alterata quando agisce l'attrito, ma si altera però l'altra $P' : Q :: h : 2\pi r$ che mostra l'effetto del piano inclinato. In luogo di questa per quello che abbiamo stabilito parlando del piano inclinato nel caso che la potenza è parallela alla base dovremo porre
$P' : Q :: 1 + f\,tang.\,m : tang\,m - f$
ove m rappresenta l'angolo che fa l'elice col lato del cilindro, e si ha

$$tang.\,m = \frac{2\pi r}{h}$$

Qui si prende per r il raggio dell'elice media perchè il piano inclinato considerato dalla prima all'ultima elice va variando di lunghezza. Sostituito questo valore sarà $P' : Q :: h + f 2\pi r : f 2\pi r - fh$. Quindi moltiplicata questa proporzione coll'altra che riguarda la leva abbiamo per l'equilibrio della vite tenuto conto dell'attrito $P : Q :: (h + 2f\pi r)\, r : (2\pi r - fh) R$ cioè

$$P = Q \frac{r}{R} . \frac{h + 2f\pi r}{2\pi r - fh}$$

Questo resultato può ritenersi per le viti a verme quadrato perchè la superficie superiore del verme può aversi per un piano la cui inclinazione è la stessa che quella dell'elice col lato del cilindro, ma per le viti triangolari conviene tenere a calcolo la inclinazione di quella superficie verso la parte tagliente del verme.

Si può domandare qual sia il lavoro dovuto all'attrito, e siccome noi sappiamo quale è quello della potenza e della resistenza rimane che isolati questi si rilevi dalla precedente formula l'altro dell'attrito. A tale oggetto la moltiplicheremo per $2\pi R$ ed avremo

$$2\pi R.P=Q\frac{h+2f\pi r}{1-\frac{fh}{2\pi r}}$$

$$=Qh+fQ\frac{h^2+4\pi^2 r^2}{2\pi r-fh}$$

Ora essendo il lavoro della potenza 2πR. P, e quello della resistenza Q.h sarà
$$fQ\frac{h^2+4\pi^2 r^2}{2\pi r-fh}$$
il lavoro consumato dall' attrito. In questa espressione scorgesi che il numeratore cresce più rapidamente del denominatore all' aumentare $2\pi r$ cioè la circonferenza del raggio dell'elice media, e perciò l' ampiezza del raggio r influisce su questa resistenza nociva, e quindi dovrà procurarsi di fare più picoolo che sia possibile il raggio dell' elice media dei vermi.

266. *Equilibrio della vite a verme quadrato di grossezza considerabile, avuto riguardo all' attrito.* — Avvertendo il sig. Dott. Luigi Ridolfi che la precedente teoria dedotta nella ipotesi di un verme che abbia l' altezza infinitamente piccola, non può essere nella pratica adottata per le viti che hanno il verme di notabil grossezza specialmente nel caso che il passo dell' elica sia considerabile ha ritrovata la seguente, e per l' amicizia di cui egli mi onora, mi ha permesso di arricchirne questo trattato. Siano OR′ = R′ ed OR″=R″ (Tav. XII. fig. 1) i raggi de' due cilindri interno ed esterno della vite. Se nello spazio compreso fra questi si imaginano eretti un' infinità di cilindri concentrici a distanza infinitesima fra di loro, ciascuno di essi taglierà la superficie del verme della vite secondo un elica, e le inclinazioni di due eliche successive differiranno infinitamente poco fra di loro. Siano r ed $r+dr$ i raggi di due cilindri ravvicinatissimi nei quali sono situate due di queste eliche. Essendo Q il peso totale di cui è aggravata la vite noi potremo rilevare la porzione q di tal peso che aggrava il segmento del verme che ha per base il quadrilatero mistilineo $mnps$, compreso fra i due raggi Om, ed Os, i quali fanno un' angolo infinitesimo $d\theta$; e ciò per mezzo della proporzionale $q:Q::d\theta:2\pi$: Che se poi vorremo determinare qual parte q' del peso q gravita sull' elemento della superficie del verme della vite che ha per projezione l'elemento piano compreso fra i due raggi Om, Qs, ed i due circoli ravvicinatissimi sopra indicati; osserveremo che la superficie di questo elemento è data dall'espressione $r\,dr\,d\theta$, mentre la superficie del quadrilatero $mnos$ è data dall'altra $\frac{1}{2}(R''^2-R'^2)\,d\theta$ per lo che dovrà aversi
$$q':q::r\,dr\,d\theta:\tfrac{1}{2}(R''^2-R'^2)\,d\theta$$
d'onde
$$q'=q\frac{2r\,dr}{R''^2-R'^2}=\frac{Q\,r\,dr\,d\theta}{\pi(R''^2-R'^2)}$$
Se adesso si rappresenti con h il passo della vite, la tangente dell' inclinazione dell' elica situata sul cilindro di raggio r al lato del cilindro stesso sarà $\frac{2\pi r}{h}$

e quindi la forza orizzontale φ che occorrerebbe onde far risalire il peso elementare q' lungo quell' elica sarebbe espressa da
$$\varphi=\frac{Q\,r\,dr\,d\theta}{\pi(R''^2-R'^2)}\cdot\frac{h+2f\pi r}{2\pi r-hf}$$
E se ricerchiamo la forza P′ che devesi applicare ad una manovella di raggio R onde ottenere l' istesso effetto, siccome dovrà essere
$$P'=\varphi\frac{r}{R}$$
così avremo
$$P'=\frac{Q}{R\pi(R''^2-R'^2)}\cdot\frac{2\pi fr+h}{2\pi r+hf}r^2\,dr\,d\theta$$

E per passare adesso all' espressione della forza totale P, o potenza da applicarsi alla manovella di raggio R, onde inalzare mercè la vite la resistenza Q, dovremo integrare rispetto ad r e rispetto a θ, ed estendere l' integrale per i debiti limiti, che sono $\theta = o$, e $\theta = 2\pi$, $r = R'$, ed $r = R''$. Eseguita l' integrazione rapporto a θ, e semplicemente accennata quella rapporto ad r si ritrova

$$P = \frac{2Q}{R(R''^2 - R'^2)} \left\{ 2\pi f \int_{R'}^{R''} \frac{r^3 \, dr}{2\pi r - hf} + h \int_{R'}^{R''} \frac{r^2 \, dr}{2\pi r - hf} \right\}$$

Ora si ha

$$\int \frac{r^3 \, dr}{2\pi r - hf} = \frac{r^3}{3.2\pi} + \frac{hfr^2}{2.4\pi^2} + \frac{h^2 f^2 r}{8.\pi^3} + \frac{h^3 f^3}{16.\pi^4} \, l.(2\pi r - hf)$$

$$\int \frac{r^2 \, dr}{2\pi r - hf} = \frac{r^2}{2.2\pi} + \frac{hfr}{4\pi^2} + \frac{h^2 f^2}{8\pi^3} \, l.\,(2\pi r - hf)$$

e quindi estesi questi integrali fra i notati limiti, sommati e fatte alcune riduzioni si ottiene

$$P = \frac{Q}{R} \left\{ \frac{2}{3} f(R'' + R') - \frac{2}{3} f \frac{R'' R'}{R'' + R'} + \frac{h(1 + f^2)}{2\pi} + \frac{h^2 f(1 + f^2)}{2\pi^2 (R'' + R')} + \frac{h^3 f^2 (1 + f^2)}{4\pi^3 (R''^2 - R'^2)} \, l \, \frac{2\pi R'' - hf}{2\pi R' - hf} \right\}$$

Equazione cercata dello stato prossimo al moto; la quale, come può dimostrarsi, dà sempre per la potenza un valore maggiore di quello somministrato dalla formula del paragrafo precedente quando si ponga $r = \frac{1}{2}(R'' + R')$ siccome la maggior parte degli autori suggerisce.

Si osservi che nella pratica il passo h della vite è quasi sempre un multiplo della grossezza del verme, la quale ordinariamente si fà eguale al risalto. Può dunque porsi

$$h = n(R'' - R')$$

ed allora ponendo anche

$$\frac{R'' + R'}{R'' - R'} = y,$$

la espressione precedente mediante alcune trasformazioni si riduce all' altra

$$P = Q \, \frac{R'' - R'}{R} \left\{ \frac{2}{3} fy + \frac{n(1 + f^2)}{2\pi} + \frac{1}{6} f \frac{y^2 - 1}{y} \left[\frac{3f(1 + f^2)}{\pi^2} \, \frac{n^2}{y^2 - 1} \left(1 + \frac{1}{2} \, \frac{nf}{\pi} \, l \left(\frac{y + 1 - \frac{nf}{\pi}}{y - 1 - \frac{nf}{\pi}} \right) - 1 \right] \right\}$$

la quale riesce veramente molto adattata pel calcolo numerico.

Avvertasi che quantunque non debba dirsi in generale che per tutti i valori che possono avere nella pratica le tre quantità n, f ed y la espressione posta tra le parentesi quadre abbia sempre un valore negativo, pure ciò si verifica nella maggior parte dei casi. E siccome inoltre quel valore resulta ordinariamente molto piccolo così nel calcolo numerico potremo quasi sempre arrestarci ai primi due termini della formula precedente, sicuri di ottenere per la potenza P un valore un poco maggiore del vero, il che non fa danno nella pratica mentre nuoce che se ne ottenga uno più piccolo quale resulta dalla formula ordinaria. Del resto la nuova formula avrà allora in suo favore anche la semplicità poichè dessa riducesi alla seguente

$$P = Q \, \frac{R'' - R'}{R} \left\{ \frac{2}{3} fy + \frac{n(1 + fy)}{2\pi} \right\}$$

E se a questa vogliasi restituire tutta la generalità rendendola indipendente dall' ipotesi che sia il passo della vite un multiplo del risalto del verme avremo allora

$$P = \frac{Q}{R} \left\{ \frac{2}{3} f(R'' + R') + \frac{h(1 + f^2)}{2\pi} \right\}$$

267. *Vite a verme triangolare.*—

Le grosse viti di legno che si usano nelle presse son sempre a vermi triangolari (Tav. XI. fig. 12); in queste l'inclinazione della superficie superiore del verme non può aumentare il lavoro della resistenza, ma solo quello dell'attrito. E per averne il valore almeno con approssimazione partendosi dalla dottrina del cuneo rileviamo che aumenta la pressione tra la superficie del verme, e quella dell'incavo della madrevite nella proporzione dell'altezza del triangolo che proviene dalla sezione del verme, al lato del medesimo triangolo (259); il qual rapporto indicherò colla lettera m, e perciò col solo porre nella formula della vite a verme quadrato

$$\frac{f}{m}$$

in luogo di f si riduce adattata alla vite triangolare. La quantità m è sempre minore dell'unità, e cresce a misura che sono più rilevati i vermi, e perciò scema allora il lavoro assorbito dall'attrito.

268. *Dimensioni che si usano nelle costruzioni delle diverse parti della vite.* — Conviene osservare che la quantità $2\pi r$ cioè la circonferenza, o il raggio medio dell'elice fa aumentare molto il lavoro distrutto dall'attrito (265). Quindi deve procurarsi di diminuire in ciascun caso questa quantità il più possibile senza niente togliere alla solidità della vite. Trattandosi di una vite a verme quadrato: sia bo (Tav. XII. fig. 2) il raggio dell'elice interno ao quello dell'elice esterna; si dà ordinariamente al risalto ab de' vermi una larghezza eguale alla loro altezza ad misurata nella direzione dell'asse, e si fa il vuoto eguale al pieno $ad = ad'$. Se la vite non ha che un verme sarà il passo $aa' = 2ab$ eguale cioè al doppio del rilievo, ma se avrà due o più vermi, il passo sarà quattro o più volte il rilievo. E qui dirò che si usano viti a più vermi per avere maggior resistenza senza variare il passo. Le viti a verme quadrato sogliono costruirsi di ferro con la madrevite di ottone. Quindi la loro resistenza si determinerà dalla rottura che si deve produrre perchè si rompa l'asse o perchè si spanino. Nel primo caso potendo senza perder l'elasticità sostenere per ogni millimetro quadrato $6,^k$ dovremo avere

$$6\pi . \overline{bo}^2 = Q \text{ cioè } bo = \sqrt{\frac{Q}{6\pi}}$$

Nel secondo caso, ammesso che la madrevite non debba abbracciar meno di tre giri successivi, la superficie di rottura sarà

$$\frac{6ab}{2} . 2\pi bo$$

valutiamo la sola metà per poter confrontare la resistenza respettiva coll'assoluta, e riteniamo che l'ottone resista quanto il ferro. Perchè questa rottura non accada prima dell'altra porremo

$3ab . \pi . bo = \pi . \overline{bo}^2$, ovvero $ab = {}^1/_3 bo$

Queste dimensioni non si hanno a ritenere per assolute, ma solo come approssimate. Nelle viti a vermi triangolari di legno non troppo duro si prende ordinariamente come triangolo generatore un triangolo isoscele rettangolo al vertice esterno; nel legno più duro come il sorbo, o anche nel metallo si usa un triangolo equilatero. Sempre il passo della vite è eguale alla base del triangolo se trattasi di una vite ad un sol verme. La grossezza della madrevite eguaglierà tre volte la base del triangolo, e l'altezza dei vermi è il terzo del raggio nel nocciolo. Negli strumenti di precisione le cui viti sono di ferro o d'acciajo si fa l'altezza del triangolo an-

che eguale a due o tre volte la base, e così anche nelle viti di ferro che si usano per i legni perchè si vuole più grande la superficie d' attrito. Si regolano le dimensioni assolute della vite secondo gli sforzi che se ne vogliono ottenere; così le viti di noce si fanno di 7 soldi di braccio in diametro per gli strettoj da vino, di 11 per quelli da olio d'oliva; e 13 soldi per quelli da olio di lino.

Facciamo qui un' applicazione numerica per dare idea dell' aumento di resistenza nociva cagionato nella vite per effetto dell' attrito. Usate le dimensioni di sopra accennate si avrà $bb = 5.ab$, $ba = 4ab$, e ben si vede non potersi usare la formula dedotta dall' ipotesi del verme di altezza trascurabile. Infatti sostituendo in essa per raggio medio

$$r = \frac{7.\,ab}{2} = \frac{7.\,h}{4}$$

e fatto $f = 0,17$ avremo

$$P = \frac{Qh}{R} \,.\, 0,449.$$

E sostituendo

$R' = {}^5/_4 h$, $R'' = {}^4/_2 h$; ed $f = 0,17$ nell' altra formula dedotta nella supposizione di un verme di altezza notabile abbiamo

$$P = \frac{Qh}{R} \,.\, 0,559,$$

che è un valore per la potenza assai più grande del precedente. Nella vite a verme triangolare ed equilatero si ha $m = {}^1/_2 \sqrt{3}$, e perciò la formula ultimamente usata ci dà

$$P = \frac{Qh}{R} \,.\, 0,656.$$

Che se non fosse esistito l'attrito si sarebbe in ogni caso avuto

$$P = \frac{Qh}{R} \,.\, 0,159;$$

lo che mostra essere nella vite a verme quadrato più che triplicata la potenza per l'attrito, e nella vite a verme triangolare resa essa quattro volte maggiore.

269. *Pressa a vite*. — È frequente l' uso della vite nelle presse, e siccome vi fa grandi sforzi, vuol' esser stabilmente fissata la madre vite, mentre la vite produce la pressione. Il torchio da stampatore suole avere una vite di metallo molto resistente, e perciò a quattro vermi, e con passo molto grande perchè con un quarto di giro circa ha da discendere quanto occorre per produr la compressione sulla carta che copre la composizione, e perchè rimanga facile ritornare indietro la vite. La pressa o strettojo da vino o da olio è composta di un castello formato da due coscie laterali A,A (Tav. XI. fig. 14) di quercia, le quali si fanno anche spesso di pietra che per mezzo di adattati incastri o con tiranti di ferro son collegate per la parte inferiore alla lucerna B, e per la superiore alla madrevite C. All' estremo della vite vi è la guida D che scendendo per l'abbassamento della vite percorre le incanalature che sono lungo le coscie, e comprime la materia che è nella gabbia tra essa e la lucerna. La gabbia per le vinacce è di legno con cerchi di ferro munita di strette e lunghe feritoje da dove sgorga il vino che scendendo nel solco della lucerna è poi raccolto in vasi. Quella per l'olio è di ferro assai grosso, e munita di fori rotondi per tutta la sua superficie convessa: si pongono nella gabbia le olive macinate a suoli separati da girelli intessuti di giunchi. Più spesso della gabbia per l'olio d' oliva si usano i castelli formati da sette buscole intessute di giunchi, e sgorga l'olio tra i fori di quel tessuto. Tanto per la pressa da vinaccie che per quella da olio si usa una stanga E la quale infilata

nella testa della vite fa da leva per girarla se non che nella prima non occorre alla stanga che la forza di più uomini, e nella seconda per le ultime strette si lega un forte canapo alla stanga il quale si tira col mezzo di un verricello o argano, e si moltiplica lo sforzo sulla vite. Ho veduto a Meleto dal sig. Marchese Ridolfi un util congegno per non sfilare ogni mezzo giro la stanga. Alla testa della vite esiste un collare di ferro girevole, e con due staffe ove si infila la stanga. Questo collare ha un gancio ad ancora F il quale può impegnarsi in adattate fessure che sono sovra un cerchio metallico *cc* fissato alla testa della vite, ed allora la stanga e la vite girano insieme. Alzato il gancio gira la stanga col collare e si riporta indietro senza che si muova la vite. Per sostanze molto elastiche come sarebbe nelle cartaje la massa dei feltri ove si spremono i fogli, conviene usare il cerchio metallico fissato alla testa della vite, e dentato all' esterno, onde un gancio che è collegato al castello della pressa possa fermarlo a misura che gira, ed impedire alla vite il ritornare indietro. La vite dovendo girare, e la guida prendendo soltanto un moto progressivo avrà luogo un' attrito fra la testa della vite, e il piano della guida, e quest' attrito indurrà nella guida una tendenza a girare, e genererà un' altro attrito fra l' estremità della guida, e gli incastri che sono nelle coscie del castello. Tutti gli attriti si diminuiscono con sapone o unto, ma per quello che si fa sulla guida giova far convessa la parte inferiore della testa della vite, la quale si centra fissandovi un bassissimo cilindretto chiamato bellico; che entra in un adattato incavo sul centro della guida. Quando si pressano dei panni o delle carte la testa della vite deve esser piana onde la guida scenda sempre in piano orizzontale. La valutazione del momento di questo attrito è la pressione moltiplicata per due terzi del raggio del circolo per il quale si fa il fregamento e per il coefficente d' attrito. Quella dell' attrito negli incastri ne viene dal precedente momento diviso per la metà della lunghezza della guida e moltiplicato per il coefficente d' attrito.

270. *Combinazioni di viti.* — Per ottenere una pressa più potente si combinano due viti insieme: impanando una (Tav. XI. fig. 15) nella madrevite della pressa, l' altra impana dentro la prima, e il passo di questa vite è ben poco più grande di quello della seconda, la quale sta fissata sulla guida. Il tira-tappi (Tav. XI. fig. 16) ha combinate due viti, volta una in senso contrario all' altra. Invita la prima dentro alla seconda e questa nella madrevite, la quale termina la campanella metallica da abboccarsi alla bottiglia che deve essere stappata. Allorquando la seconda vite è tutta dentro alla campanella, e la prima è tratta fuori, si avvita questa e scende il tira-tappi nel sughero: avvitata tutta la prima vite seguitando a far forza per girarla si svita e si solleva la seconda e trae fuori il tappo dalla bottiglia.

270. *Combinazioni della vite con altre macchine. Vite perpetua.* — Chiamasi vite perpetua quella che fatta a vermi rettangolari (Tav. XI. fig. 13) impana nei denti di una ruota. Porti la ruota un rocchetto al quale sia con una corda attaccato un peso: al girare della vite, gira la ruota, e si solleva gradatamente il peso. Questa combinazione della vite coll' argano si usa quando si vuo-

le un moto lento, ed uno sforzo grandissimo prodotto dà piccola potenza. Si usa anche per trasmettere moto ad un volante che serve da regolatore come è nel girarrosto, ed anche allora moltissima forza della ruota è vinta da una piccola azione del volante o regolatore. Supposto che non esista attrito si avrà equilibrio nella macchina allorquando starà la potenza alla resistenza come il passo della vite moltiplicato per il raggio del rocchetto alla circonferenza descritta dal gomito della manovella moltiplicata per il raggio della ruota. Questa conclusione viene direttamente dalla dottrina della vite e da quella dell'argano. Nè mi tratterrò a considerare gli effetti degli attriti che in questa macchina sono grandissimi perchè approssimativamente si deducono da quello che ho detto sulle notate macchine semplici.

Molti strumenti sono combinazioni del cuneo e della vite, come le viti affusate (Tav. XI. fig. 17) e il succhiello (Tav. XI. fig. 19). Il succhiello che ha quell' incavo detto il pasto (Tav. XI. fig. 18) presenta l'azione del cuneo non solo nella sua punta ma anche nella parte tagliente.

CAPITOLO IX.

Composizione delle Macchine.

271. *Parti che compongono le macchine, e classazione degli organi meccanici.* — In ogni macchina, siccome ho detto (*Introd.* 196) si distinguono tre parti, la prima che si dice il ricevitor della forza, la seconda che propriamente si chiama macchina, e la terza è lo strumento operatore. La seconda è quella che più deve adesso richiamare la nostra attenzione poichè dessa ha da trasformare il movimento del motore in quello che conviene al meccanismo, e all' operazione che si deve produrre col mezzo della macchina. Per farmi intendere con un esempio si voglia colla forza di una corrente di acqua segare del legname. In questa operazione la sega deve fendere il pezzo di legno da cima a fondo, e a prima vista si scorgerebbe un moto progressivo rettilineo da prodursi col moto pure progressivo rettilineo dell' acqua, onde nessuna trasformazione di moto sembrerebbe necessaria, e così sarebbe realmente quando si usasse per l'operazione un cuneo o un solo strumento tagliente; volendosi però comporre la macchina non si lascia lo strumento in balìa del motore, conviene guidarlo col mezzo di organi meccanici intermedi, il cui insieme fissato in adattati sostegni compone la macchina. Conviene convertire il moto rettilineo dell' acqua in moto rotatorio della ruota idraulica che fa da organo ricevitore, quindi con più organi intermedj trasformare il moto rotatorio della ruota idraulica in moto rettilineo alternativo, o di va e vieni, nella sega. Ho detto con più organi intermedj giacchè la velocità della ruota idraulica la quale suole esser piccolissima per accogliere il massimo di forza dell' acqua, non può convenir punto alla sega che ha da aver celerità per sodisfare al massimo lavoro utile. Di qui il bisogno non solo di organi commutatori di moto, ma anche di organi repartitori di moto. Occorrono an-

cora gli organi regolatori di moto come volanti ec., e il nostro esempio li fa comprendere onde il moto rotatorio possa essere equabile mentre si ha da convertire in moto di va e vieni che necessariamente ha un massimo e un minimo di velocità. In egual modo si comprende da quest' esempio che han da esistere organi comunicatori di moto, onde il moto della ruota idraulica si trasmetta a volontà dell' operante nella macchina, e così pure si abbia trasmissione di moto da un organo all' altro. Onde è che io distinguo gli organi meccanici in

Organi ricevitori di forza, come maneggi, ruote idrauliche, stantuffi delle macchine a vapore, vele per i venti ec.

Organi comunicatori di moto, cricchetti, cigne, ingranaggi, corde ec.

Organi commutatori di moto, come le manovelle.

Organi repartitori di moto, come le ruote dentate.

Organi regolatori di moto, volanti, pendoli ec.

Organi operatori, o strumenti.

Parleremo in seguito di queste diverse classi d' organi meccanici menochè dell' ultima cioè dagli organi operatori i quali consideriamo all' occorrenza di trattare di macchine particolari. Parimente la prima classe, la quale comprende gli organi ricevitori di forza non sarà esaminata qui nella sua totalità rimettendo ai trattati speciali ciò che riguarda i motori acqua, vapore, vento ed altri fluidi aeriformi.

272. *Dei motori animati.* — Sebbene della forza dell' uomo si faccia tanto maggiore economia quanto più l' incivilimento progredisce (*Int.* 194 196) contuttociò non poche operazioni con essa si compiono, e non solo adoprandola direttamente sullo strumento come col martello, colla scure ec. ma anche facendola agire sullo strumento indirettamente, cioè usandola come motore di qualche macchina. Spesso poi conviene far uso della forza dei cavalli o di altri animali, ed in generale sui motori animati, ai quali non si deve assegnare che un tempo molto limitato d'azione, possiamo stabilire: che chiamando P lo sforzo che se ne ottiene, V la velocità che prenderà l' animale nell' atto che produce quello sforzo, e T il tempo per il quale seguita ad agire, abbiamo PVT per il lavoro prodotto. L' osservazione insegna che si può aumentare uno dei fattori di questo prodotto più di quello che diminuisce l'altro. Convien dunque procurare di ridurre quel prodotto un massimo, e ciò non potrà conseguirsi se non si conoscono sperimentalmente le relazioni che esistono fra quei fattori. Per comprendere quali saranno i valori dei tre rammentati fattori P,V,T fa duopo avvertire che l' azione dell' animale può variare per molte circostanze.

I. È stato riconosciuto che il lavoro giornaliero dato da un' animale varia colla natura dell' opera. Io ho riportato altrove (*Int.* 200) l' espressioni numeriche dei lavori giornalieri prodotti dall' uomo e dal cavallo in diverse opere.

II. I diversi individui danno un differente lavoro, ed i numeri rammentati non possono aversi che come resultati medj. Particolarmente influisce la particolar destrezza acquistata dall' abitudine in una determinata opera. Quindi comprendesi perchè tanto utile si ritrovi nelle complicate lavorazioni fare eseguire un determinato lavoro, e sempre il medesimo, ad uno stesso individuo.

III. Varia la forza a seconda della diversa durata del lavoro. Quindi distinguesi col nome di forza assoluta quella che può farsi tutta ad un tratto, dalla forza permanente, che cioè si ha in un'azione continuata. In aggiunta ai sopra rammentati numeri, dirò che la forza assoluta dell'uomo in stringere con una mano, si valuta per 50.k
quella in sollevar pesi per . . 130.
quella per sostener pesi . . . 150.
quella per tirare orizzontalmente 50.
quella del cavallo per tirare . . 550.
La forza permanente dell'uomo secondo il Coulomb nel camminare orizzontalmente, o nel montare subisce una diminuzione presso a poco in proporzione del peso di cui si carica.

IV. Anche la diversa velocità fa variare la forza. Massimo è lo sforzo dell'animale quando sta fermo, allorchè cammina si fa tanto minore quanto più cresce la velocità, e vi è tal grado di velocità che lo rende incapace di qualunque sforzo. Partendosi da questi principj si sono stabilite diverse relazioni ipotetiche tra la velocità e lo sforzo. La più semplice è quella indicata da Bouguer nella quale si suppone che la forza P che può esser fatta da un' individuo in movimento, sta a quella p che egli può produrre quando è fermo, come la differenza che passa tra la velocità v che l'individuo può prendere senza carico, e quella V che prende col carico, stà alla prima di queste velocità. Ciò si esprime colla formula

$$P = p\left(1 - \frac{V}{v}\right) \text{ d'onde } PV = pV\left(1 - \frac{V}{v}\right)$$

indicherà il lavoro permanente, il quale diverrà un massimo allorquando è $P = \frac{1}{2} p$, e $V = \frac{1}{2} v$, e perciò quel lavoro massimo sarà $= \frac{1}{4} pv$.

275. *Degli organi che si usano per impiegare la forza dei motori animati.* — Non starò qui a rammentare le disposizioni più semplici che si hanno quando un'uomo agisce tirando una fune, o smuovendo una leva, o girando una manovella, e solo intendo di accennare quei mezzi che mi sembrano più interessanti per applicare la forza dei motori animati, rimandando coloro che vorranno estese cognizioni sopra di ciò al trattato della composizione delle macchine di Borgnis. Un'uomo che cammina in piano produce un' azione equivalente a 3540000.k trasportati ad un metro, ed è il massimo della sua azione, ma non si ha in questo caso sollevamento di peso. Per avere un vero lavoro meccanico conviene considerar l'uomo quando monta per un dolce pendio, ed allora produce 280800.km di lavoro che forma il massimo al quale conviene avvicinarsi nell'applicare la sua forza alle macchine. Coriolis nella sua opera sul calcolo dell' effetto delle macchine stabilisce che un apparecchio destinato a raccogliere il miglior possibile lavoro dell' uomo, debba richiedere che egli agisca coi muscoli delle sue gambe con una velocità simile a quella del camminare, e con uno sforzo eguale a quello che fa quando camminando porta il suo corpo. Onde i due migliori modi di applicare la forza dell' uomo sono, 1.° di farlo agire coi piedi contro una leva ch' ei spinga innanzi (Tav. XII. fig. 3. 4. 8), 2.° di farlo agire col suo peso all' estremità di una leva (Tav. XII. fig. 5. 6. 7. 8). La ruota a piuoli quando ha un meccanismo semplice come si usa nelle miniere dà per ogni uomo un lavoro equivalente a 259000.km, e quando il meccanismo è più complicato siccome suol

essere nella grue, che si usa nei porti di mare, questo lavoro riducesi a 245000^{km}. Il lavoro di un uomo che agisce in una ruota a tamburo può valutarsi 250000.^{km}. Il Cristian nelle sue osservazioni sull'impiego della forze dell'uomo nelle macchine conclude: siccome una macchina qualunque cognita o incognita trovata o da trovarsi non può certamente trasmettere maggior forza di quella che le è stata comunicata, e il limite di ciò che puossi ottenere in un lavoro continuo dall'impiego di un uomo nella macchina migliore, è di circa 12 a 15 kil. inalzati a 60, o 70 centimetri per secondo, i progetti di macchine mosse da un uomo, che sembrassero promettere un' effetto meccanico continuo, maggiore dell'esposto sono assolutamente chimerici. Aggiungo io che non può l'uomo lavorare per tutta l'intera giornata, e l'esperienza ha dimostrato che 280000^{km} in 10 ore sono il lavoro giornaliero che può dare un uomo che agisca con i muscoli delle gambe, e da 170000.^{km} a 220000.^{km} formano il limite del lavoro se egli agisce colle sue braccia, e questi limiti in nessuna macchina possono mai oltrepassarsi.

Tre sono i modi principali per impiegare la forza degli animali: il primo che è il più comune è la trazione orizzontale, il secondo è l'azione dei piedi anteriori e posteriori degli animali, il terzo è principalmente il loro peso. I due ultimi non sono quasi mai adoprati perchè molto inferiori al primo rispetto all'effetto utile. Il cavallo attaccato ad una leva orizzontale (Tav. XII. fig. 9) comunica il suo moto ad un' albero verticale che porta una ruota A di un grandissimo diametro, la quale suole comunemente farsi dentata ed imprime il suo moto al rocchetto o lanterna B ed al meccanismo. Quando l'albero del rocchetto deve esser bassissimo si fa il passeggio del cavallo più sollevato (Tav. XII. fig. 10). È chiamato maneggio svedese allorchè si ha (Tav. XII. fig. 11) un fuso conico H di ferro sostenuto da quattro puntoni AA del medesimo metallo fusi insieme alla piastra BB che serve di base fermata con cavicchie di ferro sopra una croce di legno e murata nel suolo: il fuso conico regge con una delle sue estremità l'albero orizzontale GG il quale è posto in moto dal rocchetto E, che ingrana i denti della ruota corona D. Al di sotto di detta corona è accomodata la stanga ove si attacca il cavallo. Non solo in questo ma anche negli altri maneggi si ha una ruota grandissima che ingrana in un piccolo rocchetto perchè il cavallo possa muoversi con poca velocità e la macchina l'acquisti assai maggiore; e il cavallo si trova attaccato a sei metri di distanza dall'albero verticale, e così esso tira presso a poco perpendicolarmente alla leva. L'effetto utile prodotto da un cavallo sopra uno de' rammentati maneggi varia tra 1100000.^{km} e 1300000.^{km} onde confrontato coll'uomo che agisce sulla manovella possiam dire che un cavallo corrisponde a 6 $^{4}/_{5}$ uomini. Si fanno anche dei maneggi più ristretti, ma allora l'angolo che deve fare il cavallo per descrivere il circolo diventa sensibile, e la forza si decompone, consumandosene una parte nello sforzare l'asse. I maneggi che qui da noi usano gli ortolani per sollevare col bindolo l'acqua dal pozzo sogliono avere un raggio di soli 2^{m},5. Il Minard deduce da esperienze fatte sù diversi meccanismi mossi da cavalli i risultamenti medii che seguono: velocità in

1'' 0,^{m}935; sforzo 40^{k}; tempo giornaliero di lavoro 9 $^{1}/_{2}$ ore; lavoro meccanico giornaliero 1253952.^{km}

Organi comunicatori di moto.

274. *Cricchetto, denti a molla, e denti mobili ec.* — Questi sono organi che comunicano il moto in una direzione soltanto. Negli orologi a molla si gira il tamburo per caricarli, e non vien posta in moto alcuna parte del castello perchè sta connesso il tamburo ad una ruota con denti a sega nei quali entra la virgola A o cricchetto, e muovendosi la ruota nel senso della curva de' denti (Tav. XIII. fig. 1) questo passa da dente a dente senza impedire il moto. Ma allorchè l'oriolo è carico per la forza della molla tende il tamburo a girare in senso contrario, e allora la ruota è impedita nel moto dal cricchetto, e non puó avanzarsi seppure non si avanza anch' esso. Il quale essendo fissato sovra la prima ruota del castello la fa girare, e perciò comunica tutto il movimento al castello.

Anche il dente a molla (Tav. XIII. fig. 2) si usa nei meccanismi a ruote dentate come negli orologi a pesi. La ruota sulla quale passa la corda del peso che carica l'orologio ha una molla A ad un lato, la quale è terminata con un dente a cappuccio; mossa secondo la inclinazione del dente, è piegata la molla, e passa per i diversi raggi della ruota dentata contigua, ma andando in direzione opposta appoggia il dente contro il primo raggio che incontra, e costringe a muoversi anche la ruota.

Quando il moto debba esser comunicato ad un maglio da una ruota che possa esser mossa in direzioni opposte si usa di porre sulla coda del maglio una lastra metallica AB (Tav. XIII. fig. 5) messa a cerniera in B: così se il dente della ruota preme la lastra per di sopra viene a comunicarsi moto al maglio, ma quando la ruota si movesse in senso contrario e venisse a premere la lastra per di sotto essa sollevasi nella direzione B A', e ricade poi in basso per proprio peso, o per effetto di una molla, senza che il maglio soffra alcun guasto. In modo analogo si comprende come all' occorrenza potranno usarsi dei denti d' ingranaggio girevoli in una direzione, e fissi nell' altra. Ancora i dischi con dente a sega dei quali parleremo qui appresso possono servire a comunicare il moto in una direzione, e non comunicarlo nella direzione opposta.

275. *Manicotti, ruota libera e folle, connessione con ruote dentate, a dischi con aggetti o incavi, a dischi con denti a sega.* — Questi organi posson dirsi anche comunicatori istantanei di moto perchè son capaci di interrompere o stabilire a volontà il movimento, e appartengono a ció che i francesi dicono *embrayage, desembrayage*, e che io esprimerò col nome di connessione. Il più semplice modo di connessione consiste in un cilindro vuoto o manicotto capace di abbracciare l' albero della macchina. L'albero allora è spezzato in due parti e per tutto il tratto ove deve correre il manicotto è di sezione quadra. Anche l' incavo del manicotto è di sezione quadrata, e di dimensioni quasi eguali a quelle dell' albero. Quando il manicotto stà tutto sovra una parte dell' albero il moto è interrotto; e col solo scorrere il manicotto in modo che abbracci anche l' altra parte dell' albero, viene a stabilirsi la connessione,

e comunicarsi da parte a parte il movimento.

Tutte le ruote che son poste nell'asse dell'albero in modo invariabile diconsi fisse; quelle che possono scorrere lungo l'albero senza cessare di esser trasportate dal moto di rotazione si dicono libere per scorrimento; e quelle che non possono scorrere, ma girano attorno all'albero come attorno ad un'asse senza trascinar seco l'albero si chiamano ruote folli. Le ruote libere per scorrimento hanno il foro o l'occhio della ruota di una forma differente dalla circolare, e la medesima forma ha l'albero per tutto il tratto nel quale devono scorrere; ovvero hanno l'occhio rotondo, ma alla loro circonferenza sono guidate da una verga fissa e parallela all'albero.

La connessione a ruote dentate (Tav. XIII. fig 4) si ha con una ruote fissa A, ed una libera B lungo un'albero che è tenuto ad una determinata distanza dall'asse della prima ruota. L'ultima ruota porta un manicotto C con un solco nel quale agisce una leva EF, imperniata in D, che spinge la ruota nella direzione dell'altra, o la toglie secondo che vuolsi dare o togliere il movimento. I denti di una ruota stando alquanto agili negli incavi dell'altra, riman facile che si abbia anche alla prima pressione l'ingranamento. Nelle ruote corone poste cogli assi ad angoli retti si ottiene l'addentamento e disaddentamento con maggior facilità (Tav. XIII. fig. 5). È però da avvertirsi che questo metodo può adottarsi solo quando la massa della macchina in moto non è grandissima, e piccola ò anche la velocità perchè altrimenti tanto è l'urto che ricevono i denti delle ruote di connessione che finiscono col rompersi ancorchè solida sia la loro primitiva costruzione.

Più stabile rimane la seguente connessione a dischi con aggetti ed incavi. Si rende folle la ruota B (Tav. XIII. fig. 6), ed il manicotto C libero sull'asse può essere avvicinato, o allontanato dalla ruota coll'uso della leva A. Al manicotto stà unito un disco M, il quale porta dei cilindretti ben solidi e posti normalmente al suo piano. Esistono nel piano della ruota B dal lato del manicotto alcuni incavi ove comodamente possono entrare quei cilindretti. Fatta questa addentatura gira il manicotto coll'albero della macchina, ed è costretta a girare anche la ruota B, appena che i cilindri vengono a toccare il limite dei corrispondenti incavi. Interessa in questa disposizione ed anche nelle seguenti che lo spartito dei cilindretti e degli incavi sia ben regolare altrimenti non agiscono tutti quelli ad un tempo, ed è facile che segua la rottura di quell'uno che agisse prima degli altri. Si ottiene anche maggiore stabilità armando la ruota di un pezzo M (Tav. XIII. fig. 7) che abbia dei rilievi *bb* convergenti verso il centro, che entrino nei settori incavati che trovansi nel disco annesso al manicotto. Talvolta non solo il disco della ruota folle (Tav. XIII. fig. 8) ma anche quello del manicotto libero si intagliano con denti a sega ed allora si ha il vantaggio di dare il moto in una direzione soltanto e non nella direzione opposta perchè in quel senso nel quale i denti presentano un piano inclinato la connessione si distrugge per l'urto stesso del movimento venendo spinto indietro il manicotto.

276. *Coni di fregamento, e connessione ad asse mobile.* — Sia la

ruota R fissata ad un tamburo conico A divergente (Tav. XIII. fig. 9), e sia al manicotto C fissato un simile tamburo conico convergente B che entra nell'interno del primo, quando col mezzo della leva vien pressato contro di quello. L'attrito che segue tra l'uno e l'altro tamburo stabilisce la connessione per gli sforzi che si fanno sulla ruota non capaci di vincer l'attrito tra i due coni. La dottrina del cuneo ci avverte come l'essere meno inclinata la generatrice del cono dà con minor forza maggior pressione e perciò maggiore attrito, il quale pure crescerà colla scabrosità della superficie. Il freno di Prony ed in generale tutti i freni (85.86) possono riferirsi in questa classe di organi meccanici. Sul medesimo principio è fondata la connessione ad asse mobile fra due ruote A, B (Tav. XIII. fig. 10) non dentate. Facendo conveniente forza sull'asse della ruota B, per avvicinarlo a quello dell'altra si ha la connessione, e la comunicazione di moto tra ruota e ruota per effetto dell'attrito. Si può usare anche questo meccanismo tra le ruote dentate se non che l'urto si fa allora molto grande perchè è più pronta la comunicazione di moto.

277. *Ruota a scatto.* — Vi sono dei mezzi per cangiare il moto ad intervalli. Uno di questi è indicato nel meccanismo della berta capra (Tav. VII. fig. 9) (219), ed un'altro è dato dalla ruota a scatto. Questa consiste in una ruota B (Tav. XIII fig. 11) folle montata sovra un'albero che riceve moto di rotazione mediante una manovella P, e che porta fisso il pezzo A. Al piano della ruota è imperniata la leva di scatto CD, mobile attorno al punto M, e terminata con un dente D. Nel girare dell'asse in questo dente prende il pezzo A, essendo alla leva impedito l'allontanarsi da una molla. Allora la ruota è fissata, e gira insieme colla manovella, e solleva il peso Q. Quando nel moto della ruota giunge la leva a battere contro il ritegno E, viene abbandonato il pezzo A, la ruota ritorna folle e ricade il peso Q.

278. *Corde senza fine, cigne, catene, ingranamenti.* — Col passare la cigna dal tamburo fisso A (Tav. XIII. fig. 12) a quello folle B viene interrotto il moto. Allorchè due argani si comunicano moto per mezzo di una corda senza fine o di una cigna chiusa (Tav XIII. fig. 13) conviene che lo sforzo da trasmettersi dall'uno all'altro non superi l'attrito della corda, e per quanto è possibile anche quest'attrito superi di poco quello sforzo. Stabiliamo qual dovrà essere la tensione primitiva T' che ha da avere una corda senza fine, la quale trasmette il moto ad una ruota di raggio $OR=R$ che porta un cilindro di raggio $OR'=R'$ ove sta applicata una resistenza Q. Osserveremo che $\frac{QR'}{R}$ sarà lo sforzo fatto sulla circonferenza della ruota al quale per lo meno deve essere eguale l'attrito della corda diminuito della tensione T che essa ha nel tratto $b''b''$ ove lenteggia cioè dove non fa sforzo per muovere la ruota. Per quell'attrito adottata l'espressione che altrove (223) abbiamo stabilita, si avrà

$$\frac{QR'}{R} = T\left(1+\frac{fs}{R}\right)^n - T$$

ma la tensione T è tanto più piccola della tensione primitiva T' di quanto questa è minore dell'altra T_1 che si ha nel tratto di corda bb', che agisce, dunque facendo $T = T' - k$ sarà $T_1 = T' + k$ e perciò $T_1 - T = 2k$ sarà la differenza della tensione dei due tratti della fune la quale deve egua-

gliare lo sforzo che si fa alla circonferenza della ruota, cioè avremo

$$2k = \frac{QR'}{R} \text{ e } T = T' - \frac{1}{2}\frac{QR'}{R}$$

onde sostituito questo valore nell'equazione precedente, potremo determinare la tensione primitiva T', o per dir meglio il valor minimo che può darsi a quella tensione. In pratica questa tensione primitiva si determina in un modo sperimentale col porre una carrucola di tensione C, ma la cognizione del suo valore interessa per calcolare l'attrito degli assi delle ruote, ed anche per determinare la resistenza T_1 che deve avere la corda, o cigna affinchè possa reggere allo sforzo che vi si fa. Gli attriti sugli assi che si aumentano colla tensione della fune formano un difetto sostanziale di questo modo di trasmissione di movimento. Due vie esistono per evitare queste resistenze nocive, 1.° di usare catene le quali colleghino ruote guarnite di denti. 2.° di formare ingranamenti diretti tra le ruote dentate. Nel primo caso conviene che la catena abbia le maglie tutte ad una distanza eguale a quella che è fra due denti consecutivi della ruota, e che nelle maglie possano facilmente entrare i denti. Si fanno a tale oggetto catene di forma particolare A (Tav. XIII. fig, 13). Quando la catena B ha le maglie in piani alternativamente normali si fanno sulla circonferenza della ruota gli incavi per ricevere le maglie che si presentano per taglio. Le catene C formate con piani connessi da piccoli anelli si usano come cigne, e così anche quelle inglesi D. Nella marina si usano catene E gli anelli delle quali sono divisi in due occhi de una traversa che li fa più resistenti. In tutte l'attrito nelle articolazioni, la lunghezza delle maglie, e la stabilità sono elementi da tenersi a calcolo.

Gli ingranamenti sono di grand'uso, e valgono per trasmettere i movimenti in qualsivoglia direzione, ma di questi estesamente parlerò in seguito.

Organi commutatori di moto.

279. *Diversi modi di trasformazioni di moto.* — A due specie principali si riduce il moto nelle macchine, a moto continuo, e a moto discontinuo o alternativo di va e vieni, l'uno e l'altro può farsi in linea retta secondo il cerchio, e secondo altre curve, sebben quest'ultimo occorra ben di rado. Da queste diverse specie di moto ne nascono 21 combinazioni cho i sigg. Lenz e Betancourt si son dati cura di schiarire recando degli esempi di meccanismi convenienti a tali trasformazioni di moto, dei quali riferirò i principali. Ecco il quadro delle diverse trasformazioni di moto

moto rettilineo continuo in		
Rettilineo	continuo. . .	1
	alternativo .	2
Circolare.	continuo. . .	3
	alternativo .	4
Secondo una data curva. . . .	continuo. . .	5
	alternativo. .	6
Moto circolare continuo in		
Rettilineo	alternativo. .	7
Circolare	continuo. . .	8
	alternativo. .	9
Secondo una data curva. . . .	continuo . . .	10
	alternativo. .	11
Moto continuo secondo una data curva in		
Rettilineo	alternativo. .	12
Circolare	alternativo. .	13
Secondo una data curva. . . .	continuo. . .	14
	alternativo . .	15

Moto rettilineo alternativo in

Rettilineo	alternativo. .	16
Circolare	alternativo . .	17
Secondo una data curva. . . .	alternativo. .	18

Moto circolare alternativo in

Circolare	alternativo. .	19
Secondo una data curva. . . .	alternativo. .	20

Moto alternativo secondo una data curva in

Secondo una data curva. . . .	alternativo . .	21

Nel ridurre un moto di un genere ad un moto del medesimo genere ma in altra direzione, e con differente velocità e legge, come sarebbe il moto rettilineo continuo a moto rettilineo continuo, non può dirsi che si abbia trasformazione di moto: ma piuttosto comunicazione di moto. Contuttociò io riporterò gli organi meccanici a ciò convenienti per mostrare in un sol punto di vista la soluzione di questi problemi. Così anche quando le soluzioni son date con dei corpi che appartengono alla classe dei motori non posson dirsi ottenute con organi meccanici (per esempio il moto rettilineo della corrente di acqua si converte in moto rotatorio nella ruota idraulica), e a rigore non converrebbe che fossero riportate in questo luogo del corso; ve lo riporto perchè seguendo l'esempio di Lenz e Betancourt che sono i primari autori in queste dottrine, piacemi di presentarle in modo meno incompleto, servendo anche quelle disposizioni di corpi a risvegliare nella mente de'pratici qualche buona idea per imaginare dei meccanismi, che ora non si conoscono, o non si raccolgono nei libri elementari.

280. *Moto rettilineo continuo in moto rettilineo continuo.*— Per quest' oggetto si usano comunemente le pulegge e le taglie; le pulegge fisse posson variare comunque la direzione (Tav. IX. fig. 13) del moto che è comunicato da una corda, o da una catena. Anche l'argano, ed il cuneo può servire al medesimo scopo.

Una particolar disposizione del cuneo o del piano inclinato si può ottenere (Tav. XIV. fig. 1) col fare scorrere il cuneo E fra due doppj bracci B, C, ed un pezzo a zeppa F che ha otto rotelle perchè rimanga sempre ritenuto fra i due bracci, e si muova lungo i medesimi da D in A e viceversa.

Può egualmente disporsi un regolo G che strisci fra due occhietti mentre si spinga avanti il cuneo. Converrà evitare gli attriti tra il regolo è il piano inclinato con l'uso di una rotella.

Sia un telajo (Tav. XIV. fig. 2) montato sopra quattro ruote AA, e legato per mezzo di due corde CGF, DGE, ciascuna delle quali passa attorno alle carrucole *b*, *b* essendo EF, CD perpendicolari al telajo. Nello scorrere il telajo in avanti prende sempre posizioni parallele alle precedenti, e si comunicano moti paralleli a tutti gli oggetti che possono essere collegati con esso. Una tal disposizione si usa nel carretto del Mull-jennys ed è capace ad imprimere moti eguali o paralleli a tutti i rocchetti che si usano nella filatura del cotone. Nel caso che non occorra tanta regolarità servirà di far muovere le ruote A, A, in adattate guide.

La doppia riga (Tav. XIV. fig. 3. 4. 5) che si usa per tirare le linee parallele prende un moto in una direzione per dirigerne un' altro in direzione normale.

L'ariete idraulico riduce il moto

orizzontale di una corrente d'acqua in moto verticale. Esamineremo questa macchina nell'idraulica.

281. *Moto rettilineo continuo in moto rettilineo alternativo*, — Si abbia un regolo A (Tav. XIV. fig. 6) infilato in due occhietti, ed una riga di legno B intagliata in un lato con una curva a diversi seni. Riposi il regolo sulla curva della riga, mediante una rotella per evitare gli attriti. Quando si imprime moto rettilineo alla riga concepirà il regolo un moto rettilineo alternativo.

Vedremo risolvere il medesimo problema la macchina a colonna d'acqua, ed egualmente le così dette bilance idrauliche. Anche nelle macchine a vapore considerato il continuo flusso del vapore può dirsi che il moto rettilineo continuo di questo fluido si converte in moto dello stantuffo rettilineo alternativo.

282. *Moto rettilineo continuo in moto circolare continuo.* — Il martinetto (Tav. X. fig. 9) (253) produce questa trasformazione, ed anche la producono la macchina detta ginocchio (257) (Tav. XI. fig. 2), e gli argani se al cilindro o alla ruota intendesi applicata una fune. Dall' argano chinese si ha un meccanismo, ove il moto progressivo può esser reso di minima velocità.

Un meccanismo (imaginato dal Prony) per ridurre il moto circolare continuo in moto rettilineo con qualsivoglia piccola velocità consiste in una vite FG (Tav. XIV. fig. 7) divisa in tre parti; le due GH, IF sono di passo eguale e girano nelle madreviti A,C, l'altra è di passo pochissimo differente. Ad ogni giro della manovella il cilindro si avanza di un passo della vite delle due prime parti, e fa progredire la madrevite mobile B di una quantità eguale alla differenza del passo delle viti. Questa madrevite allungata in una sua parte percorre la guida D. Consimile a questo meccanismo è la pressa a vite combinata (Tav. XI. fig. 15).

Tutte le viti servono a simile trasformazione, ed anche la vite d'Archimede, le ruote idrauliche, i mulini a vento ec. macchine delle quali parleremo in seguito.

281. *Moto rettilineo continuo in moto circolare alternativo.* — Una riga AB (Tav. XIV. fig. 8) dentata da ambe le parti con denti alternati si muova progressivamente da A in B urterà con i suoi denti nel dente unico che han le ruote C, D che li rimangono a lato, e vi produrrà un moto rotatorio. Ma siccome le ruote nella gola che hanno in un piano superiore sono abbracciate da una fune senza fine, mentre gira una torna l'altra indietro, e così ottienesi il moto circolare alternativo.

La leva AB (Tav. XIV. fig. 9) sia girevole attorno al punto O, e con i ganci EF, DE mobili attorno ai punti C,D, prenda i denti di una sbarra MN che porta al suo asse la fessura GH. Alternativamente girata la leva, monterà progressivamente la sbarra.

Una tromba ordinaria da acqua offre la stessa soluzione. Anche un battello che sia ancorato suol descrivere degli archi di circolo di cui l'ancora è centro, allorchè il moto rettilineo continuo dell'acqua viene ad urtarlo.

282. *Moto rettilineo continuo in moto continuo secondo una data curva.* — Sia una verga AB (Tav. XIV. fig. 10) la quale porti impernìata l'altra BC che termina con un rullo. Quest' ultima entri nella fessura che lasciano due tavole avvicinate D, e tagliate in linea retta per il lato ove striscia la AB, e in li-

nea curva per l'altro lato sovra al quale scorre il rullo C. Quando concepisce moto rettilineo la riga AB il rullo C percorrerà la curva.

La spazzola mossa in direzione rettilinea percorre con i suoi filamenti pieghevoli diverse curve. Il coltro (*Int.* Tav. VII. fig. 2. 3) andando in una direzione rettilinea spinge la terra lungo la curva dell'orecchione. Similmente agisce la barca contro l'acqua, ed ogni strumento che si muova in un mezzo ove si comunichino le pressioni in ogni senso.

Spesso in questo caso si usa una soluzione indiretta si trasforma cioè il moto rettilineo continuo in moto circolare continuo, e questo in moto rettilineo secondo una data curva: consimile soluzione indiretta può usarsi per la seguente trasformazione di moto.

283. *Moto rettilineo continuo in moto alternativo secondo una data curva.* — Si abbia una riga B (XIV. Tav. fig. 6) per un lato intagliata a curva sinuosa, e sia un regolo C posato sù questa curva ed infilato in un solo occhiello D, il quale possa girare attorno ad un'asse. Allorquando sarà mossa la riga in linea retta il regolo oscillerà intorno al punto D, e si solleverà o si abbasserà a seconda della curva sinuosa che è intagliata nella riga, e perciò col suo estremo superiore percorrerà una curva con moto alter nativo.

Una corrente di vento o di acqua che urta un corpo legato ad una corda che coll'altro estremo sta avvolta ad un cilindro, vi produce delle oscillazioni che posson dirsi moti alternativi per curve diverse dal circolo quando la corda alternativamente si svolga e si avvolga al cilindro.

284. *Moto circolare continuo in moto rettilineo alternativo.* — Molti sono gli organi meccanici che si prestano alla soluzione di questo problema, e fondamentali posson dirsi la manovella e gli eccentrici dei quali parlo a parte nel seguente paragrafo, descrivendone qui altri di particolar costruzione.

Una ruota GH (Tav. XIV. fig. 11) è mossa dalla manovella FF situata sulla faccia posteriore. A questa ruota è unito un piolo *i* che striscia nell'incavatura praticata in una sbarra MN. Con ciò si ha la trasformazione di moto circolare e in alternativo perchè i punti M, N vanno e vengono in archi di cerchio mentre la ruota GH descrive un circolo intiero. Termini la sbarra MN in forma di settore dentato, il quale ingrani coi denti d' una sbarra AC. Esso comunicherà a questo un moto rettilineo alternativo. Anche se all'altra estremità si pone un bottone Q che entri nella fessura SR, vi si muoverà alternativamente in linea retta, e se si attacca una corda che passi sopra una carrucola, e porti un peso riceverà questo pure un moto rettilineo alternativo.

Sia una ruota HH (Tav. XIV. fig. 12) girevole attorno ad un asse G, guarnita per la metà di denti, e un telajo circondi questa ruota avendo a ciascuna delle sue faccie longitudinali una parte dentata *ii* nella quale ingranano i denti della ruota HH. Questo telajo sia munito di due montanti E, F che striscino in due occhietti C, C. Quando si pone in azione la ruota il moto circolare continuo dà origine ad un moto rettilineo alternativo nel telajo e ne' suoi montanti.

Il telajo AB (Tav. XIV. fig. 13) è munito d'una dentatura o catena continua nella quale ingrana la ruota dentata C: striscia quello fra i cilindri *c*, *c*.. mentre la ruota dentata imprime alla catena un moto di va e vieni; le due

traverse *ff* guidano nel moto laterale il telajo alla fine d'ogni oscillazione per facilitare la successione dell' ingranamento.

Una ruota FF (Tav. XIV. fig. 14) si può girare colla manovella DE, e porta un piolo *h* il quale striscia nella scanalatura d'una sbarra GG. Questa rimane attaccata ad altra sbarra AA, ed essa pure striscia tra gli occhietti B, B. Con questo mezzo il moto circolare della ruota FF trasmette un moto rettilineo alternativo ad AA. Tal moto è al suo termine lentissimo ed accelerato verso il mezzo delle oscillazioni.

Il movimento dei pestelli sia mediante ruote in parte dentate ovvero con ruote munite di chiavelli (Tav. XIV fig. 15. 16) offre la trasformazione richiesta.

Al girare della ruota AA (Tav. XV. fig. 1) in cerchio si dà moto rettilineo alternativo al pezzo BF per effetto del vette DE che agisce da eccentrico.

Il cilindro AB (Tav XV. fig. 2) gira sopra il suo asse ed è mosso dalla manvella D. Sono sopra la superficie con delle scanalature tracciate due curve in elice che s'incrociano e si confondono alle due estremità del cilindro. Il pezzo C può strisciare in una fessura praticata nella traversa F mentre percorre l' incavo della spirale colla sua estremità quando si gira il cilindro. Così trasmettesi a C un moto rettilineo alternativo lungo F.

Il trave AA (Tav. XV. fig. 3) si guarnisce d'una catena continua *ed*, e sovra di questa si fa agire una ruota dentata *f* con una manovella, l'asse *g* della quale può scorrere un incavo verticale *gh* di un montante CB. Le molle situate a destra e a sinistra determinano il passaggio della ruota dentata al disopra e al disotto della catena.

Una ruota dentata EE (Tav. XV fig. 4) girevole attorno di una catena continua e circolare FF mediante una manovella BCD abbia il suo diametro eguale al raggio di FF. Mentre la ruota dentata EE gira attorno al suo centro, percorre l'interno di FF e ciascun punto della sua circonferenza traccia una linea retta che è un diametro di FF; per conseguenza posto un piolo ad un punto di detta circonferenza, questo imprime un moto di va e vieni ad un pezzo.

Possono usarsi anche due ruote (Tav. XV. fig. 5) AA, BB di diverso diametro ma i centri delle quali sono situati sulla stessa linea orizzontale. Una di esse riceve un moto circolare e lo trasmette all'altra più o meno accelerato o più o meno ritardato secondo le differenze dei loro raggi. Siano due vetti DE, e CF, attaccati ad una di queste due ruote per una delle loro estremità, e per l'altra attacchti ad una leva EF, la quale è imperniata al suo centro ad un gambo che scorre negli anelli *h*. Egli è facile concepire che s'imprimerà per tal guisa a questo gambo un moto alternativo, e resta a nostro arbitrio il diametro delle due ruote, i punti d'attacco pei due vetti, la loro lunghezza ec.

Alcune manovelle spezzate ed a gomito A,A,A (Tav. XV fig. 6), sono unite a delle corde: queste passano ravvolte sopra una carrucola, e alla loro estremità sono attaccati dei pesi che concepiscono moto rettilineo alternativo. Sovra un piano QR inclinato sull'asse PP appoggi una verga TS mobile in alcuni occhietti. Se si suppone d'altronde questa verga costantemente ricondotta verso il piano QR mediante una corda *n* la quale passando sopra una carrucola

e porta attaccato un peso p: posto in moto il piano (il quale riesce circolare e continuo) egli è facile conoscere che la verga TS prenderà un moto rettilineo alternativo.

La ruota (Tav. XV fig. 7) EE mossa dalla manovella D porta tre cilindri F, G, H, che vengono successivamente ad urtare contro il rullo I, il quale porta ad una delle sue estremità la leva a gomito IKL. Questa leva all'altra sua estremità L ha una corda che passa sopra una carrucola M cui è sospeso un grave P. Il grave tende a ricondurre costantemente la leva in alto, mentre i cilindri la fanno discendere e col loro moto circolare danno un moto circolare alternativo alla leva ed un moto rettilineo alternativo al peso P.

Abbiasi un volante NO (Tav. XV fig. 8) il quale porti al suo centro un rocchetto B, e questo trasmetta il moto alle rote dentate E, F che sono di egual diametro ed hanno gli assi sulla stessa orizzontale AA. Siano queste ruote armate di due manovelle Eg, Fh d'egual lunghezza, ognuna delle quali porta un vette gi, hk. Essendo questi due vetti eguali e legati colla sbarra ik la quale porta nel suo mezzo il gambo LM, è facile conoscere che il moto circolare del volante e delle ruote dentate trasmette un moto rettilineo alternativo al gambo LM.

In un medesimo asse (Tav. XV. fig. 9) sono due ruote dentate sopraposte F ciascuna armata d'un rocchetto e cricchetto g e ciascuna posta a dolce fregamento nell'asse del volano. Mediante la disposizione dei rocchetti che son volti in senso contrario quando l'una ruota trasmette il moto ad una delle catene l'altra striscia sull'asse.

Il pendolo conico nelle macchine a vapore converte un moto circolare in rettilineo alternativo, ma di quest'organo meccanico parleremo altrove; ed in seguito avremo pur luogo di conoscere altri organi che soddisfano al medesimo oggetto.

287. *Manovelle, ed eccentrici.* — Distinguesi la manovella a semplice e a doppio effetto. Dicesi a semplice effetto quando la forza che vi è attaccata tira la manovella per un solo mezzo giro e per l'altro mezzo giro deve il movimento farsi per effetto della celerità acquistata; ed è la manovella a doppio effetto quando la forza dopo il mezzo giro rivoltandosi in senso contrario agisce anche per l'altro mezzo giro della manovella. Nell'uno e nell'altro caso suole comunicarsi il moto col mezzo di un vette il quale mantiene quasi costantemente la stessa direzione, lo che si ottiene con assai d'approssimazione quando la lunghezza del vette è quattro o cinque volte quella del gomito della manovella. Riterremo adunque che la potenza agisca sempre colla stessa direzione e prenderemo a ricercare il lavoro meccanico dalla forza P (Tav. XV. fig. 10) per un giro sulla manovella. Mentre essa descrive l'archetto B'B lavora per una quantità $P \times BB''$ giacchè supponiamo verticale la direzione della potenza P, e orizzontale la retta B'B''. In generale può dirsi che il lavoro per ogni archetto elementare è dato dalla potenza moltiplicata per la projezione di quell'archetto sul diametro verticale. Da ciò scorgesi come varia il lavoro secondo la posizione nella quale rimane l'archetto percorso, e come esso è il massimo quando la potenza è normale al gomito; come anche ne vien per conseguenza che il lavoro totale per il mezzo giro, nel quale agisce la

potenza, è dato dalla potenza stessa moltiplicata per il diametro, e può essere espresso 2R . P, essendo R il gomito. Cerchiamo adesso nella manovella a semplice effetto a qual punto del gomito o distanza si dovrebbe applicare una forza che producendo il medesimo lavoro rimanesse costantemente normale al gomito. Indicando con X questa distanza che chiamasi raggio medio della manovella avremo $2R . P = 2\pi . X$ cioè

$$X = \frac{2R}{2\pi} = \frac{R}{3,1416} = 0,318 . R$$

Nella manovella a doppio effetto si avrebbe

$$X = \frac{4R}{2\pi} = \frac{2R}{3,1416} = 0,637 . R$$

vale a dire la cercata distanza rimane a circa un terzo del gomito nella manovella a semplice effetto, ed a circa due terzi nelle manovelle a doppio effetto.

Ad oggetto di rendere uniforme il moto si applicano spesso sovra un medesimo asse due manovelle dirette con i gomiti in piani differenti che fanno tra loro un angolo, e situate in punti diversi dell' asse in modo che possano agire con due differenti vetti e con due potenze. In queste manovelle doppie se non agisce la potenza che per un mezzo giro ancorchè facciano le due manovelle angolo fra di loro non si ha reso uniforme il moto. Ma quando ciascuna potenza agisce montando e discendendo si può domandare quale inclinazione devono aver fra loro i due gomiti delle manovelle affinchè il moto resulti meno che sia possibile irregolare. Siano A B', A B'' le proiezioni sul piano di rotazione dei due gomiti della manovella doppia, nella quale le potenze agiscono egualmente nei due mezzi giri, e B'AB'' l' angolo che essi formano costantemente fra loro. Il lavoro istantaneo delle due potenze P, P prenderà il suo limite superiore nelle posizioni orizzontale e verticale della corda B'B'', cioè quando egualmente ambedue agiscono per produrre il moto, e prenderà il suo limite inferiore nelle quattro posizioni simmetriche nelle quali una dei gomiti AB', AB'' rimarrà in posizione verticale. Infatti la projezione dell' archetto elementare BB' per la similitudine dei triangoli B B''B', B'E A sarà

$$= \frac{BB' . BE}{AB}$$

cioè sarà eguale all' archetto stesso moltiplicato per il rapporto che passa tra l' applicata del circolo e il suo raggio; e lo stesso può dirsi di tutti gli archetti elementari, i quali io rappresentando con s deduco che la somma dei due lavori elementari della doppia manovella B'A B'' sarà

$$\frac{P . s}{AB} (B'E + B''F)$$

ed evidentemente scorgesi che la quantità tra parentesi acquista valore massimo e minimo nei casi sopra indicati. Nel primo caso posto che la corda sia orizzontale si potrà dire che si ha una potenza 2P la quale agisce col braccio di leva B''I, essendo I il punto di mezzo della corda; nel secondo cioè quando la corda B'B'' è verticale la stessa potenza agisce col braccio AI. Ora se al variare dell' angolo B'AB'' cresce BI scemerà AI, e per conseguenza il massimo effetto per regolare il moto si avrà quando AI = BI. Allora l' angolo B'AB'' è retto, dunque questa è la disposizione migliore delle due manovelle. Per ottenere il braccio medio di leva, osserviamo che allora il lavoro totale è 2P . 4R, il quale dovrà eguagliare $2P . 2\pi X$ essendo X il raggio medio, e perciò sarà

$$X = \frac{2R}{\pi} = 0,637 . R .$$

Il lavoro medio istantaneo, chiamato s l' archetto elementare, sarà 2P. 0,637. s.

Il lavoro più grande istantaneo sarà dato dalla potenza nella projezione dell' archetto che è

$$= \frac{B1 . s}{R}$$

cioè sarà

$$2P . \frac{R}{\sqrt{2}} . \frac{s}{R} = \frac{2P . s}{\sqrt{2}} = 1,4 . Ps$$

e quello più piccolo istantaneo Ps onde il lavoro più grande differisce poco dal più piccolo, e preso il lavoro medio per unità può dirsi che il più grande corrisponde ad $1/_{8}$ di più, e il più piccolo ad $1/_{5}$ di meno. Stabiliamo pertanto che le manovelle doppie piegate ad angolo retto fra loro sono vantaggiosissime per la regolarità del movimento.

Per aumentare la cercata regolarità si potrebbero studiare le manovelle triple. Queste quando nella loro projezione dividessero la circonferenza in tre parti eguali, portassero tutte potenze eguali a P, e anche agissero in un senso per mezzo giro ed in senso contrario per l' altro mezzo giro, presenterebbero senza dubbio la loro migliore disposizione. In queste il più gran lavoro istantaneo, e il più piccolo han luogo quando uno dei gomiti è orizzontale, o respettivamente verticale. Il braccio di leva medio è dato da

$$6 \pi X . P = 12 P . R, \text{ ed è } X = \frac{2R}{\pi} = 0,637R$$

Onde il lavoro istantaneo medio si ritrova 3P. 0,637; e calcolando il massimo si avrebbe 2P, e il minimo P. 1,732. Per conseguenza l' allontanamento dal medio non può essere che di $1/_{21}$ o di $1/_{10}$, e può dirsi che in tali manovelle si otterrebbe quasi la stessa regolarità di moto che si può avere nel porre la potenza tangenzialmente alla circonferenza di una ruota. Contuttociò queste manovelle triple non possono usarsi per la difficoltà di mantenere in linea retta gli appoggi dell' albero, e conviene in pratica repartire le tre manovelle in due alberi differenti dai quali si trasmetta contemporaneamente il moto ad un terzo albero. Vedi (Tav. XV. fig. 11).

Le stesse leggi di moto che abbiamo notate per la manovella rimangono ancorchè grande si faccia il bottone (Tav. XV. fig. 12) il moto alternativo comunicato è sempre pel doppio della distanza dei due centri A, B. Quando il cerchio di B s' ingrandisce al di là dell' asse fisso A, si ha ciò che si chiama eccentrico, un cerchio cioè che gira attorno un punto il quale non sia il centro del circolo. La riga consiste allora in una doppia sbarra che si avvolge come anello, attorno ad un' incavo praticato sulla circonferenza dell' eccentrico, e che è collegata al di là dell' eccentrico di tratto in tratto con delle traverse. Quando l' eccentrico è molto grande si trafora sulla parte più lontana dall' asse A lasciandoli la circonferenza collegata all' asse col mezzo di raggi. Considerabile è molto l' attrito tra l' anello e l' eccentrico, e rapisce spesso una parte notabile del lavoro della potenza. Sia P la potenza, essa comporrà anche la pressione tra l' anello e l' eccentrico; Sia r il raggio del cerchio dell' eccentrico, ed R la distanza AB; sarà 4PR il lavoro trasmesso in una rivoluzione, e $2\pi r f P$ quello dell' attrito, onde il rapporto tra l' uno e l' altro ponendo $f = 1/_{8}$ $r = 1,2.R$ sarà $\frac{\pi r f}{2R} = \frac{\pi}{10} = 0,314$

e lo sforzo trasmesso all'albero fisso sarà 1+0,514=1,514, o quasi una volta e mezzo il lavoro utile del vette. Si vede dunque che questo grande effetto dell'attrito costringe a far senza eccentrici di tal costruzione in molte macchine, non nel vapore, ove si ha eccesso di forza motrice.

Si usano anche eccentrici senza l'anello fregante (284). Si abbia un montante AB (Tav. XV. fig. 13) contenuto fra alcune rotelle, il quale parimente con una rotella riposi sopra il pezzo PQ fatto a cuore e centrato in O. Quando gira questo pezzo il montante prende un moto di va e vieni. Può richiedersi che angoli eguali percorsi dal pezzo PQ attorno al centro O corrispondano ad eguali salite o scese del montante AB. Perchè sodisfaccia l'eccentrico PQ a questa condizione conviene che condotti in esso dal centro O dei raggi cominciando dal punto Q ad eguali distanze angolari sieno le lunghezze di questi raggi proporzionali ai numeri d'ordine che le appartengono 1. 2. 3 ec.

288. *Moto circolare continuo in moto circolare continuo.* — Abbiamo già detto (278) come le ruote che comunicano per mezzo di cigne; di catene, di funi senza fine, e le ruote dentate sodisfano a questo problema. Il mezzo più semplice quando la potenza è piccola consiste in comunicare il moto con delle ruote le cui corone si freghino fra loro; sogliono quelle cingersi di cuoio per ottenere un adesione reciproca ed uniforme. Daremo anche in seguito esempj d'ingranamento. Ancora la vite perpetua (270) serve al medesimo oggetto.

Per ottenere movimento di velocità variabile si usano dei coni solcati a spirale (Tav XVI. fig. 1), o anche una ruota ellittica A (Tav. XVI. fig. 2) che ingrana in una circolare B. In quest'ultimo caso l'asse della rota B deve potere scorrere in una scanalatura C ed è ritenuto da una molla affinchè il moto circolare d'una ruota possa esser comunicato all'altra.

La cerniera universale o legame spezzato è una cerniera AB (Tav. XVI. fig. 3) che riunisce due assi in sì fatto modo che l'uno possa trasmettere all'altro il moto di rotazione che li è impresso qualunque sia l'angolo che essi formano fra di loro, ed ancorchè quest'angolo possa variare durante il moto. Ambedue gli assi A, B portano una forca D, D', e queste son collegate con un pezzo C a croce che sta imperniato in esse, e le tiene ad angolo retto girevoli in tutte le direzioni. Questo sistema non suole usarsi che nelle macchine leggere, e gli assi delle quali non fanno angoli molto grandi; se ne fa uso comunemente per trasmettere il moto della mano dell'osservatore allo specchio di un telescopio, o a qualche altra parte di uno strumento astronomico. Quando l'angolo fosse grande, e grande la forza, le pressioni sulle articolazioni sarebbero enormi, e con grandi attriti.

289. *Moto circolare continuo in moto circolare alternativo.* — Una ruota armata di chiavelli che pressi l'uno dopo l'altro ad intervalli sovra una estremità di una leva mobile attorno di un punto fisso, e munita di un contrappeso all'altro estremo, converte il suo moto circolare continuo in moto circolare alternativo della leva. Esempio ne offre il maglio (*Int.* Tav. VI. fig. 7).

La più perfetta di tali trasformazioni si ha da una manovella AM (Tav. XVI. fig. 4) che gira attorno all'albero A, e trasmette coll'intermedio del vet-

te B un moto circolare alternativo al bilanciere CO mobile attorno all' asse O. Tal disposizione si usa nelle macchine a vapore.

In alcuni torni (*Int.* 148. Tav. VI. figg. 1. 2), nella macchina dell' arrotino, e nel filatojo, il pedale o calcola sulla quale l' operajo poggia il piede descrive colla sua estremità moto circolare alternativo, la quale poi imprime ad un altro asse moto rotatorio col mezzo di una manovella.

Watt per questa medesima trasformazione aveva sulle prime imaginato la cicogna, o moto planetario. Un bilanciere AB (Tav. XVI. fig. 5) che prende moto circolare alternativo attorno all' asse E, ha in B centrato un vette BD terminato in paletta. A questo estremo è fissamente unita una ruota dentata, la quale ingrana in altra eguale ruota dentata che è fissata all' asse del volante F. Il moto circolare e continuo del volante fa montare discendere la ruota prima attorno e alla seconda, e così anche il vette BD, il quale comunica moto rotatorio alternativo al bilanciere. Un' oscillazione completa del bilanciere corrisponde a due rivoluzioni del volante. Il difetto di questo meccanismo è la poca solidità di cui vien dotato, e i molti attriti che han luogo.

La leva di Lagarousse offre la soluzione dello stesso problema (Tav. X. fig. 8) ma la ruota procede a scatti, e dà successivi urti. Lo stesso si può dire degli scappamenti dell' orologio, che qui appresso descrivo.

Un moto alternativo di rotazione può ridursi in moto circolare continuo con il seguente meccanismo, il quale ha il vantaggio di dar sommate separatamente le alternative che si fanno in una medesima direzione. Si abbia una ruota AB (Tav. XVI. fig. 6) folle nell'asse C, e munita di una dentatura a corona presso la circonferenza e rivolta verso il centro. L' asse porti fissa una verghetta CD la quale termini con un rampino E che tenuto aperto da una molla appoggia contro i denti della ruota. Una leva CH sia fissata all' asse istesso, e li dia moto alternativo di rotazione. Allorchè questo segue in quella direzione che non può chiudersi il rampino la ruota girerà come se fosse fissa all'asse essendo condotta in movimento dalla verghetta CD. Quando poi il moto si fa in senso contrario il rampino si chiuderà, e tornerà indietro la verghetta senza cagionar movimento nella ruota. Della medesima proprietà è dotato il meccanismo che ho descritto per non comunicare alla testa della vite il moto della stanga che vien condotta indietro (269), come anche le ruote a cricchetto ec. (274). La ruota a scatto (277) presenta essa pure la domandata soluzione.

290. *Scappamenti dell' orologio*. — Il pendolo negli orologi grandi, e la bilancia in quelli da tasca (202) facendo le loro oscillazioni isocrone regolano il moto del castello il quale sarebbe accelerato, col lasciare per ogni oscillazione passare un dente di una ruota. Ora per dare questo scappamento si usano alcuni organi meccanici i quali può dirsi che convertono il moto circolare alternativo in circolare continuo. In tre classi mi sembra che possano distinguersi gli scappamenti in uso, a indietreggiamento, a riposo, ad oscillazione libera. Il più comune fra gli scappamenti è quello a verga con palette: l' asse della bilancia, o quello intorno al quale oscilla il pendolo porta due palette rettangolari (Tav. XVI. fig. 7) *aa* poste in piani che passano per l' asse

e normali fra di loro. La ruota serpentina che li sta di contro ha i denti a sega, e presenta alla paletta *a* uno de suoi denti che ella caccia davanti a se. Intanto oscillando l'asse la seconda paletta si presenta al dente diametralmente opposto, e ne è pur cacciato avanti. Nell' atto che una paletta si presenta a un dente, lo fa un poco indietreggiare, e subito riprende il dente il di sopra e caccia la paletta.

Nello scappamento ad ancora una ruota d'alzata (Tav XVI. fig. 8) è spinta dalla forza motrice del castello contro la branca DI dell' ancora CBD. Questa è fissa ad un' asse che con una forcella prende l'asta del pendolo. Mentre questo col suo moto d' oscillazione passa dall' altro lato della verticale, la branca DI si alzerà e lascerà passare il dente I: ma l'altra branca CK dell'ancora nello stesso tempo si abbasserà, e rincontrerà un altro dente K' della stessa ruota e arresterà il moto. Quindi la branca CK seguendo l' oscillazione del pendolo lascerà passare il dente K' che riteneva mentre la branca DI si presenta al dente successivo I'. Ne resulta che a ciascuna doppia oscillazione non passa che un dente dello ruota d' alzata, e che le pressioni che questa sotto l' influenza della forza motrice esercita contro le estremità K, I dell' ancora restituiscono al pendolo le perdite che ha provate per effetto delle resistenze. Questo meccanismo è spesso usato nei pendoli grandi, ma non sempre ha l' ancora la stessa forma, anzi comunemente si fa molto più piccola. Anche in questo caso si ha un piccolo indietreggiamento per togliello Graham ridusse l' ancora ad altra forma, e particolarmente foggiò le palette BD (Tav. XVI. fig. 9) dell' ancora in arco di cerchio, e fece corrispondere la loro inclinazione a quella dei denti.

Lo scappamento a caviglie si ha da una ruota AK (Tav. XVI. fig. 10) munita di un rango circolare di caviglie fissate normalmente al suo piano. Le oscillazioni del pendolo danno moto circolare alternativo ai due bracci KL, LI per modo che quando il braccio IL è arrestato e pressato da una caviglia, l'altro braccio KL è libero, sta per essere nella successiva oscillazione arrestato dalla caviglia che segue. Quando la caviglia è resa libera la ruota gira per effetto del motore, e la paletta I riceve l' urto, e s' inoltra scorrendo sotto la caviglia ritenendo immobile la ruota. Si ha riposo ma non retrocedimento. Alcune volte si mettono le caviglie alternativamente dall' una e dall' altra parte, ed anche i bracci si fanno agire uno sull' una e l'altro sulla parte opposta.

Scappamento a cilindro. — La bilancia ha per asse un cilindro vuoto A (Tav. XVI. fig. 11) intagliato con una finestra in un lato, cosicche può presentare il concavo alla ruota di scappamento B. Questa ruota è circondata da denti intagliati in curva circolare, e foggiati a piano inclinato; onde entrati dentro al cilindro possano spingerlo nel senso della vibrazione. Appena il dente è sfuggito dal bordo della finestra del cilindro vi entra dentro e pressando il concavo interno a compiere l' oscillazione passa un piccol tempo di riposo. Ben presto il giro della bilancia riporta l' opposto bordo del cilindro, e n' esce. Allora il dente seguente cade alla superficie esterna del semicilindro. Uno de' vantaggi di questo scappamento è di essere quasi insensibile

alle ineguaglianze della forza motrice, e per l'orologio da tasca permette di fare il castello bassissimo, non richiedendo che sole ruote per piano, cioè coll'asse verticale.

Scappamento d'Arnold a vibrazioni libere. — All'asse della bilancia è fissato stabilmente il pezzo D (Tav. XVI. fig. 12) ed il dito *t*, e perciò gira con esso. Ai pezzi solidi del castello è fissata la molla MN armata di due denti *p*,*q*. Il primo *q* serve a spingere avanti i denti della ruota di scappamento C, e ad impedirli di girare, ammenochè quest' ostacolo non sia sollevato. L'altro dente *p* posa sopra una molla SR estremamente flessibile che si prolunga fino a passare il dito *t*. Quando la bilancia gira nel senso indicato dalla freccia porta seco il disco D, e il dito *t*: questo disco non incontra i denti della ruota; il dito incontra la molla SR che per essere tanto flessibile cede; e quello passa avanti. Al ritorno della bilancia il dito prende la molla SR per di sotto e l'appoggia sul dente *p* che è prossimo all'estremo ove si fa come un centro di moto. Allora si alza il dente *q* ed è resa libera la ruota di scappamento, passa avanti un suo dente, ed è arrestato il dente successivo dal riabbassarsi di *q*. In questo movimento un dente colpisce l'incavo *f*, e restituisce alla bilancia la forza che ha perduta. In egual modo per ogni doppia oscillazione il dente *q* della molla MN lascia passare un dente della ruota C, e la bilancia riceve un impulso.

Or facile rimane il comprendere come gli scappamenti a indietreggiamento danno una perdita di forza nociva, come quelli a riposo hanno nelle pressioni a vincere un considerevole attrito, e come tra questi ultimi quelli ad oscillazioni libere sono i meno difettosi per il lato della scienza non venendo la forza del pendolo a contrasto con quella del castello, e perciò sono più adattati per i buoni cronometri. I cronometri di Breguet son costrutti su questo sistema e non battono che cinque vibrazioni per 2″.

291. *Moto circolare continuo, in moto continuo secondo una data curva.* — Il tornio del quale abbiamo dato la descrizione (*Int.* 148) allorchè si adopra per fare le viti mostra un moto rotatorio nell'asse, e la punta del burino percorre un' elice sul cilindro che si ha da lavorare. Questa trasformazione di moto si fa però con dei passaggi intermedj, perchè all'asse, o al burino si dà anche il moto progressivo, e così combinato il moto rotatorio col progressivo si fa quello per l'elici. Vi sono dei tornj nei quali l'asse concepisce anche un moto di va e vieni normale alla sua direzione, ed allora con il burino annesso a quelli si percorrono delle curve molto variate.

La macchina quadratrice del Prof. Gonnella (*Int.* 28 Tav. II. fig. 5) ci mostra un meccanismo che converte il moto per una curva in moto circolare, ma non può permetterci la soluzione inversa.

Il meccanismo che abbiam descritto (Tav. XV. fig. 4) per ridurre il moto circolare in moto rettilineo alternativo ci offre anche un modo di descrivere con moto rotatorio un moto per un' ellisse. Conviene a tale oggetto che il piolo, o pezzo da muoversi sia collocato fra il centro della ruota dentata più piccola, e la sua circonferenza.

Il sig. Dott. Luigi dei Marchesi Ridolfi ha imaginato un istrumento da lui chiamato *Epicicloegrafo*, per mezzo

del quale imprimendo moto di rotazione alla macchina vengano descritte tutte le curve comprese nell' estesissima famiglia delle epicicloidi, fra le quali egli ha mostrato potersi annoverare la ellisse non che parecchie altre curve già prima isolatamente studiate dai Geometri. La figura qui indicata rappresenta quell' istrumento migliorato in varie sue parti dall' Inventore; e siccome dall' esame accurato di essa può il lettore rilevare quelle particolarità di costruzione che troppo lungo sarebbe il descrivere, perciò io qui mi limiterò a dare una idea generale dell' insieme dell' istrumento e del suo modo d' agire.

Un telajo quadrato (Tav. XVII. fig. 1) composto di due squadre nocellate negli angoli, le quali si uniscono insieme mediante due viti, forma la base dell' istrumento e circoscrive lo spazio nel quale deve effettuarsi la descrizione delle curve. Due piccole colonne che si inalzano sulle metà di due lati opposti del telajo sostengono una spranga MN da cui mediante una vite V è sorretto tutto l' istrumento; *rr'* è una rotella invariabilmente connessa mediante le due gambe *Or*, *Or'*, col capo *D* della vite sopra ricordata. La rotella è traversata nel centro da un asse girevole OA il quale termina inferiormente in un rigonfiamento cubico entro il quale mediante una vite di richiamo può scorrere e fissarsi a qualunque punto una asta orizzontale. Quest' asta porta alla sua estremità un parallelepipedo designato con P il quale è traversato longitudinalmente da un asse BC girevole entro il medesimo. A quest' asse sono invariabilmente connessi alla parte superiore una rotella *mm'* situata nell' istesso piano della prima descritta e due dischi fra i quali è posta una molla a spirale di cui un capo è fissato all' asse medesimo e l'altro è raccomandato ad una pinzetta portata da un prolungamento dell'asta orizzontale. Ed inferiormente l' asse BC termina come l' altro OA in un rigonfiamento cubico entro cui scorre e si fissa nel modo medesimo un altra asta orizzontale come la prima ma più breve, la quale porta all' estremità la punta G che deve descrivere la epicicloide che si desidera. Alla rotella *mm'*, quando lo strumento non è in azione stà avvolta per più giri una catenella da castello di orologio in modo che allo svolgersi di essa venga a stringersi la molla a spirale sopra ricordata; l' altro capo della catena è poi fissato ad un punto della circonferenza della rotella *rr'*.

È facile adesso il farsi un idea del modo d' agire dell' istrumento; è chiaro infatti che se faremo ruotare tutto l' istrumento attorno all' asse OA portandone in giro colla mano l' estremità E, siccome la rotella *rr'* non prende parte a tal movimento dovrà la catenella avvolgersi necessariamente su di essa e quindi svolgersi dall' altra *mm'* stringendo la molla a spirale la quale serve così a mantenere costantemente tesa la catenella. Ma questa non può svolgersi dalla rotella *mm'* senza farla ruotare insieme coll' asse BC; quindi è manifesto che mentre l' asse *BC* ruoterà attorno all' asse OA dovrà il *lapis* G contemporaneamente ruotare attorno all' asse *BC*; ed appunto per la composizione di questi due movimenti esso descriverà una curva che sarà sempre un' epicicloide, ma la cui natura speciale dipenderà dal rapporto fra i diametri delle due rotelle, e le dimensioni dalla grandez-

za dei raggi AP, CG. Io rimanderò alla Memoria dell' Autore chi volesse conoscere i rapporti fra le rotelle pei quali si hanno le epicicloidi più distinte per le loro proprietà, e mi limiterò ad accennare che per la descrizione dell' ellisse deve il diametro della rotella rr' essere doppio di quello della mm'; e che se x ed y saranno i semi-assi dell' ellisse che vuolsi descrivere dovrà prendersi la distanza fra gli assi VA, BC, $=\frac{1}{2}(x+y)$ e l'altra fra gli assi BC, FG, $=\frac{1}{2}(x-y)$.

292. *Moto circolare continuo in moto alternativo secondo una data curva.* — Può trasformarsi questo problema negli altri due: moto circolare continuo in moto circolare alternativo, e questo movimento in moto alternativo per una data curva. Così con quello che si è detto nei due paragrafi (289. 291) viene data indirettamente la trasformazione di moto che cercasi.

293. *Moto continuo secondo una data curva in moto rettilineo alternativo.* — Si abbia una curva resistente per es.° una tavola AA (Tav. XVII. fig. 2) intagliata in forma ovale in direzione poco inclinata al diametro della quale scorra per adattati incastri la riga B con moto di va e vieni. A croce con quella riga siavene un'altra CD, che ha una fessura curvilinea, e porta in D una molla che può facilmente curvarsi. Questa all'estremo C porta un cilindretto il quale guidato dalla fessura e dalla molla percorre la curva. Giova che l'ovale all'estremità presenti punte alquanto curvate ed acute.

Si può cangiare il moto continuo secondo una data curva in moto circolare continuo, e dipoi questo in rettilineo alternativo.

294. *Moto continuo secondo una data curva in moto circolare alternativo.* — Ad un tamburo a molla come quello dell' orologio avendo attaccata una corda o catena, si può coll'estremità libera di questa percorrere una curva, ed ogni volta che la catena vien tirata girerà il tamburo pel verso che si monta la molla, e quando la catena è rilasciata il moto del tamburo si farà inverso svolgendosi la molla.

Nella precedente soluzione si trova trasformato il moto per una curva in moto rettilineo alternativo nella catena, e questo in rotatorio alternativo nella puleggia, e può dirsi che spezzando così il problema si riporta a due già risoluti. Si potrà anche trasformare il moto dato in circolare continuo, e questo in circolare alternativo.

295. *Moto continuo secondo una data curva in moto continuo secondo una data curva.* — Il pantografo, strumento di cui ho tenuto discorso (*Int.* Tav. I. fig. 9. §. 26) dà nella punta Q moto per una curva simile a quella che si percorre coll' altra punta P quando il pernio O vien fissato in direzione rettilinea alle due rammentate punte.

Se le due curve sono parallele ed eguali serve movere una riga sempre parallelamente a se stessa e con un'estremo sopra una di quella data curva perchè l' altro estremo percorrerà la curva seconda. Il moto per una data curva si riduca a moto circolare, e questo in moto per una curva, ed allora avremo risoluto il problema ancorchè differenti siano le due curve (291).

296. *Moto rettilineo alternativo in moto rettilineo alternativo.* — Nulla è più facile di questa soluzione, e servono tutti i modi che si usano per convertire un moto rettilineo continuo in moto rettilineo conti-

nuo (290). Si possono adoprare a quest'oggetto le corde, le verghe, ed un qualunque sistema rigido perchè dato ad un suo punto moto rettilineo a tutti gli altri punti corrisponde un simil movimento.

Talvolta può tornar conto di trasformare il moto rettilineo alternativo in moto circolare, e questo in moto rettilineo alternativo. Le leve falcate che si usano per i campanelli son forse l'organo più proprio per la soluzione del problema.

297. *Moto rettilineo alternativo in circolare alternativo.* — Ancor qui possono usarsi tutti i metodi che sono adattati per la stessa trasformazione quando il moto è continuo (282). Ed organi propri alla domandata soluzione posson dirsi i seguenti:

Una leva AA (Tav. XVII. fig. 3) imperniata in B, porta una semicirconferenza alla quale sono attaccati gli estremi di una corda, che passa sù due carrucole D, E. Messa la leva in moto circolare alternativo si dà alla corda moto rettilineo alternativo. Quest'organo è stato utilmente usato in una macchina destinata a tagliar pali sott' acqua.

Il moto di zig-zag è conosciutissimo: i punti AA (Tav. XVII. fig. 4) dei manichi prendendo moto rotatorio, la sbarra F che è all'estremo concepisce moto rettilineo alternativo, e tanto accelerato quanto in maggior numero sono le incrociature.

Due catene inglesi sieno attaccate al bilanciere B, C, e alle due spranghe F. G: il moto del bilanciere circolare alternativo sarà trasformato sulle spranghe in moto rettilineo alternativo. Si ha analoga disposizione anche usando verghe dentate che ingranino in una ruota dentata come è nella macchina pneumatica.

Il trapano AC (Tav. XVII. fig. 5) offre un simile esempio di trasformazione di moto, e così pure il tornio ad archetto, e quello a balestra, o ad arco (*Int.* Tav. VI. fig. 3).

Servono alla stessa soluzione il parallelogrammo di Watt, ed altri organi meccanici analoghi dei quali ora parlo in paragrafo separato.

298. *Parallelogrammo di Watt, ed altri analoghi organi meccanici.* — Nella macchina a vapore lo stantuffo per la forza del vapore concepisce un moto rettilineo alternativo il quale mediante la verga dello stantuffo deve comunicarsi al bilanciere. Questo si muove di moto circolare alternativo, e se si attaccasse direttamente alla verga, verrebbe essa a deviare dalla direzione dell'asse dello stantuffo per cui questo con grave danno dell' azione del vapore premerebbe più sovra un lato che sull'altro del cilindro. Watt per togliere un tale inconveniente compose il suo parallelogrammo GFEL (Tav. XVII. fig. 6) nel quale essendo articolati tutti i vertici, i due F, E girano attorno al centro A, il vertice L attorno al centro K, e l'altro G percorre sensibilmente una linea retta. Il bilancere della macchina a vapore è imperniato in A, al punto F porta l'asse H dello stantuffo mediante l'articolazione FG, ed al punto E coll'articolazione EM porta l'asta della tromba d'alimentazione: quindi mentre ruota l'estremo F del bilanciere il punto G si muove per una linea sensibilmente retta, e l'asta dello stantuffo mantiene costante la sua direzione, per essere ritenuta dalla verga o briglia KL. Affinchè la deviazione sia la minor possibile conviene che la direzione dell' asta dello stantuffo divida in parti eguali la freccia dell'arco che descrive l'estremo del bilancicre: che la corda

di quest'arco non ecceda di molto la metà o i due terzi della lunghezza FA del bilanciere: che la lunghezza de' lati del parallelogrammo che non rimangono paralleli al bilanciere lasci l'estremo G dell'asta sull'orizzontale condotta pel centro del bilanciere quando il punto estremo F ha la posizione più alta: che questa orizzontale divida in parti eguali l'angolo che il bilanciere percorre: che restando arbitraria la lunghezza degli altri lati del parallelogrammo si faccia dipendere dalla distanza alla quale si situa il centro K dovendo essere KL minore al diminuire di EA.

Il Poncelet, stabilite le precedenti condizioni, avverte che se si volesse dal bilanciere AF non solo guidar per la verticale il punto G, ma anche il punto *g* converrebbe determinare l'altro parallelogrammo *gf*E*l* che è simile al precedente GFEL, e mentre colla briglia HL è mossa verticalmente la verga GH lo sarà anche l'altra *gh* essendo invariabile il rapporto tra le rette GA, *g*A.

Nell'architettura idraulica del Prony trovasi descritto un parallelogrammo (Tav. XVII. fig. 7) LEFG ove la briglia KL è volta in alto, impiegato nelle miniere per vuotarle dall'acqua. In quello il moto non è dato dall'asse GH che trattasi di mantener verticale, ma dal bilanciere AF e l'asse GH come anche l'altro MN imprimono moto di va e vieni allo stantuffo delle trombe.

Ancora il parallelogrammo di Betancourt non è che una modificazione di quello di Watt utile ad usarsi ogni qual volta sia una sola la verga che ha da esser mossa in direzione verticale. Al bilanciere AF (Tav. XVII. fig. 8) si attacca a cerniera la verga LF, ed all'estremo di questa è pure attaccata a cerniera la briglia KL, che si fa lunga quanto il mezzo bilanciere AF. Alla metà della verga LF si impernia l'altra GH che deve esser mossa costantemente sulla stessa direzione. Mentre il bilanciere gira attorno al punto A, la briglia si muove attorno al punto K, ed eguali ambedue in lunghezza son messi in modo che quando l'uno è in situazione orizzontale anche l'altra lo deva essere, e la verga LF rimanga verticale. È chiaro che facendosi il moto rotatorio per pochi gradi al di sopra e al di sotto dell'orizzontale, il punto G devierà minimamente dalla verticale. Infatti se ammettiamo che l'angolo che forma il bilanciere sollevandosi o abbassandosi sia eguale a quello che vien descritto dalla briglia è chiaro che la metà della verga GH si mantiene sulla stessa verticale.

In tutti questi parallelogrammi si vede applicato il medesimo principio delle circonferenze descritte con due centri diversi, e collegate o col mezzo di una retta la cui metà ha da rimanere sulla stessa verticale, o mediante un parallelogrammo il cui vertice libero ha da rimanere sulla stessa verticale. È evidente che in questo secondo caso il quale appartiene all'apparato di Watt avendosi nel parallelogrammo un lato fisso al bilanciere, potrà uno degli altri due vertici obbligarsi a passare sù quanti punti ci piace di una data direzione rettilina. Ora obbligandolo a tre punti soli l'ultimo vertice non avrà quelle tre respettive posizioni in linea retta, e perciò si potrà far passare un circolo per quelle tre posizioni, lo che porterà a determinare la lunghezza della briglia col raggio di quel circolo. Dunque il vertice libero del parallelogrammo passerà nel moto

del bilanciere per tre punti differenti di una medesima verticale. Negli altri realmente l'abbandonerà descrivendo una linea curva con due seni serpeggiante. Ma poichè sono a nostro arbitrio i tre punti possono questi scegliersi per modo che i seni della curva divengano piccolissimi. Il vertice del parallelogrammo che è guidato dalla briglia non dovrebbe percorrere una curva circolare ma una curva che per un certo tratto poco da questa si discosta, onde mi sembrerebbe utile il far di diametro grande e non precisamente rotondi i due peroj che sono in K ed in L ma di tal curva che producessero effetto come se la briglia si allungasse o si accorciasse di quel poco che occorre per tener sempre precisamente sulla verticale il vertice libero del parallelogrammo. Nella pratica tornerà anche utile descrivere la curva che l'ultimo vertice del parallelogrammo percorre, mentre l'altro si muove in linea retta, e sù questa scegliere per il moto del bilanciere quel tratto che più si avvicina alla curva circolare. Quella curva è in forma di fiocco e perciò presenta due parti concave e due convesse, lo che mostra potersi dare alla briglia la direzione che più piace scegliendo convenientemente una di quelle quattro parti, e rende ragione della differenza tra il parallelogrammo di Watt e quello di Prony.

Il medesimo intento di tener l'attacco dell'asta dello stantuffo nelle macchine a vapore sempre sulla stessa linea retta si è procurato di conseguirlo facendo quell'asse snodato in C (Tav. XVII. fig. 9), e ponendo ivi a cerniera una verga CD la quale termini in un settore dentato mobile attorno al centro O che ingrana in altro settore parimente dentato, il quale gira concentricamente al bilanciere.

Nelle locomotive il moto rettilineo alternativo dello stantuffo si comunica direttamente all'eccentrico delle ruote motrici, e perciò si riduce a moto circolare continuo, allora per mantenere costante la direzione dell'asta dello stantuffo si suole quella terminare in una ruota *bb* (Tav. XVII. fig.10) che è costretta a percorrere un'incavo longitudinale praticato in un pezzo fisso, e sull'asse di quella ruota si pone girevole il vette dell'eccentrico. Si è anche nelle macchine a vapore usata una disposizione che può dirsi combinazione della precedente col parallelogrammo di Betancourt. Invece del bilanciere AF (Tav. XVII. fig. 7) si abbia una briglia eguale all'altra KL, e mobile attorno al punto fisso A. il punto G che si mantiene sensibilmente sovra una linea retta tien luogo della ruota *bb* (Tav. XVII. fig. 9) e guida il vette dell'eccentrico.

299. *Moto rettilineo alternativo in moto alternativo secondo una data curva* (282). *Moto circolare alternativo in moto circolare alternativo* (288). *Moto circolare alternativo in moto alternativo secondo una data curva* (291). *Moto alternativo secondo una data curva in moto alternativo secondo un'altra curva data* (295).— Per tutte queste trasformazioni di moto si possono usare le soluzioni che ho riportate ai paragrafi respettivamente qui citati, nei quali si parla delle stesse trasformazioni, se non che il moto è continuo e non alternativo. Solo accennerò che alla penultima di queste può dare una soluzione anche un'organo somigliante al parallelogrammo di Watt ove non siano adempite le condizioni che abbiamo

sopra (289) stabilito per la sua costruzione perchè oscillando il bilanciere per arco circolare, il vertice libero del parallelogrammo descrive con moto alternativo una curva a due seni in forma della lettera S.

Degli Organi repartitori di moto, e principalmente degli ingranamenti.

300. *Mezzi per regolare la velocità del moto.*— Chiamo organi repartitori quelli che fan variare o repartono convenientemente la velocità, e ben si comprende che in questa categoria possono essere rammentate tutte le macchine semplici perchè eccettuando la leva a braccia eguali e la puleggia fissa, tutte fan muovere la resistenza con celerità differente da quella colla quale muovesi la potenza. Abbiamo in esse stabilito il teorema generale che si acquista in potenza quello che si perde in velocità e viceversa; onde non si avrà cambiamento nella velocità se non si varia corrispondentemente anche la potenza. Più comunemente si usano le ruote di differente diametro come gli argani e le ruote dentate per cangiare la velocità del moto, essendo questa sempre in ragione inversa del diametro delle ruote. Quindi se vuolsi accrescere moltissimo la velocità si fa che il moto si trasmetta da una ruota grande ad un piccolissimo rocchetto, ed anche si moltiplicano queste trasmissioni di movimento. La disposizione inversa potrebbe tenersi quando si volesse diminuire molto la velocità, ma a renderla minimissima più propria è la vite micrometrica (*Int.* 31), la vite perpetua (270), e le combinazioni delle viti (270).

Contuttociò si usano principalmente le ruote quando si vogliono tra i diversi pezzi della macchina trasmettere delle velocità che stieno in un rapporto invariabile. E tre sono i modi principali per risolvere la questione con due ruote 1.° col contatto naturale o fregamento tra le corone delle ruote, 2.° coll'uso di catene o corregge senza fine che inviluppino le corone, 3.° con ingranamento di denti o di curve rilevate e fissate sulle corone.

301. *Organi per cangiare istantaneamente la velocità.* — Due coni alterni, o due sistemi A,B (Tav. XVII. fig. 10) di puleggie decrescenti e formate nel medesimo pezzo si collegano fra di loro con una corda senza fine. Gli assi di questi sistemi debbono essere paralleli, e le pulegge debbono decrescere ma con direzione in uno contraria all'altro, e per modo che passando in ambedue i sistemi la corda dall'una all'altra puleggia rimanga sempre con egual tensione. Se la potenza è applicata al sistema A, ed in esso la fune abbracci una puleggia con piccol diametro l'altro sistema si muoverà con tanto minor velocità quanto è maggiore la ruota in quello abbracciata. Passando la corda ad una puleggia più grande nel primo sistema, siccome nel secondo sarà posta in una puleggia minore, crescerà la velocità di questo a confronto di quella del sistema motore sempre stando essa in proporzione inversa dei diametri delle puleggie abbracciate.

Un meccanismo analogo si ha ponendo fisso all'albero CD (Tav. XVII. fig. 11) due ruote M, N dentate di differente diametro, ed avendo un manicotto G sull'albero motore EF. Il manicotto porta due ruote M'N' dentate con diametro differente, della prima M' delle quali il raggio som-

mato col raggio di M, e della seconda N' il raggio sommato con quello di N, formano la stessa somma che è la distanza fra i due assi. Onde facendo scorrere il manicotto sul suo asse si può imboccare a piacimento colla ruota M, o colla N, e si avrà differente velocità. Ed indicando i raggi o i diametri colle lettere stesse delle ruote si avrà che le due velocità staranno fra loro, e a quella dell'asse del motore EF

$$::\frac{M'}{M}:\frac{N'}{N}:1$$

Allorquando la comunicazione di moto vuol farsi con semplice fregamento si può usare un cono A (Tav. XVII. fig.12) che va a contatto con una ruota B. L'asse della ruota è inclinato a quello del cono quanta è l'inclinazione dell'apotema del cono sul suo asse. Quest'asse del cono è mobile e può allontanarsi da quello della ruota col sollevar tutto il cono. Allora la ruota tocca il cono in una sezione più ampia, e posto il cono in rotazione gira la ruota con maggior velocità. Questo macchinismo è usato nel planimetro d'Ernst (*Int.* 199) o macchina quadratrice del Gonnella (28). Nella descrizione che ha data il Prof. Gonnella della sua macchina in luogo del cono fregante ha anche suggerito (*Int.* Tav. II. fig. 5) una gran ruota RR' sulla quale riposa la ruota minore rr', e secondochè il contatto e più o meno prossimo al centro si comunica col moto della gran ruota una celerità minore o maggiore alla ruota piccola. Quindi scorgesi che l'organo maccanico precedente può essere variato anche in quest'ultima disposizione.

302. *Modo di determinare i raggi, e i numeri dei denti delle ruote.* — Gli ingranamenti essendo destinati a trasmettere il moto di rotazione da un'asse all'altro in un rapporto costante che suole esser sempre assegnato a priori, conviene ricercare il rapporto tra i raggi che si hanno da assegnare alle ruote, e tra i numeri dei loro denti. Chiameremo R il raggio di una ruota, R' quello dell'altra ruota che há da ingranare con essa, ed n il numero dei giri che ha da fare la seconda mentre ne fa un solo la prima. Si avrà $R = n R'$ cioè i raggi delle ruote staranno fra loro come i numeri dei giri che fanno nel medesimo tempo.

Sia data la distanza d che deve esistere fra i centri delle due ruote: dovrà essere $d = R + R'$ e perciò

$$R = \frac{nd}{n+1} \quad R' = \frac{d}{n+1}$$

cioè il raggio del rocchetto è eguale alla distanza de' centri divisa per il numero de' giri che esso fa per ogni giro della ruota aumentato dell'unità. Le circonferenze che appartengono a questi raggi si dicono primitive e servono di base per tracciare i denti, ma non son quelle che hanno le ruote dentate perchè il dente sta fuori di queste per tutta la sua faccia, e sta dentro per tutto il suo fianco.

Il passo dell'ingranamento è dato dalla somma della grossezza del dente, e dal vuoto che è tra uno e l'altro dente. Lo determineremo facendo la grossezza del dente tale che esso possa resistere allo sforzo che vi si ha da produrre, e dando al vuoto $^1/_{10}$ o $^1/_{15}$ più della grossezza, secondo il grado di perfezione che si usa nell'eseguire l'ingranamento. Siano m, m' i numeri de' denti delle ruote che han respettivamente per raggi R, R', e sia a il passo dell'ingranamento: avremo

$$m = \frac{2\pi R}{a} \quad m' = \frac{m}{n}$$

Dovremo regolare il valore di a per modo che resultino per m, m' dei numeri interi; ed avremo anche in mira di non fare il numero m' dei denti del rocchetto minore di 20 quando trattasi di grandi meccanismi, onde non vengano i denti troppo divergenti l'uno dall'altro.

303. *Condizioni alle quali devono sodisfare gli ingranamenti.* — Spesso nel raccogliere le cognizioni compilate in questo trattato mi sono giovato della meccanica industriale del sig. Poncelet, senza animo di attribuirmi nessuna delle bellissime dottrine che ad esso appartengono, come anche in questa parte degli ingranamenti mi propongo di seguire le sue dottrine, e tolgo dal medesimo le condizioni seguenti da adempirsi nel determinarne la traccia.

1. I denti di una medesima ruota debbono essere tutti eguali, e disposti regolarmente sulla corona. Non è peró necessario che la loro grossezza sia la medesima da una ruota all'altra. Per una ruota di ferro il dente sarà meno grosso che per una di legno per la differente resistenza, e converrà usare denti più grossi nella ruota che gira più celere essendo esposti più allo sfregamento.

2. Il passo dell'ingranamento non solo deve esser sempre lo stesso per una medesima ruota, ma anche per le due ruote che s'ingranano, come ne viene dall'aver determinato il numero dei denti proporzionale al raggio della ruota. Onde se in una sarà minore la grossezza del dente dovrà esservi maggiore il vuoto tra dente e dente.

3. Quando la ruota si vuol che giri nelle due direzioni opposte ciascun dente deve esser foggiato con curve simmetriche rapporto ad una retta che è l'asse del dente. Sempre la curva del dente della ruota ha da essere propria a condurre il dente col quale ingrana, e viceversa.

4. Il dente di una ruota non deve pressare sull'altro della seconda ruota finchè la direzione di essi non coincide colla retta che unisce i centri delle due ruote. E cominciando a spingerlo in quella situazione deve abbandonarlo solamente quando è giunto in quella stessa situazione il dente successivo. Ammettendo che la pressione cominciasse a farsi prima della linea de' centri la punta del dente sottoposto sfregherebbe contro quello di sopra in modo da guastarlo.

5. Le irregolarità come le asprezze nella superficie del dente farebbero con pari irregolarità comunicare il moto. Onde si stabilisce che i denti devono sempre avere una forma arcuata che li permetta di mettersi in tangenza l'uno all'altro da che sono in presa. Ed inoltre deve per la curvatura dei denti la celerità di una ruota esser trasmessa all'altra sempre in rapporto costante e in quello stesso che è determinato dai diametri delle ruote (302).

304. *Differente forma che suol darsi alle ruote dentate.* — Nelle precedenti generalità ho compreso col nome di ruota dentata, e di dente tutte le particolari specie di ingranamento. Ma queste si hanno a distinguere in quattro specie circa alla forma che si dà alla ruota, cioè ruote a sprone, ruote corone, ruote a lanterna, e ingranamenti conici. Nella prima si comprendono tutte le ruote che hanno i denti nel piano stesso della ruota (Tav. XVIII. fig. 1); nella seconda quelle che hanno i denti in direzione normale al piano della ruota, nella terza le ruote formate da due cerchi paralleli collegati da fusi che tengon luo-

go dei denti (Tav. XVIII. fig. 2), e le ruote della quarta specie sono foggiate in forma di un tronco di cono, e con i denti impiantati nella direzione degli apotemi del cono (Tav. XVIII. fig. 3). Queste ultime due forme si usano in ruote di piccolo diametro, e particolarmente si fa a lanterna il rocchetto o la ruota minore se è di legno; nel caso poi che il rocchetto sia di ferro vi si intagliano i denti per un tratto assai lungo, e si dà loro il nome di pinne. Si suole adoprare una ruota corona quando si vuol trasmettere il movimento fra due assi che stanno ad angolo retto. Cogli ingranamenti conici si trasmette il moto da un' asse all' altro qualunque sia la loro inclinazione. Dato l' angolo BAC che fanno gli assi de' due alberi delle ruote, si divide questo in due porzioni BAF, CAF che abbiano i seni in ragione inversa delle celerità che devono acquistare nel movimento le ruote. Quindi raddoppiati quegli angoli se ne otterranno gli altri DAE, EAH che determinano l'ampiezza delle due ruote DGFE, EFIH sulle superfici convesse delle quali che fan da circonferenze primitive dovranno rilevarsi i denti, lunghi per tutta la superficie del tronco di cono, ed anch' essi di forma convergente verso il punto A.

È facile lo scorgere come gli ingranamenti conici per avere i denti molto prolungati presenteranno molta stabilità, e mostrando meno le piccole loro inesattezze daranno un moto dolce e regolato. Nelle ruote a sprone e nelle ruote corone di legno sebbene frequentemente si facciano i denti di forma cilindrica, è questo un' uso pessimo perchè mancando ai denti la conveniente curvatura, non si accompagnano scambievolmente, e si logorano ben presto e perdono di stabilità. Fissata a volontà la curva dei denti di una ruota conviene che per quelli dell' altra sia determinata una curva corrispondente, la quale permetta che le due curve si mantengano fra loro a contatto, mentre girano contemporaneamente le due ruote. Noi insegneremo in appresso tracciare questa curva data che sia l' altra che chiamiamo generatrice, la quale suol essere o un cerchio intero che ha il centro sulla circonferenza primitiva della ruota, o una retta diretta al centro della corona, o una sviluppante del circolo cioè una curva generata dall' estremità di un filo teso che si svolge da una circonferenza, o una epicicloide. È la generatrice un cerchio quando si tratta di una lanterna perchè i suoi fusi si fanno di forma cilindrica. Si chiamano pignoni le ruote che hanno i denti terminati da rette convergenti al centro, e diconsi ingranamenti a sviluppante del circolo, o epicicloidali secondochè la generatrice offre la sviluppante del circolo, o l' epicicloide. Si hanno inoltre degli ingranamenti rettilinei o cremagliere, delle ruote a denti inclinati come quelle della vite perpetua, di quelle con denti a sega come nel cricchetto, negli scappamenti degli orologi ec., e di quelle con denti radi e molto prolungati che chiamansi chiavelli, che si usano per sollevare i magli, i piloni ec. Di chiavelli o alette si guarniscono ad intervalli in certe sezioni i cilindri che sono destinati a comunicar moto a più pestelli, o a più magli.

305. *Metodo generale per tracciare la curva dei denti qualunque sia la curva generatrice.* — Rappresentiamo con aTb (Tav. XVIII. fig. 4)

la curva assegnata del dente di una ruota C' alla quale si vuole adattare il taglio dei denti della ruota C, e sieno Tt', Tt i passi eguali dell' ingranamento sulle due circonferenze primitive, i quali dovranno contemporaneamente percorrersi affinchè rimanga la celerità dell' ingranamento nel rapporto costante determinato dai raggi delle dette circonferenze primitive. Ritenghiamo che i denti principino a premersi giunti che sono nel loro giro alla linea dei centri. Mentre aTb rimane sulla linea dei centri in atto di esser toccata dal dente della seconda ruota, un'altra eguai curva $a't'b'$ che appartiene al dente successivo della ruota C' deve essere abbandonata dal dente che li corrisponde nella ruota C, e noi ci proponiamo di descrivere questo. Dividiamo i due archi Tt, Tt' in un egual numero di parti eguali per es.° in tre: dal punto T come centro colla più corta distanza alla curva $a't'b'$ descriviamo un' archetto. Parimente prendiamo la più corta distanza a quella curva dal punto 1' di divisione, e con questa distanza fatto centro nel punto 1. della divisione corrispondente nell'altro cerchio descrivasi un secondo archetto. Nello stesso modo presa dal punto 2' di divisione la più corta distanza dalla curva con essa fatto centro in 2 si descriva un nuovo archetto. Ora sapendosi che la curva cercata deve passare per t si troverà questa partendosi da quel punto e tracciando l'inviluppo ai condotti archetti perchè è cosa evidente che quando nel giro si toccassero sulla linea dei centri i punti di divisione 1', 1, o gli altri 2', 2 anche l' inviluppo si manterrebbe a contatto colla curva $a't'b'$.

L'esattezza porterebbe a determinare quell' inviluppo per molti punti ma in pratica basta anche determinarlo con due soli archetti. Che anzi si può determinare anche con un solo arco: allora fissato il punto t' ove la prima normale incontra la curva $a't'b'$, si congiunga questo con t, e si inalzi sulla metà della retta t' la normale no che taglia il cerchio primitivo in o. Il punto o sarà il centro dell' arco da descriversi col raggio ot.

Quando si voglia con esattezza la traccia della curva de' denti invece di supporre che girino simultaneamente le due circonferenze primitive con celerità eguali attorno dei loro centri immobili, tornerà conto ritenere che una circonferenza stia ferma, e giri l' altra attorno a quella ed attorno al suo centro; lo che per il moto relativo tra il primo e il secondo circolo torna lo stesso. Allora però si scorge la curva che van descrivendo alcuni punti collocati sul secondo circolo: così per es.° un solo punto della circonferenza descriverebbe un'epicicloide, la qual curva sarebbe quella cercata per la traccia del dente in quel caso.

506. *Traccia della curva de' denti per ingranare in una lanterna a fusi cilindrici.* — Prendiamo primieramente a considerare una cremagliera o una ruota corona che debba ingranare nella lanterna a fusi cilindrici. Il circolo primitivo ABD (Tav. XVIII. fig. 5) deve portare i centri dei fusi della lanterna, e la retta MN può rappresentarci la linea primitiva della cremagliera, o la circonferenza primitiva della ruota corona la quale supponesi in un piano orizzontale. Determinato il passo dell' ingranamento che deve essere eguale alla distanza dei centri di due fusi successivi della lanterna, sia MP il posto che ha da essere occupato da un dente e dalle due me-

tà dei vuoti che li hanno a rimanere ai lati. Supponiamo che stando ferma la cremagliera o la ruota corona giri la circonferenza ABD della lanterna attorno al suo centro lungo la linea MN, il centro A di un fuso descriverà una cicloide. Descrivansi due eguali tratti di questa cicloide che partendosi dai punti M, P si intersechino in Q, e questa sarebbe la traccia cercata del dente quando il fuso cilindrico non avesse grossezza. Ora per aver riguardo alla grossezza si traccerà la curva *mqp* parallela alla precedente e distante da essa di un raggio e quel poco di più che ha a dare il gioco del dente. Rimarrà che si tolga la punta al dente e si determini la sua faccia *pr* come anche il suo fianco *ps*. Per la prima ricorderemo che il fuso che guida deve cessare la sua azione sovra il dente che è spinto quando il fuso successivo è giunto a contatto col successivo dente sulla linea dei centri. Così nel caso attuale il dente E dovrà lasciare il fuso D quando il fuso A toccherà la linea de' centri, voglio dire nel caso della ruota corona quando toccherà il piano che passa per i due centri ed è normale ai piani delle due ruote. Per determinare il fianco osservo che dovrà il fuso poter toccare il dente alla sua radice *p*, e perciò converrà incavare un mezzo circolo tra un dente e l'altro al di sotto della retta MN.

In secondo luogo si tratti di una ruota a sprone che ha da ingranare nella lanterna, e siano ABD, MAN (Tav. XVIII. fig. 6) le circonferenze primitive delle due ruote. Determinato che l'intervallo MP è il passo dell'ingranamento, si osserverà che tenuta ferma la ruota MAN mentre l'altra ABD gira sù questa e attorno la proprio centro, il centro A di un fuso descrive un'epicicloide E formeremo nel modo che si è detto di sopra il dente *mqp* in modo che sodisfi a questa condizione, e determineremo parimente come si è detto di sopra la sua faccia, e il suo fianco.

Quando nella pratica non occorre tanta esattezza si potrà applicare la regola generale al caso dell' ingranamento co' fusi della lanterna nel modo seguente. Disposta la lanterna col fuso A in atto di toccare la linea dei centri in T, dovrà ivi essere la radice di un dente, la radice dell'altro dente sarà in *t* essendo T*t* il passo dell' ingranamento. Congiungasi il punto T col centro D del fuso sarà T*i* la più corta distanza al cerchio del fuso. Faremo dunque passare un'arco di cerchio per i punti *t*, *i* che abbia il centro sulla circonferenza primitiva MN, e quello sarà la cercata traccia del dente, la quale si farà eguale anche sulla parte opposta e si limiterà come si è detto di sopra per formare la faccia e il fianco del dente.

307. *Traccia della curva dei denti per ingranamento a sviluppanti.* — Posto che sia una sviluppante del circolo che ha per raggio C'K' (Tav. XVIII. fig. 7) la curva *a'mb'* assegnata ai denti che guarniscono la ruota C' dovrà essere una sviluppante di un circolo anche la curva *amb* che si cerca per tracciare i denti della ruota C. Infatti tutte le normali alla curva *a'mb'* sono tangenti al circolo che ha per raggio C'K', ma l'altra curva *amb* deve toccare continuamente la precedente, dunque le normali a quella devono esserlo anche a questa. Lo sia per es.° K'*m*T, sarà T*m* uno dei raggi che ha servito per determinare *amb* (305): onde scorgesi che tutte le normali al-

le due curve nel punto di contatto qualunque esso sia devono confondersi colla tangente invariabile TK′ al circolo C′; e siccome può prolungarsi questa ed abbassandovi la normale CK, si può descrivere con questa come raggio un circolo, resulta che dovranno le normali alla curva *amb* nel girare del circolo C confondersi colla KT tangente al circolo CK lo che mostra essere la curva *cmb* la sviluppante del circolo CK il cui raggio : C′K′ :: CT : C′T. Dalla qual proporzione ne viene la regola sicura per determinare la curva dei denti: si prenderà

$$CK = C'K' \frac{CT}{C'T}$$

quindi descritta la circonferenza CK si traccerà la curva che segnerebbe l'estremità di un filo che da quella si svolgesse.

In questo ingranamento il braccio di leva dell'attrito *f*N è il raggio del circolo sviluppato per es.° CK, e perciò rimanendo costante la potenza P che agisce sulla ruota, quando il moto sia ridotto uniforme avremo

$$fN.CK = P.CT, \text{ ed } N = \frac{P.CT}{f.CK}$$

cioè la pressione rimarrà costante per qualunque punto del dente, lo che dà un vantaggio sugli altri ingranamenti. Contuttociò i denti non si consumeranno egualmente in tutta la loro estensione perchè il lavoro dell'attrito non è sempre eguale essendo più piccoli gli archi percorsi verso la radice del dente che verso la punta. Non mi trattengo a dire come si potranno determinare la faccia, e il fianco del dente, dovendo in ciò ricorrere le regole dette nel paragrafo precedente.

308. *Traccia della curva dei denti per l'ingranamento in una ruota a pignone, cioè coi denti terminati da rette che convergono al centro.* — Si faccia girare la circonferenza C′ (Tav. XVIII. fig. 8) attorno a se stessa ed attorno all'altra C, e giunga nella posizione C″, il raggio AC′ prenderà la posizione *a*C″ determinata dalla condizione *ba* = *b*A, e l'inviluppo del raggio AC′ sarà la curva A*m*B. Dico che questa è l'epicicloide generata dal punto A quando esso appartenesse alla circonferenza del circolo che ha per diametro AC′: infatti si abbassi la perpendicolare *bm* al raggio *a*C″, il punto *m* dovrà appartenere all'inviluppo, ma questo punto appartiene evidentemente alla circonferenza che ha per diametro *b*C″=AC′. Essendo nella ruota proposta la generatrice dei denti nella direzione del raggio, potrà ad essa attribuirsi ciò che ho detto del raggio istesso: concludo pertanto che la curva domandata dei denti dovrà essere un epicicloide generata dal circolo che ha per diametro il raggio della circonferenza primitiva della ruota a pignone proposta. Il resto sarà come al §. 306.

309. *Traccia della curva dei denti per l'ingranamento epicicloidale.* — Siano DAB, MAN (Tav. XVIII. fig. 1) le due circonferenze primitive che hanno i centri in C′, C, e sia A*b* il passo dell'ingranamento rimanendo il punto A sulla linea dei centri. Adotteremo per adesso come profilo del dente della ruota C′ un raggio C′A, allora per quello che si è detto nel paragrafo precedente il profilo corrispondente del dente nella ruota C dovrà essere un' arco d'epicicloide generato dal punto A del cerchio che ha per diametro C′A mentre ruota sulla circonferenza C. Il modo poi di compiere la forma del dente sarà quello che ho detto di sopra (306). Ma ora i denti della ruota C′ non devono avere il profilo

in linea retta, e si vuole che si determinino coll' inviluppo della epicicloide degli altri denti, che è quanto dire coll' inviluppo del raggio CA perchè la retta CA è sempre a contatto con quella epicicloide. Dunque questo inviluppo sarà un' epicicloide generata dal punto A come appartenente al circolo che ha per diametro CA nel suo girare sulla circonferenza C'.

Nella pratica si rimpiazzerà l' epicicloide con un' arco di cerchio: si condurrà un raggio C'*b* che incontrerà il cerchio che ha per diametro C'A nel punto *d*: Si congiungerà il punto *d* col punto *b'* di divisione del cerchio CA, e sul mezzo della retta *b'd* si inalzerà una perpendicolare che incontrerà la circonferenza del raggio CA nel punto che ha da essere il centro dell' arco cercato. In egual modo portate sovra una parte e sull' altra dal punto A sulla circonferenza primitiva C' le distanze del passo: si condurrà il raggio C*e* che incontrerà la circonferenza C in *g*: si congiungerà *g* col primo punto di divisione del cerchio C' partendo da A, e sul mezzo della retta condotta si inalzerà una perpendicolare la quale col suo incontro determinerà sulla circonferenza C' il centro dell' arco cercato. Dal punto C col raggio C*d*, e dal punto C' col raggio C'*g* si descriveranno delle circonferenze, le quali limitano la lunghezza dei denti. Il fondo del vuoto del dente si determinerà col lasciare circa $0^m,01$ di spazio al di sotto della lunghezza dei denti quando sono fra loro ingranati.

Sono inconvenienti in questi ingranamenti 1.° che l' intensità di pressione esercitata sù denti aumenta a misura che il punto di contatto s' allontana di più dalla linea dei centri per il qual motivo tendono i denti a consumarsi inegualmente nei loro differenti punti. 2.° Che la traccia di denti di una ruota dipendendo dal raggio della circonferenza primitiva dell' altra ruota non si possono in una medesima ruota ingranare rocchetti di differente diametro: 3.° che se gli assi delle ruote sono anche per minima quantità rimossi dal loro posto, l' ingranamento non è più esatto. Questi ultimi due difetti non han luogo negli ingranamenti a sviluppate di circolo potendosi in essi fare ingranare in una medesima ruota più rocchetti, o ruote a differente diametro, e potendosi di piccola quantità variare la distanza dei centri. Contuttociò si preferiscono gli ingranamenti epicicloidali a confronto di quelli a sviluppata perchè questi ultimi quando si tratta di ruote a piccol raggio hanno l' estremità de' denti troppo sottile.

Anche gli ingranamenti conici si fanno a sviluppata, o epicicloidali. Per conseguir ciò si taglia la grossezza della ruota per modo da presentare delle superfici coniche normali a quella ove giacciono i denti (Tav. XVIII. fig. 3), e tanto nel suo interno cioè dove rimane la sezione più piccola del cono, e nel suo esterno o dove è la sezione più grande, e sù queste superfici si disegna la traccia dei denti, quindi si intaglia la ruota e si formano i denti riunendo per mezzo di linee rette il piccolo disegno interno coll' altro esterno che è di dimensione maggiore. Tuttociò viene indicato dalla figura che mostra anche il disegno dei denti sulle due superfici coniche rammentate svolte in un piano, e poste col centro in A', A".

310. *Traccia dei chiavelli per i*

magli, per i pestoni ec. —. Tutto quello che abbiamo detto per gli ingranamenti a denti con una linea di simmetria che hanno le due parti eguali si può ripetere per quei denti che sono foggiati convenientemente per un lato soltanto dovendo agire la ruota in una sola direzione. Tra questi han da rammentarsi i chiavelli per i magli e per i pestoni, i quali dovendo condurre per lungo tratto in movimento il pezzo sul quale agiscono hanno il loro svilnppo molto più grande che quello dei denti, e fa d'uopo che la traccia loro sia più rigorosa che quella degli stessi denti. Nel caso dei pestoni (Tav. XIV. fig. 16) che hanno il dente rettangolare dovendosi avere il contatto alla linea dei centri e quindi il sollevamento AB del dente per una quantità eguale all'arco AB' della circonferenza primitiva, dovrà il chiavello avere la curva sviluppante di questo circolo. Quando si volesse imprimer moto uniforme alla testa di una leva (Tav. XVIII. fig. 9) col movere uniformemente una ruota, determinato il rapporto della velocità inverso a quello di CT : C'T, la epicicloide generata dal punto T del cerchio che ha per diametro CT mentre si ravvolge attorno al cerchio C'T sará la forma da darsi ai chiavelli. Tocchi la leva sulla linea de' centri in T, e la deva accompagnare finchè non si è percorso l'arco T*t*: per descrivere l'epicicloide per punti si disegni il cerchio che ha per diametro CT, e si prenda T*t'* = T*t*, e si dividano ambedue nel medesimo numero di parti eguali per es.° in 5. Dai punti 1, 2, 3, 4, *t'* di divisione del cerchio C'T con raggi eguali alla più corta distanza dei punti di divisione dell'arco T*t* dal punto T si descrivano degli archi di cerchio, e questi col le loro intersezioni successive formeranno l'epicicloide cercata.

Quando si vuole evitar l'urto convien renunziare alla condizione dell'uniformità di moto; e fa di mestieri che il montante ed il chiavello si prendano e si lascino quando hanno direzioni tangenziali alla direzione del moto. Se per es.° l'albero C' deve far girare la leva CD (Tav. XVIII. fig. 10) senza urto si porrà l'albero C' distante dalla posizione iniziale della leva per una quantità eguale al suo raggio CD, e la curva del chiavello dovrà avere il suo primo elemento nella direzione della tangente al circolo CD.

311. *Della piattaforma*. — Prima che io termini di parlare degli ingranamenti, mi sembra conveniente dare una succinta descrizione della piattaforma, macchina che si usa per intagliare i denti di una ruota, e particolarmente nelle ruote a piccol diametro ed a denti molto fitti, come sono quelle del castello dell'orologio. Un gran circolo è centrato in piano orizzontale e mostra sulla sua superficie segnate molte circonferenze concentriche, ciascuna delle quali è divisa in un numero determinato di parti eguali come 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ec. Tra tutti questi numeri si trova quello dei denti che ha da avere la ruota che vuol costruirsi, e dopo che questa sia tornita si fissa sull'asse della piattaforma per modo che possa girare con essa. Per mezzo di viti è guidato un castello che porta un tornio ad archetto, nell'asse del quale è fissata una rotella d'acciaio con piccoli denti a sega che deve intagliare la ruota. Ogni divisione della piattaforma ha i suoi punti marcati con fori alquanto profondi, onde una vite a pressione entrando in questi fissa la piattaforma.

Fermata questa nel primo punto di una divisione la rotella del tornio corrisponde sulla ruota nel luogo ove deve essere il primo spazio dei denti ; quindi girato il tornio viene intagliato questo spazio. Allora si gira la piattaforma in modo che la vite a pressione corrisponda al secondo punto della divisione, ed anche la rotella del tornio rimane sulla ruota ove ha da essere il secondo spazio dei denti. Si intaglia anche questo, e si seguita egualmente per gli altri.

Organi Regolatori di movimento.

312. *Distinzione tra gli organi moderatori, e i regolatori.* — Posto che nelle macchine si abbia un moto vario conviene ridurlo per quanto è possibile uniforme distruggendo la velocità eccessiva o senza che mai si riproduca la porzione di velocità estinta, o facendola riprodurre quando nella macchina diverrebbe la velocità troppo piccola. Nel primo caso si usano organi moderatori di movimento, come sarebbero lo scappamento a pendolo, il volante ad alette (165), i freni, i semplici attriti, le catene contrappesanti (259); ed anche le valvole di sicurezza nelle macchine a vapore, le soglie a trabocco nelle macchine idrauliche ec. Gli organi usati per il secondo fine chiamansi regolatori quali sono il tamburo regolatore, il tamburo a spirale, il regolatore a forza centrifuga, il regolatore a molla in spirale, il regolatore a molla, i volanti, i recipienti ad aria a pressione costante, le gore o bottacci negli edifizi ad acqua, le graticole giranti nei fornelli delle macchine a vapore che servono a distribuire regolarmente il combustibile. È chiaro che ove sia libera la scelta deve darsi la preferenza a questi ultimi perchè non distruggono ma conservano come magazzini il lavoro motore, pure l'uso è ben distinto, e dove occorrono gli organi moderatori, il più delle volte non può sostituirsi un organo regolatore. Infatti nel caso che si voglia estinguere il movimento non si fa alcun conto della forza, e perciò convenientissimi resultano i freni (85). In egual modo non reca dispendio il porre eccedente la forza motrice nel castello dell'orologio, e perciò se lo scappamento (290) toglie tutta la celerità acquistata dal roteggio niun danno ne viene, e si ha sommo vantaggio che il pendolo (202) coll'isocronismo delle sue oscillazioni riduca uniforme esattamente il movimento del castello. Non starò a ripetere le cose dette sovra i moderatori di moto ai luoghi che ho qui sopra citati, e dei regolatori riporto qui solo i principali tra quelli che appartengono più propriamente a questa parte della meccanica, e sceglierò esempi di regolatori da applicarsi alle variazioni della resistenza, a quelle della potenza, e a quelle del moto della macchina.

313. *Tamburi regolatori, e tamburo a spirale.* — Parlando dell'argano abbiamo accennato l'uso di questo genere di regolatori (248), e si è detto che consistono nel sostituire dei coni ai cilindri che devono raccogliere la fune della resistenza. Per far comprendere come si regolerà il calcolo che ha da determinare la convergenza del cono indichiamo con P la potenza applicata con un braccio di leva R ad una burbera che deve usarsi per sollevare un peso Q dal fondo di un pozzo di una miniera, e sia p il peso dell'unità di lunghezza della catena che collega la

resistenza Q all' albero della burbera, il quale io suppongo di forma conica per rendere costante la potenza mentre scema il peso della catena pendente a grado a grado che la resistenza Q viene sollevata. Si vogliono determinare i due raggi r_1, r_2 delle sezioni del cono ove è attaccata la catena quando pende per tutta la sua lunghezza L, e quando è tutta raccolta dall' albero, ritenendo come trascurabili gli attriti e le altre resistenze nocive. Avremo

$$r_1 = \frac{P.R}{Q+pL} \qquad r_2 = \frac{P.R}{Q}$$

Determinati questi due raggi rimane a fissarsi la distanza alla quale devono rimanere le due sezioni cui appartengono. In tal ricerca supporrò che si dispongano n giri della catena uno accanto all' altro, e che la grossezza di essa sia s, allora sarà ns la distanza cercata. Siccome un tronco di cono raccoglie di catena quanto un cilindro che abbia la stessa lunghezza e per raggio la media dei raggi delle due basi del trônco porremo

$$2\pi\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)n = L \text{ cioè } ns = \frac{Ls}{\pi(r_1+r_2)}$$

Ho ritenuto che il tamburo regolatore sia di forma conica conforme si usa fare nella pratica, ma volendo un regolatore esatto per il caso precedente ove la variazione della resistenza dipende dalla porzione di catena pendente converrebbe usare una conoide alquanto incavata, cioè generata non dalla rivoluzione di una linea retta attorno ad un'asse, ma dalla rivoluzione di una linea curva che volge all' asse la convessità. Da ciò apprendiamo che questa curva generatrice della forma del tamburo andrà variando a seconda della legge colla quale varia la resistenza. E sebbene nella pratica si usi la forma conica credo per quei pochi casi nei quali vuolsi esattezza nel regolatore far cosa utile riportando la determinazione della indicata curva. Chiamiamo y l' ordinata di essa, ed x l' ascissa: la condizione del problema si esprime con la seguente equazione

$$y\int 2\pi p y dx = P.R$$

la quale differenziata, e quindi separate le variabili ed integrata dà per equazione della curva cercata

$$\left(x + \frac{Q^2}{4\pi p P R}\right) y^2 = \frac{PR}{4\pi p}$$

La piramide AB (Tav. XIX. fig. 1) che si usa nei castelli da orologio rappresenta il tamburo a spirale. Questa è attaccata alla ruota B motrice del castello, ed ha la forma di un cono solcato a spirale. Nel solco si avvolge la catena CD mentre si svolge dal tamburo D della molla. Per svolgersi da questo conviene che il tamburo D giri, e si monti la molla che sta dentro ad esso acchiocciolata con un' estremo attaccata all' asse fisso EF, e coll'altro alla superficie interna del tamburo girevole D. Adunque quando la molla è tutta montata l' ultimo giro della catena sta avvolta alla parte più stretta della spirale, ed a misura che si diminuiscono i giri della molla si porta la catena sulle spire più grandi della spirale. In tal modo vien sempre ad esser sollecitata da egual forza la ruota motrice D perchè quando la molla ha maggiore energia agisce sulla ruota col minor braccio di leva, e quando l' azione della molla si fa debole vien trasmessa la sua forza alla ruota con un gran braccio di leva. In quest' esempio della molla da orologio chiamando F lo sforzo che essa fa in una di quelle posizioni che prende, e b il corrispondente braccio di leva nella piramide, il prodot-

to F. b dovrà esser costante per tutte le posizioni che prende la molla e perciò la legge colla quale variano i raggi piramidali deve essere inversa a quella degli sforzi che somministra la molla.

314 *Regolatori a molla.* — Il Poncelet nel seguente apparato insegna valersi delle molle per regolare la forza motrice e per togliere le brusche variazioni di movimento. L'albero AB (Tav. XIX. fig. 2) che trasmette il moto alla macchina sia interrotto in C e C'; e venga comunicato il moto da una parte all' altra dell' albero per mezzo di due manovelle i di cui bottoni E, F son riuniti dal vette EF articolato e perpendicolare al gomito CE. In luogo di questo gomito si ponga un tamburo girevole col raggio CE dentro al quale si acchioccioli una molla che ha la disposizione che si è qui sopra detto per l' orologio. È evidente che il bottone E sarà tirato dal vette EF e verrà a montarsi la molla nel tamburo finchè il suo sforzo non diviene eguale alla resistenza che incontra a moversi l'albero AC. Dal momento che la molla avrà raggiunta colla sua energia questa resistenza agirà essa, e perciò anche il gomito CE come un solido di figura inalterabile, e trasmetterà sull'albero AC lo sforzo che fa l' albero BC'. Nella quantità di cui si avvolge la molla si otterrà una misura dello sforzo che vien trasmesso da un' albero all' altro, la quale sarà indicata da una lancetta che percorre la mostra che copre il tamburo. Ora se col girare del tamburo, gira anche la verghetta IK, questa mediante la leva KL potrà porre in rotazione al manicotto L, il quale fatto a madre vite impanerà nella vite che è sull' albero CA e smuoverà la leva LM, e questa potrà regolare il motore, come aprire o chiudere una cateratta, una valvula ec.

All' estremità di una delle porzioni dell' albero in luogo della molla a spirale si può porre un dado munito di più grosse molle a raggi, le quali prendono in altrettanti piuoli posti sulla circonferenza di una ruôta che appartiene all' altra porzione dell' albero. E siccome queste molle si piegheranno di piccola quantità è facile concepire che delle ruote dentate potranno ingrandire questo movimento da trasmettersi al manicotto regolatore. Convien fissare tanto in questa disposizione quanto nella precedente la posizione che prende il manicotto sotto un determinato sforzo che si comunichi da una porzione all' altra dell' albero: a tale oggetto sperimentalmente, o teoricamente (27, 28) si dedurrà la flessione che prendono le molle sotto determinati sforzi: questa fa conoscere di quanto una porzione di albero gira rapporto all' altra: quindi col mezzo della teoria della vite, o delle ruote dentate combinate con quella, si dedurrà il movimento del manicotto regolatore: questo infine deve esser tale da moderare la forza motrice a proporzione che lo sforzo si fa più grande.

315. *Regolatore a forza centrifuga.* — Un' asse verticale AB (Tav. XIX. fig. 3) il quale ruota col movimento della macchina tiene imperniate in B due verghe metalliche BD, BC che portano alla loro estremità due globi di metallo P, P'. Altre due verghe, AD, AC connettendosi a cerniera colle precedenti, e con un collare A infilato nell' asse compongono una losanga snodata ADBC. Al girare dell' asse AB questa li ruota attorno e per effetto della forza centrifuga che concepi-

scono i globi P, P′ si apre allontanandosi questi dall'asse. Due effetti allora ne conseguono 1.° i globi P, P′ al crescere della velocità maggiormente allontanandosi rapiscono una porzione di forza viva, la quale poi restituiscono quando la velocità diminuisce, onde ne vien regolato il movimento; 2.° il collare A si inalza quando cresce la velocità, e si abbassa quando essa diminuisce, ed a questo raccomandandosi, come accade nella macchina a vapore di Watt, una leva che apra o chiuda una valvula, o altro meccanismo che regoli la forza motrice si può ottenere il regolamento del moto nella macchina.

Per stabilire la teoria di questo pregiabile regolatore convien determinare fino a qual punto si inalzeranno i globi sotto una determinata velocità tanto nel caso che il regolatore non debba vincere alcuna resistenza, quanto nel caso che abbia a superare la resistenza che oppone la valvula ad aprirsi o altra consimile. Osservo che mentre la verga BD ha preso una posizione determinata la resultante del peso del globo P e della forza centrifuga agisce nella direzione BD, e perciò rappresentando con BI questa resultante, BE, IE rappresenteranno quelle due componenti. Ma la forza centrifuga (188) è eguale alla forza viva divisa per il raggio IE della curva, ed è

$$\frac{P.\omega^2.IE^2}{g.IE}$$

rappresentando ω la velocità angolare. Quindi avremo che questa quantità sta al peso P :: IE : BE e perciò

$$BE = \frac{g}{\omega^2}$$

E poichè BE indica il sollevamento dei globi può dirsi che essendo il regolatore libero da qualunque resistenza, è quel sollevamento indipendente dal peso dei globi e vien determinato dalla velocità angolare ω, la quale è $= 2\pi n$ essendo n il numero delle rivoluzioni fatte in 1″. Che se indichiamo con t il tempo di una rivoluzione avremo $nt = 1''$ e perciò sostituendo questi valori otterremo

$$\omega = \frac{2\pi}{t} \quad BE = \frac{gt^2}{4\pi^2} \quad t = 2\pi\frac{\sqrt{BE}}{g}$$

onde scorgesi che presa BE per lunghezza del pendolo può applicarsi alla durata delle rivoluzioni di questo regolatore chiamato anche pendolo conico, ciò che abbiam detto della durata delle oscillazioni del pendolo (195). E ne viene la regola di prendere un filo ed attaccarvi un piccol piombo, quindi determinare la lunghezza che si ha a dare a questo filo affinchè le sue oscillazioni si compiano nel tempo stesso che fa una rivoluzione il pendolo conico, e quella lunghezza sarà la misura della BE.

Passiamo ora a considerare aggiunta al regolatore una resistenza p prodotta da un peso unito al manicotto A. Decomposta questa forza in due dirette secondo le verghe rigide AC, AD. Parimente ciascuna di queste che possono intendersi applicate ai punti C, D decomposta in una diretta secondo la verga che porta il globo, e in una verticale agiranno le sole due componenti verticali, le quali colla dottrina del parallelogrammo delle forze si trovano ciascuna eguale a p. Ora di nuovo la forza p che è in D decomposta in due parallele applicate una al punto B, e l'altra al centro I del globo P quest'ultima sola produrrà effetto, e come se fosse aumentato il peso P di una quantità eguale alla intensità di essa componente che è

$$p\,\frac{BD}{DI}$$

e pongo $= p'$. Lo stesso può dirsi del-

la forza verticale p che è applicata in C, e fatta questa considerazione per le cose dette di sopra otterremo

$$\frac{P}{g}\omega^2 \text{ IE} : P + p' :: \text{IE} : \text{BE}$$

cioè
$$\frac{P \cdot \omega^2 \cdot BE}{g} = P + p$$

Da questa equazione, avendosi per determinata BE colla regola accennata di sopra sebbene ora non sia più esatta, si deduce il valore che si deve dare al peso dei globi affinchè il regolatore possa vincere la resistenza p. Realmente avendo noi ritenuto per determinare BE il caso che il regolatore non incontri resistenza, e non essendo stati posti in calcolo i pesi delle spranghe che compongono il regolatore non potremo dire che con esattezza sia sviluppata tutta la teoria sullo stabilimento di questo regolatore, ma quella soltanto che è più utile nei casi ordinari della pratica. Per quanto sommamente debbasi commendar l' uso di questo regolatore avvertiremo che esso è inefficace allorquando una cagione di brevissima durata altera il moto della macchina, e che sempre ha da correre un qualche tempo tra l' istante in cui comincia la variazione di movimento, e quello nel quale agisce il regolatore.

Colla veduta di estendere l'uso di questo interessante organo riporterò la costruzione che sembra la più conveniente per unirlo ad una ruota idraulica, e per farli aprire e chiudere la cateratta dell'acqua onde regolarne il movimento. La losanga ICIA (Tav. XIX. fig. 4) formata tutta al disopra dell' imperniamento C ha il manicotto mobile al vertice A, ed ivi regola la leva destinata a movere un' altro manicotto B con denti a sega. Questo è libero e striscia a quadro sull' asse EF nel quale sono le due ruote folli M, N che ingranano nell'altra R. L'asse EF vien mosso dalla macchina, ma non comunica moto all' altro ST fintanto che il manicotto B rimane distante come mostra la figura dalle dentature a sega che sono nei mozzi delle due ruote M,N. Quando il manicotto B per effetto del regolatore si abbassa o si inalza viene a fissare la ruota N, ovvero l'altro M, e quindi è messo in movimento per un verso o per l' altro l' asse ST che apre o chiude la cateratta che dà l'acqua alla ruota idraulica.

Nè terminerò di parlare di questa sorte di regolatori senza rammentare che può variarsi la costruzione col farlo con un sol globo, che penda da un' asta la quale sia imperniata verso la circonferenza di una ruota orizzontale della macchina. La forza centrifuga è utilmente usata per regolare la forza del vento sulle vele nei mulini a vento costruiti secondo il sistema inglese, ed è ad uso non molto diverso riserbata nel tacometro (190).

316. *Uso dei volanti.* — Abbiamo veduto che spesso nelle macchine si usa un moto di va e vieni il quale ha agli estremi della sua corsa due minimi di velocità ed un massimo al mezzo, e che la manovella produce nel suo giro un lavoro vario; come anche mille altre irregolarità di moto si hanno nelle macchine per gli ingranamenti, per i contatti dei pezzi ec., e per la natura del motore. In tutti questi casi può convenire l' uso del volante il quale è destinato a regolare il moto col sottrar forza viva o darla secondochè troppo grande o troppo piccolo è il movimento. Si compone di un grande anello di ferro fuso che a guisa di una ruota vien collegato per mez-

zò di raggi all' asse del quale vuol regolarsi il movimento, e i suoi caratteri sono di presentare una massa pesante molto grande, e di averla raccolta verso una circonferenza assai distante dal centro. Trascurata l'influenza dei raggi si tien conto soltanto del peso dell'anello, il quale può esprimersi (essendo R_1 il raggio, a la larghezza dell'anello, a' la grossezza) quando è di ferro fuso per $P = 45239 . aa' R_1$. Si indichi con V la velocità della circonferenza media dell'anello del volante, o lo spazio che è percorso in 1″, con ω la velocità angolare, la forza viva del volante sarà

$$MV^2 = \frac{P_1}{g} \omega^2 R_1^2$$

cioè crescerà proporzionalmente al peso, e in ragion duplicata del raggio. Da ciò scorgesi che per avere assorbita una data forza viva tanto meno converrà accrescere la velocità del volante quanto più grande è il suo peso e il suo diametro; e che potranno regolarsi questi elementi per modo che nella macchina munita di volante la variazione della velocità non sia mai maggiore di $^1/_{10}$ e in generale di $^1/n$.

317. *Considerazioni sullo stabilimento de' volanti*. — L'ufizio del volante è di regolare il moto quando la celerità è periodicamente variabile per effetto della potenza o della resistenza, assorbendo o accumulando in se stesso la forza viva quando essa nella macchina eccede, e restituendola quando vi manca. L'asse della macchina al quale si pone il volante suole essere molto solido, e quello stesso ove si riscontra la cagione della irregolarità di moto, e quello che ha maggior velocità nel caso che più assi si trovino in tali situazioni. Per comprendere come si possa regolare il peso del volante nelle diverse macchine, e le altre considerazioni particolari conviene applicare il discorso come fo qui appresso a macchine particolari.

Si abbia una manovella a semplice effetto, munita di un volante. Sia P la potenza che vi agisce, R la lunghezza del gomito, Q la resistenza che deve vincere, b il braccio di leva di questa resistenza. A questa manovella sia applicato un volante di peso P, e di raggio medio R_1 il quale ha per velocità angolare massima ω' e minima ω'', e per velocità media ω che differisce in più o in meno dalle precedenti per l'n esima parte del suo valore. Per quello che abbiamo stabilito (287) parlando delle manovelle agisce una tal manovella come se la potenza avesse un braccio di leva costante $= 0,318$ R. Dunque nelle posizioni ove la potenza agisce con braccio maggiore a questo si andrà accumulando velocità nel volante, e il massimo di velocità l'otterrà quando il braccio di leva della potenza è $= 0,318$ R, lo che accade dopochè la potenza ha agito per più di un quarto di giro. Egualmente si andrà perdendo velocità finchè il braccio di leva della potenza si mantiene minore di 0,318 R, ed il minimo si otterrà nel primo quarto di giro per il quale la potenza agisce e precisamente ove il braccio di leva ha questo indicato valore. Allorchè la manovella passa dalla seconda alla prima di queste posizioni la forza viva acquistata dal sistema deve essere eguale al doppio del lavoro meccanico perduto per effetto di questo acquisto, cioè al doppio lavoro che si sarebbe prodotto se non si acquistava celerità per il solo effetto della potenza P che agi-

sce sulla manovella, meno il lavoro che effettivamente si è ottenuto sulla resistenza Q. Nessuna difficoltà può esservi per ritrovare il valore di questa quantità dopochè si avverta che il lavoro ottenuto è dato dal peso Q moltiplicato per l'arco di circolo che esso ha percorso, e che il lavoro il quale avrebbe prodotto la manovella è dato dalla potenza P moltiplicata per la proiezione dell'arco percorso dal suo bottone fatta sul diametro; ed abbiamo

$$\left(\frac{P_1}{g}R_1^2+\frac{Q}{g}b^2\right)(\omega'^2-\omega''^2)$$
$$=4PR\sqrt{\left[1-(0{,}318)^2\right]}$$
$$-\ 4Qb.\ arc\ (cos=0{,}318)$$

E poichè nell'intero giro della manovella si deve utilizzare tutto il lavoro prodotto dalla potenza avremo $P.2R=Q.2\pi b$, e perciò l'equazione si riduce

$$\frac{P_1}{g}R_1^2+\frac{Q}{g}b^2=\frac{4PR}{\omega'^2-\omega''^2}\Big(0{,}947$$
$$-\ 0{,}318\ arc\ cos\ =\ 0{,}318\Big)$$

Alla stessa equazione saremmo giunti se invece di parlare della forza viva acquistata si fosse trattato della forza viva perduta nel passaggio della manovella della prima posizione sopra indicata alla seconda. Inoltre abbiamo

$$\omega''=\frac{n-1}{n}\omega,\ \omega'=\frac{n+1}{n}\omega$$

ed

$$\omega'^2-\omega''^2=\frac{4\omega^2}{n}$$

il qual valore si può sostituire nell'equazione, ed avremo il valore del peso del volano per un determinato valore di n

$$P_1=5{,}39\ \frac{nPR}{\omega^2R_1^2}-\frac{Qb^2}{R_1^2}$$

Per un secondo esempio prendiamo a considerare la manovella a doppio effetto munita di volante, nella quale dovrà essere $P.2a=Q\pi b$, ed il braccio medio di leva (287) come si è mostrato è $=0{,}636$. Ritenute le stesse denominazioni, e fatti analoghi ragionamenti si trova che questo valore del braccio medio di leva appartiene a quattro situazioni della manovella ove il sistema acquista il massimo e il minimo di velocità, e che la relazione tra la forza viva acquistata e il lavoro meccanico perduto dà

$$\left(\frac{P_1R_1^2}{g}+\frac{Qb^2}{g}\right)\left(\omega'^2-\omega''^2\right)$$
$$=4PR\sqrt{\left[1-(0{,}636)^2\right]}$$
$$-\ 4Qb.\ arc\ (cos=0{,}636)$$

dalla quale equazione si deduce

$$P_1=2{,}048\ \frac{nPR}{\omega^2R_1^2}-\frac{Qb^2}{R_1^2}$$

Per le macchine a vapore a bassa pressione stabilisce il Morin che si determinerà il peso del volante colla seguente formula

$$P_1=4645\ \frac{n.N}{mV^2}$$

ove N rappresenta la forza della macchina in cavalli di 75^{km}, m il numero dei giri del volante in 1", e V la velocità della circonferenza media. Egli stabilisce che si dà ad n un valore tra 20 e 25 per le macchine destinate a delle fabbriche che non hanno bisogno di gran regolarità di moto, come quelle per i mulini a farina, per le seghe, per le trombe ec; che si dà ad n un valore tra 35 e 50 per le filature del cotone dal n.° 40 a 60; e che si dà un valore tra 50 e 60 per le filature del cotone il più fine. In una macchina a vapore della forza di 40 cavalli per la filatura di Logelbach, nella quale il volante fa da 19 giri in 1", ed ha per raggio medio $6{,}^{m}10$, ed ove il cotone si fa dal n.° 40 al 60, i costruttori Watt e Boulton han dato 9450^{k} per peso

del volante, e la formula assegnerebbe 9320^k.

Il medesimo autore nei volanti per i magli, dovendo quelli avere un peso maggiore quanto più questi pesano, considerato nel peso la testa il manico e la ferratura, suggerisce le formule

Magli di
- 600 a 800^k . $P_1 = \frac{15000}{R_1^2}$
- 3000 a 3500^k . $P_1 = \frac{20000}{R_1^2}$
- 4000 a 4900^k . $P_1 = \frac{30000}{R_1^2}$

Martinetto di....
- 500^k ..... $P_1 = \frac{9000}{R_1^2}$
- 360^k ..... $P_1 = \frac{6000}{R_1^2}$

Per una sega da legno ad una sola lama ..... $P_1 = \frac{30000}{V^2}$

Per un laminatojo si comprende che il volante deve esser tanto meno peso quanto più potente è il motore, cioè quanto più sono le paja dei cilindri perchè quando riposa un pajo agisce un altro, perciò essendo N il numero dei caval-vapore che danno la forza del motore, secondo che saranno questi

Cavalli ..
- 80 a 100 $P_1 = \frac{2600000\,N}{nRV^2}$
- 60 a 70 $P_1 = \frac{3250000\,N}{mV^2}$
- 30 a 40 $P_1 = \frac{10400000N}{mV^2}$

CAPITOLO X.

Sul calcolo delle Macchine composte.

318. *Differente scopo che può avere il calcolo sulle macchine.* — Si richiede il calcolo di una macchina, quando essa già esista per conoscere il prodotto che darà mentre lavora e per sapere come si esaurisce in urti o in resistenze nocive quella porzione della potenza che non produce effetto utile. Ovvero richiedesi per stabilire la macchina, onde possa darlesi la migliore disposizione, e possa conseguirsi dal motore la massima quantità d'effetto utile. Sì nell'uno che nell'altro punto di vista, si ottiene il rapporto tra il lavoro meccanico del motore, e quello dell'effetto utile della macchina. Quanto maggiormente questo rapporto si avvicina all'unità tanto meglio si dirà stabilita la macchina. Per calcoli eseguiti e osservazioni già fatte sovra diverse macchine si è determinato questo rapporto (*Int.pag.* 190); si ha anche la riduzione in lavoro meccanico della maggior parte de' lavori utili (*Int. pag.* 183) che possono colle macchine conseguirsi; e con questi due elementi il più delle volte il calcolo delle macchine composte riducesi ad un semplice calcoletto aritmetico. Che se la macchina da calcolarsi non sarà precisamente composta come le altre di eguale specie già calcolate anzichè far di nuovo tutto il calcolo potrà tornar conto di valutare le resistenze nocive o la variazione di velocità che può dare l'organo nel quale consiste la differenza, per dedurre il più o il meno del lavoro utile che può attendersi. In qualche macchina ove l'effetto consiste non in una lavorazione ma in un movimento come sarebbero gli orologi, gli automi, le macchine calcolatrici ec. si tratta di conoscere la legge del movimento che si produce, e la potenza che è necesraria per vincere le resistenze nocive. Di queste abbiamo dato alcuni esempj parlando delle macchine per la mi-

sura delle linee, delle superficj e dei volumi (*Int. dal* 26 *al* 33), onde qui crediamo sodisfare a ciò che si riferisce a tal classe di macchine colla seguente

319. *Descrizione del castello dell' orologio, e calcolo sulla velocità delle sue ruote.* — Ho parlato del pendolo (202) da orologio, e degli scappamenti (290) con assai estensione, onde mi rimane per far comprendere questa macchina di aggiungere qualche cosa sulla combinazione delle ruote dentate che formano il castello M (Tav. XIX. fig. 5), ed il meccanismo delle lancette N. L'uno ha per scopo di dare un moto rigorosamente uniforme in un asse e tale che compia una rivoluzione in un ora, ed è questo l'asse della lancetta dei minuti; l'altro di dare ad una canna concentrica all'asse indicato un moto egualmente uniforme ma dodici volte più lento, la quale porta la lancetta dell'ore. La molla *a* d'acciaio dell'orologio è curvata e raccolta in un tamburo, il quale è nella figura soppresso, ma riman ben necessario per impedire che la molla prenda una forma irregolare, o che rompendosi urti negli altri pezzi delicatissimi dell'orologio. È fermo l'estremo esteriore della molla, e l'altro si unisce all'asse che carica l'orologio quando non si fa uso della catena, ma se vi è questa la disposizione della molla è inversa, e vi è la piramide come abbiamo altrove detto (313). L'asse sul quale è fissata la molla porta una ruota dentata *b* folle; ed una ruota minore *c* che per mezzo del cricchetto rende fissa la prima. Quando l'orologio si scarica la ruota *b* mediante un rocchetto dà moto alla ruota *centrale e* che appartiene all'asse dei minuti. Quest'ultima ruota *e* ingrana in altro rocchetto *g* all'asse del quale è altra ruota chiamata ruota *media*. Muove ancor questa un rocchetto che è fisso sull'asse della ruota *h* detta anche ruota *di campo*, la quale mediante un ultimo rocchetto muove la ruota *di rincontro* o serpentina di cui i denti urtano nelle palette della bilancia. Regola questa il moto della serpentina, e per conseguenza di tutte le altre, e sebbene la forza della molla sia eccedente per vincere gli attriti di tutto il meccanismo vien raffrenata dal non poter girare l'asse che la tiene avvolta se non a misura che si compiono le successive oscillazioni della bilancia. Nè può dirsi in un'orologio con bilancia molto leggera che le oscillazioni sieno indipendenti dalla forza della molla perchè coll'intermedio di tutte le ruote si fa una serie di sforzi trasmessi dalla molla alla bilancia, la quale lanciata in un senso reagisce colla piccola molla spirale *n* e la rimanda in senso contrario. Poichè conviene che la gran ruota centrale dei minuti compia un giro in un ora occorrerà proporzionare il numero de' denti delle diverse ruote alla celerità che deve avere la bilancia che dipende dalla forza della spirale, e della molla. Anche tra la ruota della molla e quella dei minuti converrà aggiungere delle ruote supplementarie nel caso che la carica dell'orologio debba durare per più giorni. Supponiamo che la bilancia faccia 9000 vibrazioni in un ora, o 150 per minuto (cioè 5 per 2″ come ha luogo ordinariamente nei cronometri); e che la ruota di campo debba fare una rivoluzione in un minuto daremo n.° 60 denti alla ruota centrale, e sei al rocchetto della ruota media, ed a questa n.° 48 denti, e 8 al roc

chetto della ruota di campo. Allora la ruota media sarà 10 volte più celere di quella dei minuti o centrale, e la ruota di campo sarà 6 volte più celere di quella media, cioè 60 volte più celere di quella centrale, essa dunque potrà marcare sulla mostra i minuti secondi, mentre quella centrale serve a marcare i minuti primi. La regola per conoscere il rapporto tra la celerità di due assi consiste nel dividere il prodotto dei denti delle ruote, per il prodotto delle pinne de' rocchetti che in esse ingranano: così nel caso attuale abbiamo

$$\frac{60.\ 48}{6.\ 8} = 60$$

Gli orologi ordinari da tasca sogliono avere il seguente reparto di denti

Ruota del tamburo, o della piramide	N.° 60
Rocchetto che ingrana in quella	8
Ruota centrale	64
Rocchetto che ingrana in quella	6
Ruota media	52
Rocchetto che ingrana in quella	6
Ruota di campo	50
Rocchetto che ingrana in quella	6
Ruota di rincontro	12

se vuolsi il rapporto tra la velocità dell' asse nella ruota centrale e quello della bilancia che per ogni doppia oscillazione lascia passare avanti un dente della ruota di rincontro avremo

$$\frac{64.\ 52.\ 50.\ 12}{6.\ 6.\ 6} = 9244\ {}^4/_9$$

cioè in un ora la bilancia fa 9244 $^4/_9$ oscillazioni. Se poi vorremo sapere il rapporto di celerità tra l' asse della ruota del tamburo e quello della ruota centrale avremo

$$\frac{60}{8} = 7\ {}^1/_2$$

cioè in sette ore e mezzo si svolge un giro della molla, e per la carica di un giorno occorrono circa giri 3 $^1/_2$.

Passiamo a considerare il meccanismo delle lancette. L' albero della ruota centrale dopo avere attraversato il castello M, attraversa anche il meccanismo delle lancette N, ed ivi è rivestito a fregamento duro da una cannetta d'acciaio che all' estremità è squadrata e sporgendo fuori della mostra dell' orologio vi porta la lancetta dei minuti. Questa cannetta chiamata de' minuti si può girar sull' albero della ruota centrale per portare la lancetta de' minuti senza danno del castello avanti e indietro sulla mostra. Sotto la mostra sta saldamente nella cannetta de' minuti il rocchetto de' minuti r che si ingrana nella ruota di cambio i. Alla ruota di cambio va unito un rocchetto, che spinge in giro la ruota dell' ore l montata sopra una canna che circonda comodamente la cannetta dei minuti, e sporge un poco fuori della mostra ove porta la lancetta dell' ore alquanto più bassa di quella dei minuti. Per la dentatura delle rammentate ruote fa dodici giri la cannetta de' minuti, mentre compie un sol giro la canna dell' ore. Abbia la ruota di cambio denti

ti	N.° 52
la ruota dell' ore	30
il rocchetto de' minuti	10
il rocchetto della ruota di cambio	8

sarà

$$\frac{52.\ 30}{10.\ 8} = 12$$

il rapporto di velocità tra le due canne che portano le lancette dei minuti e dell' ore.

520. *Descrizione e calcolo di un verricello portatile, e di una grua.*— Componesi il verricello (Tav. XIX. fig. 6) di due telai di ghisa HH riuniti da tre traverse P, P, P; il piede di ciascun telaio porta talvolta delle piccole e solide ruote, ed è munito di tre fori per passarvi delle

chiavarde, e fissar solidamente la macchina a panconi fermati saldamente nel suolo. Due manovelle AA sono unite all' asse B che porta il rocchetto C. Questo agisce sulla ruota dentata D che è fissata al cilindro F al quale si avvolge la corda che porta la resistenza. Confrontando questo verricello che è tutto di ghisa, con gli altri di legno che abbiamo descritti (247. 253. Tav. X. fig. 1. 3. 11. 12.) sarà facile formarsi idea della superiorità ed eleganza di costruzione che s' introduce nelle macchine sostituendo il ferro al legno. Sia il raggio del rocchetto otto volte più piccolo di quello della ruota, e sei volte più piccolo del gomito della manovella, e sia il raggio del cilindro sei volte minore di quello della ruota avremo che mentre la manovella fa un giro il cilindro non ne percorre che un ottavo, e che fatta astrazione dall' attrito la potenza P sta alla resistenza Q :: 1 : 56. Che se poi vogliamo tener conto delle resistenze nocive porremo che gli assi siano grossi respettivamente $^1/_6$ del rocchetto, e del cilindro; che sia il coefficente d' attrito $f = 0,16$; che per non errare in difetto di potenza la resultante della pressione su pernj dell' asse B sia eguale a P + X, essendo X lo sforzo che vien comunicato dalla potenza ai denti della ruota; e che si deva aggiungere un diciottesimo (251) della potenza per l' attrito dell' ingranamento, si avrà

$$\left(6 - \frac{1}{18}\,6.\right) P = X.1 + 0,16.\,{}^1/_6(P+X)$$

cioè

$$X = 5,5\,P$$

Adesso per aver la relazione tra la forza X e la resistenza Q poniamo che la fune sia nuova di canapa e del diametro $0,^m02$ e che il diametro del cilindro sia $0,^m23$. Avremo per il diametro della ruota $1,^m38$ e per conseguenza l' equazione dello stato prossimo al moto sarà $0,^m69.X =$

$$0,^m12\ Q + \frac{0,22246 + 0,009768\ Q}{0,^m24}\,0^m,12$$
$$+\,0,16.\,{}^1/_6.\,0,^m115\,(X + Q + p)$$

ove p rappresenta il peso della ruota e del cilindro, che supporrò $= 300^k$. Onde sostituito il valore di X e fatte le convenienti riduzioni si trova

$$P = 0,054\ Q + 0^k,55$$

Il calcolo che abbiamo accennato ci porta a conoscere quanti uomini si dovranno impiegare alle manovelle per vincere una determinata resistenza. Poniamo infatti che sia la resistenza $Q = 3000^k$, avremo $P = 102,55$ E poichè la forza dell' uomo per sollevare, e sostener (272) dei pesi è da 130^k a 150^k potrà dirsi che durando l' operazione piccol tempo serve un solo uomo. Nel caso però che debbasi permanentemente seguitare nell' operazione, ricorderemo che un uomo lavorando otto ore del giorno alla manovella farà (*Int. pag.* 180) 172800^{km} cioè 72^{km} in un quinto di minuto che io suppongo essere il tempo di un giro della manovella. Ma poichè la manovella sotto l' azione di un uomo ha doppio effetto cioè risente lo sforzo tanto nel montare del suo gomito quanto nel discendere, dovrà questo lavoro eguagliare lo sforzo permanente dell' uomo moltiplicato per due volte il diametro cioè per $2^m,76$. Perciò sarà circa 26^k lo sforzo permanente dell' uomo quando gira la manovella colla sovra indicata velocità, ed occorrerà porre due uomini a ciascuna delle due manovelle. Finalmente avvertirò che per il calcolo della macchina può occorrere di provare se sarà bastante la resistenza delle sue diverse parti, e più potrà interessare quella della fune, e quella della fermezza che avrà la macchina sul suolo, ma per tutte que-

ste ricerche abbiamo dati gli elementi necessari (Cap. I.)

Un'altro esempio di macchine destinate a sollevar dei pesi da usarsi nelle costruzioni lo sceglierò nella gru di ferro che fu impiegata da Stevenson nella costruzione del faro di Bella Rocca (Tav. XIX. fig 7). Sebbene qui io parli di una sola gru l'ingegnere inglese ne contrapponeva due in situazione da sorreggersi scambievolmente. Il braccio *ab* di questa gru è a cerniera in *b* e si inalza o si abbassa secondochè la catena *acd* si raccoglie o si svolge dal verricello *d*. La catena che fa salire la pietra, e che passa sotto la carrucola *g* si ravvolge sull' altro verricello *e*; dopo un certo punto d'inalzamento fermata quella catena allo stesso verricello si fa agire altra catena *gf*. Quando la pietra è inalzata e condotta sovra il ripiano del muramento col far girare tutta la macchina sul suo asse può esser trasportata al punto ove deve collocarsi. Ciascun verricello ha una ruota dentata concentrica nella quale ingrana un rocchetto che è mosso da una manovella. Onde il calcolo di questa macchina circa i verricelli è quello stesso che abbiamo sopra indicato: la differenza consiste 1.° nella resistenza che ha da vincere ciascun verricello, che è data dalla tensione che avranno le catene, 2.° nelle resistenze che sono cimentate cioè delle catene e delle diverse spranghe di ferro che compongono la macchina e particolarmente dal braccio *ab*. La tensione delle catene è differente nelle loro diverse posizioni. Quando non è in azione la carrucola *g*, e si agisce solamente sulla catena *hagcd* siccome essa passa per sole carrucole fisse fatta astrazione dagli attriti si avrà sull' argano *d* una resistenza eguale al peso della pietra che indico con Q. Volendo considerare anche gli attriti degli assi delle carrucole avvertiremo che nello stato prossimo al moto il tratto di catena *ah* è tesa dalla quantità Q, l' altro *ac* è teso per la quantità Q aumentata dall'attrito della carrucola *a*, e nel tratto *cd* oltre alla tensione precedente di *ac* si ha anche l'attrito della carrucola *c*. Ad oggetto di dare un'esempio del calcolo numerico da eseguirsi poniamo che il diametro delle carrucole sia $0^m,08$ e quello del loro asse $0^m,009$, e che il coefficente d'attrito possa porsi $f = 0,075$; sia la pietra da sollevarsi del peso $Q = 580^k$; sia il braccio *ab* eguale all'antenna *bc*, e l'angolo che fanno i due tratti di catena col braccio *ab* dovendo essere quasi eguale da ambedue le parti giacchè è questa la posizione nella quale la pressione sulla carrucola avrà la direzione del braccio sarà *acb* un triangolo equilatero, e l'angolo che fanno i tratti di catena col braccio avrà per misura 60.° per conseguenza il triangolo delle forze può esserci rappresentato da *acb*, ed *ab* rappresenterà la resultante, la quale essendo eguale alla componente *bc* che rappresenta Q avremo che la pressione sulla carrucola sarà Q, e la tensione del tratto di catena *ac* verrà ad essere

$$Q + \frac{0^m,009 \,.\, 0,075}{0^m,08} Q = Q + 0,0084 Q$$
$$= 1,0084 \,.\, Q.$$

La pressione N sulla carrucola *c* può con approssimazione servendosi della dottrina del parallelogrammo delle forze determinarsi per mezzo della seguente proporzione

$N : 1,0084 Q :: sen 120° : sen 30 : 0,866 : 0,5$

e si trova $N = 1,747$ Q. Onde la tensione del tratto *cd* di catena è $1,0084$ Q $+ 0,084$ N $= 1,155$ Q. Al-

lorquando agisce la catena gf la sua tensione sarà eguale alla resultante delle tensioni dei due tratti di caténa ag, gc, la quale si scorge dovére essere tanto più grande quanto più piccolo è l'angolo agc e mai sarà eguale alla loro somma, e per ordinario non supererà il valore della tensione ultimamente determinata. In ultimo caso converrà fare agire anche la catena ac, ed allora la resultante delle pressioni prodotte sulla carrucola a dà due tratti di catena ah, ag non ha la direzione del braccio ab e presso a poco sempre divide per metà l'angolo gah. Quindi potremo decomporre questa resultante in due forze una nella direzione ab, e l'altra nel prolungamento di ca, e quest'ultima componente darà la tensione della catena ac. Con queste precedenti considerazioni abbiamo insegnato a trovare la forza di compressione alla quale va soggetto il braccio ab, e le forze che stirano le differenti catene, e per conseguenza applicando le dottrine stabilite (Cap. I.) sulla resistenza de' solidi sarà facile dedurre se quelle parti della macchina potranno resistere.

Anche qui facendo il confronto tra la gru ora descritta e quella rammentata al §. 253 (Tav. X. fig. 16) si riconosce il gran vantaggio che si ha nel servirsi del ferro fuso nella costruzione delle macchine invece del legno, e quanto al dì d'oggi i meccanici posson giovarsi delle facilità che si hanno per le fusioni del ferro.

321. *Osservazioni sul modo di calcolare l'attrito negli ingranamenti, e calcolo per una combinazione di ruote dentate.* — Per determinare l'attrito degli ingranamenti quando i denti sono assai fitti invece di ritenere ciò che abbiamo insegnato (251) altrove potrà farsi uso della formula che ora stabiliremo. Si consideri una ruota col centro in C (Tav. XIX. fig. 8) che ne conduce un'altra la quale ha il centro in C' per mezzo della curva $m'm$ che spinge l'altra $m''m$, e si prenda a fissare per una situazione qualunque di queste curve di qual quantità si deve aumentare la forza che è applicata alla prima ruota per vincere l'attrito che ha luogo da una parte e dall'altra di queste curve dei denti. Per la posizione di esse rappresentiamo con BmB' la lor tangente comune, e con Am la lor normale; sieno R,R' le distanze CA, C'A; ϕ sia l'angolo mAC' formato dalla normale alla curva con la linea dei centri; P la potenza applicata alla ruota che ha per centro C che agisce col braccio di leva R; ed f il coefficente d'attrito. Dovrà non solo nell'equilibrio ma anche nel moto uniforme il momento della forza P essere distrutto dal momento della forza normale alle curve che io chiamerò N, la quale agisce col braccio di leva CD = R $sen\ \phi$, dunque PR = N. R $sen\ \phi$ cioè

$$N = \frac{P}{sen\ \phi}$$

Ora questa pressione produce un'attrito $\dfrac{fP}{sen\ \phi}$

che dà una resistenza agente nella direzione BB' e perciò col braccio di leva CB per la ruota C, e col braccio di leva C'B' per l'altra ruota C'; e tal resistenza si oppone al moto non solo coll'azione sovra ad una ruota: ma anche con quelle sull'altra perchè è come un legame fra dente e dente che tira ambedue le ruote in senso contrario al movimento. Riportate queste due resistenze ad avere i bracci di leva R,R' saranno

$$\frac{fP}{sen\,\phi}\,\frac{CB}{R'} \qquad \frac{fP}{sen\,\phi}\,\frac{C'B'}{R'}$$

e poichè abbiamo

$CB = Am + R\cos\phi,\ C'B' = Am - \cos\phi$

la somma di queste due resistenze che danno la quantità di forza da aggiungersi alla potenza la quale si sarebbe dovuta usare nel caso che non fosse esistito attrito, sarà

$$fP.\frac{(R+R')}{RR'}\,\frac{Am}{sen\,\phi}$$

Negli ingranamenti essendo il moto della ruota uniforme, R, R′ sono costanti e variano soltanto Am, φ, e se i denti sono molto serrati φ differirà pochissimo da un angolo retto, ed avremo

$$sen\,\phi = 1,\ Am = R'\,tang\,\widehat{AC'm}$$

la qual tangente essendo i denti piccolissimi si converte coll'arco che io chiamo x ed avremo la nostra formula ridetta $fP\,\frac{R+R'}{R}\,x$

ma l'arco x deve essere la media di quelli per i quali seguita la pressione dei denti, cioè di quelle avanti la linea dei centri x', e dopo questa x'', dal loro valore zero fino al loro valor massimo, ed avremo

$$fP\,\frac{R+R'}{R}\quad\frac{x'+x''}{2}$$

ma $R'(x'+x'')$ è il passo a del dente della ruota onde avremo

$$fP\,\frac{R+R'}{RR'}\,\frac{a}{2}$$

di più ora chiamati m, m' i numeri dei denti nelle due ruote avremo

$$am = 2\pi R,\ am' = 2\pi R'$$

e perciò $fP\pi\,\frac{m+m'}{mm'}$

è la formula dell'attrito degli ingranamenti che molti autori dietro la scorta del Poncelet suggeriscono a preferenza di quella che ho dato altrove insegnando ad aumentare la potenza P nel rapporto di $1 : \sqrt{1+f^2}$ per ogni ingranamento. Da quella formula ne viene che l'attrito scema all'aumentare il numero dei denti m, m': che l'attrito cresce quando le ruote si avvicinano ad avere egual numero di denti e di più sta sempre quest'attrito in ragione inversa del numero de' denti nella ruota minore. Infatti essa porta che l'attrito in ruote dentate eguali sta a quello a ruote che hanno massima differenza nel numero dei denti

$$:: \frac{2}{m'} : \frac{1}{m'}$$

Nelle applicazioni accade che quando il numeratore di queste frazioni è l'unità anche il denominatore è piccolo, e perciò l'attrito non scema: supponiamo che una ruota di 80 denti ingrani in altra egual ruota di 80 denti, avremo

$$\frac{m+m'}{mm'} = \frac{2}{m'} = \frac{1}{40}$$

e che una ruota di 80 denti ingrani in un rocchetto di 8 pinne, avremo prossimamente

$$\frac{m+m'}{mm'} = \frac{1}{m'} = \frac{1}{8}$$

cioè nel secondo caso si avrà un'attrito cinque volte maggiore che nel primo.

Da tutto ciò scorgesi quanto questo metodo di calcolar l'attrito degli ingranamenti che è dovuto a Poncelet differisca dall'altro che sopra ho rammentato dal quale dedussi la regola di Belidor, cioè di valutare la perdita di $^1/_{18}$ della potenza per ogni ingranamento. Tenendo dietro alla teoria comparisce più esatta la formula di Poncelet, ma nella pratica forse per le piccole irregolarità dei denti, dalla seguente esperienza mi è resultato, che egualmente bene corrisponda la regola di Belidor la quale ho applicata anche nel paragrafo precedente. Non intendo di levar d'uso la formula che qui sopra ho dimo-

strata la quale anche più rigorosa comparisce per gli ingranamenti a sviluppante, ma solo di far comprendere che quando non son dati i numeri dei denti delle ruote si potrà con molta approssimazione usar la semplicissima regola di Belidor. Che anzi a far intendere come quella formula dell' attrito si modifichi quando si avesse un' ingranamento di una ruota con una cremagliera o con una vite perpetua avvertirò potersi allora riguardare il numero dei denti della cremagliera, o della vite come infinito, e perciò l' attrito dell' ingranamento viene espresso per

$$f\frac{P\pi}{m'}$$

Lo stesso può dirsi per l' ingranamento a ruota corona ma per l' ingranamento conico la formula vien compresa tra questa e la precedente onde per valutare le resistenze piuttosto in eccesso che in difetto consigliamo nella pratica ad usare la precedente.

Io aveva tre ruote dentate di ottone lavorate con molta cura, e con gli assi ed i rocchetti di acciaio (Tav. X. fig. 5). Il raggio delle circonferenze primitive dei rocchetti era $r = 9^{mm},1$, e stava a quello della ruota :: 1 : 10. Il raggio degli assi era $r' = 4^{mm}$. I denti di ciascuna ruota erano $m = 80$; e le pinne di ciascun rocchetto $m' = 8$. Il peso della ruota unita al rocchetto $p = 0^k,62$. Il coefficente d' attrito tra l' asse d' acciaio unto e la canna di ferro porrò $f' = 0,1$. Il coefficente d' attrito tra denti e denti che aveva fatti asciugare e perciò possen dirsi non unti porrò $f = 0,2$. Applicando al cilindro dell' ultima ruota una resistenza

$$Q = 4^k,86;\ = 9^k,51;\ = 14,84$$

ho ritrovato abbisognare per mantenere il moto equabile e lento una potenza

$$P = 0^k,0119;\ = 0^k,0173;\ = 0^k,025.$$

La formula per il calcolo coerentemente alla teoria esposta in questo paragrafo sarebbe

$$Q(r+f'r')^2 = P\Big(10.r - f'r' - f\pi 10.r\frac{m+m'}{mm'}\Big)^2(10r - f'r') - f'r'p\Big[(r+f'r')^2 + (r+f'r')(10.r - f'r') + (10r - f'r' - f\pi 10r\frac{m+m'}{mm'})(10r - f'r')\Big]$$

e sostituiti i valori numerici

$$Q(9,5)^2 = P(76,49)^2(90,6) - p(3152,38)$$

ove posti i rammentati valori di Q abbiamo

$$P = 0^k,0115;\ = 0^k,019;\ = 0,027$$

vale a dire dei resultati assai prossimi a quelli che si sono avuti dall' esperienza. La formula coerentemente all' altra teoria (251) sarebbe

$$P(10.r - f'r')^2 = Q(r\sqrt{1+f^2} + f'r')^2(r+f'r') + f'r'p\Big\{(10r - f'r')^2 + (10r' - f'r')(r\sqrt{1+f^2} + f'r') + (r\sqrt{1+f^2} + f'r')^2\Big\}$$

ove fatto $f = 1/3$ cioè secondo la regola di Belidor posto $\sqrt{1+f^2} = 19/18$ e sostituiti gli altri valori numerici si ha

$$P(90,6)^2 = Q(10)^2(9,5) + p(3685,74)$$

ove posti i rammentati valori di Q abbiamo

$$P = 0^k,0089;\ = 0^k,015;\ = 0^k,0217$$

vale a dire dei resultati non molto minori di quelli sperimentali.

Per una seconda esperienza ho fatte ingranare fra loro le due sopra descritte ruote dentate eguali di ottone ciascuna con 80. denti, e tangenzialmente al rocchetto concentrico ad una ho applicata la resistenza

Q, mentre tangenzialmente alla circonferenza primitiva dell'altra stava applicata la potenza P. Gli assi erano sempre d'acciajo, e quello della prima ruota con raggio $r' = 4^{mm}$, e quello della seconda con raggio $r'' = 4{,}3^{mm}$. Applicando le resistenze $Q = 4^k{,}86$; $= 9^k{,}55$ sono occorse per produrre moto lento ed equabile le potenze $P = 0^k{,}605$; $= 1^k{,}18$.

La formula per formare il calcolo secondo la teoria esposta in questo paragrafo è

$$Q(r + f'r'')(10.r + f'r') = P(10r - fr'')\left(10.r - f\pi.\,10r\frac{m+m'}{mm'} - f'r'\right) - f'r'\,p\left(20.r - f\pi.\,10.r\frac{m+m'}{mm'}\right)$$

nella quale sostituiti i sopra rammentati valori numerici si ha

$$Q(9{,}53)(91{,}4) = P(90{,}57)(88{,}22) - p(71{,}85)$$

e qui posti i rammentati valori della resistenza Q otterremo

$$P = 0^k{,}535;\ = 1^k{,}05$$

La formula dipendente dall'altra teoria darebbe

$$P(10.r - f'r')(10.r - f'r'') = Q(10r\sqrt{1+f^2} + f'r')(r + f'r'') + f'r'p(10r + 10r\sqrt{1+f^2})$$

nella quale sostituiti i valori numerici abbiamo

$$P(90{,}6)(90{,}57) = Q(96{,}46)(9{,}53) + p(74{,}82)$$

e perciò per i rammentati valori di Q si ha $P = 0^k{,}55$; $= 1^k{,}07$: resultati che si avvicinano più dei precedenti a quelli dell'esperienza.

Nei tre numeri seguenti riporterò esempi di macchine calcolate da Taffe nella opera *Application des principes de mecanique*, ove è fatto uso della formula di Poncelet per valutare l'attrito dei denti.

322. *Calcolo del lavoro utile ottenuto in diverse cartaje.* — Prenderò due esempi tratti da fabbriche esistenti di una cartaja a cilindri e una cartaja a magli. La cartaja a cilindri si compone di una ruota motrice AB (Tav. XX. fig. 1) che mette in moto la la ruota *ab* chiamata ruota di forza, la quale imprime un moto di rotazione alla lanterna *cd* e alla ruota orizzontale *a'b'*. Questa ingrana in una o più lanterne *c'd'* e fa girare un corrispondente numero di cilindri C che tritano i cenci posti nella pila K essendovi condotti sotto dall'acqua per il moto che le imprime il cilindro stesso. Quando la macchina ha acquistata l'uniformità per ottenere il lavoro della resistenza utile conviene eguagliare il lavoro della potenza al lavoro delle resistenze utili, e nocive. Stabiliremo l'equazione dei lavori per ciascuna parte della macchina servendosi della dottrina dei momenti di rotazione (112); e prima rapporto all'asse *mn* dell'albero della ruota, d'onde otterremo la forza *q* fatta su' fusi della gran lanterna; quindi rapporto all'asse *m'n'* che ci darà la reazione *q'* della lanterna del cilindro; in fine per rapporto all'asse *m''n''* del cilindro da dove si otterrà la resistenza Q dei cenci.

1.° Le forze che agiscono sull'asse *mn* sono la potenza P, la reazione *q* che si effettua tra le pinne del rocchetto, l'attrito degli assi della ruota motrice, e quello dei denti contro i fusi della lanterna. L'acqua offra una potenza costante $P = 280$ la quale agisca alla circonferenza della ruota idraulica cui suppongo un raggio medio $Q = 2^m{,}235$. Sia $= 1^m{,}33$ il raggio della ruota di forza. Sia $f = 0{,}155$ il coefficente d'attrito de' pernj ed $r = 0{,}045$ il loro raggio; 1400^k sia il peso della ruota motrice, 800^k quello del suo albero,

è il peso dalla ruota di forza 480k, cioè sovra i pernj dell' asse mn graviti un peso di 2680k, come anche vi agisca ad angolo retto con questa forza la resultante 280k + q della forza motrice e della reazione. Trascuriamo per adesso in questa resultante il valore di q, si avrà la seguente equazione dei momenti

$$280.\ 2,235 = q.\ 1,33 + 0,115.\ 0,045 \sqrt{(2680)^2 + (280)^2}$$

Dalla quale rilevasi $q = 460$. Ora potremo restituire questo valor di q per determinare con più precisione l'attrito de' pernj, ma si troverà ancora $q = 460.^k$ circa. Di questo valore dunque ci varremo per determinare l'attrito de' denti, il cui momento è (321) $fq\pi \frac{m+m'}{mm'} 1,33 = 8,70$ avendosi

$f=0,08.\ q=460.\ m=55.\ m'=26.\ \pi=3,1416$

Onde la prima equazione dell' equilibrio sarà

$$625,80 = q.\ 1,33 + 13,88 + 8,70$$

dalla quale deducesi $q = 453$.

2.° Ora ricercando egualmente i momenti delle forze relativamente al l'asse $m'n'$; e posto per raggio della gran ruota ab 0m,54, per quello del rocchetto cd 1,48, e per quello del pernio 0m,025 e posto il coefficente d'attrito del pernio contro il suo dado = 0,24, e la pressione proveniente dal peso dell'asse della ruota e del rocchetto = 720k supporremo che mandi due cilindri eguali, la reazione q' dei loro fusi sarà data dall' equazione

$$q.\ 0,54 = 2q'.\ 1,48 + 2q'f\pi \frac{m+m'}{mm'} 1,48 + {}^2/_3\ 0,025.\ 0,24.\ 720$$

Nella quale sostituito il ritrovato valore di q. $f=0,17$. $m = 74$. $m' = 11$ ottenghiamo $q' = 77.^k$

3.° Finalmente per l'asse $m''n''$ di uno dei cilindri, fatto il raggio del rocchetto = 0,m24, quello del cilindro = 0,m27, e = 0m,5 quello dell'asse su cui si fa l'attrito $f = 0,155$ per effetto del peso del rocchetto dell'asse e del cilindro che è 600k, e per effetto della potenza q' sommata alla resistenza Q, avremo

$$q'.\ 0,24 = Q.\ 0,27 + 0,155.\ 0,05 \sqrt{(600)^2 + (77 + Q)^2}$$

ove trascurato il valore di Q sotto il radicale come si è fatto di sopra per non risolvere l'equazione di secondo grado si avrà un primo valore di Q, e dopo sostituendo quello otterremo Q = 55.k per la resistenza che possono opporre i cunei a ciascun dei due cilindri. Che se vogliamo ottenere il lavoro utile fa duopo anche dedurre la celerità che avrà il cilindro nel moto della macchina. Il rapporto tra la velocità dell' asse della ruota motrice e la velocità dell' asse del cilindro si ottiene dal dividere il prodotto dei numeri dei denti per il prodotto dei numeri de' fusi delle lanterne o pinne dei rocchetti, e poichè la prima ruota ha 74 denti, e la seconda ne ha 55 e il primo rocchetto ha 26 fusi, ed il secondo 11, otterremo

$$\frac{74.\ 55}{26.\ 11} = 14,57$$

cioè mentre l'asse della ruota motrice fa un giro, quello del cilindro ne fa 14,57. Ma porremo che la ruota motrice faccia 9 giri per minuto, dunque il cilindro per ogni minuto farà 9. 14,57 = 131 giri in 1'', e la sua celerità sarà

$$\frac{131.\ 2\pi.\ 0^m,27}{60} = 3^m,71 \text{ in } 1''$$

Onde il lavoro utile in 1'' diviene 55k. 3m,71 = 204km,05 e per i due cilindri circa 408km circa. Il lavoro motore della macchina sarebbe

$$\frac{9.\ 2\pi.\ 2^m,235,280^k}{60} = 590.^{km}$$

e per conseguenza il lavoro perduto negli attriti sarà 282.^{km} e due ottavi e mezzo circa del lavoro motore.

La cartaja a magli (Tav. XX. fig. 2) si compone di una ruota motrice AB che fa girare un cilindro o albero A' armato di chiavelli C i quali sollevano un certo numero di magli M destinati a battere i cenci nelle pile P. Sia mossa da due ruote idrauliche una del diametro $2^m,24$, e l' altra $1^m,90$; ciascuna ruota faccia sollevare 15 magli, ed ogni pila abbia tre magli; batta ogni maglio 80 volte per minuto, abbia per peso 46^k75 e il centro di gravità della testa del maglio si elevi per $0^m,08$. Son lavorati in ogni giorno 8.^{k} di cenci. Per dirigere il calcolo in questa macchina considereremo prima l'equilibrio rapporto all' asse a e quindi rapporto all' altro asse b.

1.° Sul primo asse a agisce la forza q del chiavello di basso in alto col braccio di leva $ar = 1^m,22$; l'attrito sull'asse a; e il peso del maglio con il braccio di leva medio a quello che ha nelle sue diverse posizioni. Ora il sollevamento del maglio essendo sì piccolo può ritenersi che questo braccio di leva medio sia la stessa distanza del centro di gravità della testa del maglio dall'asse a che è $= 0,85$. Per l'attrito osserveremo esser la pressione data dalla potenza q, diminuita del peso del maglio, ed aversi per il raggio dell' asse $0^m,02$, e per il coefficente d'attrito 0,05 Quindi l' equazione cercata sarà

$$q . 1,22 = 46,75 . 0,85 + 0,02 . 0,05 (q - 46,75)$$

dalla quale rileviamo $q = 32,^k$.

2.° Sovra l'asse b agisce la forza q, l'attrito del chiavello, l'urto di questo, l'attrito dei perni, e la forza motrice P. Per determinare il momento della forza q stabiliamo per raggio dell' albero $0^m,24$ essendo 0,08 l' innalzamento del centro di gravità del maglio quello dell'estremità del suo asse sarà $\frac{1,22 . 0,08}{0,85} = 0,11$ d'onde tal forza avrà per raggio medio di leva

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{(0,24)^2 - (0,11)^2} + 0,24\right) = 0^m,23$$

Perciò il cercato momento per esser 5 magli sempre in azione diviene

$$5 . q . 0,23 = 5 . 32 . 0,23 = 36,80$$

Circa l' attrito del chiavello abbiamo continuamente sollevati 5 magli quindi resulta esso dalla pressione totale $5 . 32 = 160$, dal coefficente d'attrito $f = 0,1$, e dal braccio medio di leva che ora determineremo. Il manico del maglio essendo giunto all' estremità dell' arco che percorre la punta del chiavello, il braccio di leva è la perpendicolare abbassata dal centro di quest' arco sulla direzione della forza: perciò risolvendo un triangolo rettangolo la di cui ipotenusa è $0^m,24$, e il raggio dell'albero compreso il chiavello, ed ha un' angolo di 24.°, si trova in questa posizione il braccio di leva $= 0^m,10$: mentre poi il chiavello è in posizione orizzontale il braccio di leva è $= 0$, dunque quello medio sarà $= 0,05$, e il momento dell' attrito

$$0,1 . 0,05 . 160 = 0^k,80$$

Il lavoro perduto nell' urto è la metà della forza viva perduta; e poichè i due corpi che si urtano girano attorno a due assi bisogna alle masse dei corpi sostituire i momenti d'inerzia presi per rapporto a questi assi (114) e alla velocità effettiva quella angolare. Il momento d'inerzia dell' albero o cilindro b preso per rapporto al suo asse è

$$(182) \frac{P}{g} \frac{r^2}{2} = \frac{1000^k}{9,8} \frac{(0,15)^2}{2} = 0,87$$

essendo il peso del cilindro 1000^k, ed

il suo raggio $= 0^m,13$. La velocità angolare di esso è data dal numero n de' giri, che fa l'albero in un minuto, e si ha

$$\omega = \frac{n.2\pi}{60} = \frac{26,66.2.3,1416}{60} = 2^m,79$$

Il momento d'inerzia del maglio posto che il manico pesi 6^k, che la distanza del suo centro di gravità dall'asse sia 0,61, che la sua larghezza sia $0^m,14$, e l'altezza 1,22, si esprimerà così (183)

$$\frac{46,73}{9,8}(0,85)^2 + \frac{6}{9,8}\left\{(0,61)^2 + \frac{(0,14)^2 + (1,22)^2}{12}\right\} = 3,71$$

La forza viva perduta per l'urto si avrà dalla formula (206)

$$\frac{m'm}{m+m'}\omega^2 = \frac{3,71.\ 0,87}{0,87+3,71}(2^m,79)^2 = 5,48$$

onde il ricercato lavoro che si perde nell'urto è $\frac{5,48}{2} = 2^k,74$

Potremo supporre che questo lavoro sia consumato mentre il chiavello abbandona il maglio, cioè quando la velocità effettiva è

$$\omega.\ 0^m,24 = 2,79.\ 0,24 = 0,67$$

purchè si prenda per braccio di leva 0,24; allora la forza perduta in un'urto sarà

$$\frac{2,74}{0,67} = 4^k,08$$

E poichè si han 45 urti per ogni giro dell'albero, ed esso fa

$$\frac{26,66}{60} = 0,44$$

giri in 1", si avranno in questo tempo 0,44. 45 = 19, 80 urti, e la forza totale perduta sarà

$$19,80.\ 4,08 = 80,78$$

Onde il momento di questa è

$$80,78.\ 0,24 = 19,38$$

Per dedurre l'attrito degli assi dell'albero devono ivi trasportarsi parallelamente a loro stesse le seguenti forze: il peso della ruota e dell'albero che è $= 1664^k$ ed agiscè verticalmente di alto in basso: la forza perduta nell'urto che è $= 80^k,78$, ed agisce verticalmente di alto in basso: le forze $q = 5.\ 32 = 160^k$, o le reazioni dei manichi dei magli che agiscono verticalmente di alto in basso: la resistenza dell'attrito dei chiavelli 0,1. 160 = 16 che agisce orizzontalmente: e la potenza P che è quasi verticale. Perciò la resultante di tali forze sarà

$$\sqrt{(1664+80.78+160+P)^2+(16)^2}$$

nella quale trascurato P, e moltiplicata per il coefficente d'attrito $f = 0,085$, e per il raggio dei pernj $= 0,02$ otterremo il momento domandato $= 3,23$. Dunque essendo 1^m il raggio medio della ruota motrice, l'equazione d'equilibrio si trova

$$P.1 = 36,80 + 0,80 + 19,38$$
$$+ 3,23 = 60,21$$

cioè la potenza che manda la macchina deve essere circa 60^k.

323. *Calcolo del lavoro assorbito dall' attrito in diversi mulini.* — I. Primieramente si voglia mandare un mulino da farina con due cavalli che si muovono al trotto (Tav. XX. fig. 3), e prendiamo prima d'ogni cosa a determinare la costruzione della macchina, e di poi comporremo le equazioni dello stato prossimo al moto.

1.° La quantità di lavoro dato da un cavallo attaccato al maneggio quando va al trotto è di 60^{km} perchè lo sforzo si valuta 30^k, e la velocità 2^m per 1"; perciò con due cavalli si otterranno in 1" di lavoro 120^{km} Il raggio del maneggio sia $3^m,89$, e quello della ruota sia $2^m,59$. Il numero de' giri che farà in 1' sarà

$$n = \frac{2^m.\ 60''}{2\pi.3,89} = 4,91$$

La macina abbia per diametro d eguale ad un metro, e seguendo ciò che

stabilisce Navier siccome devesi contare sulla velocità media della macina stessa cioè sù quella che ha luogo ai due terzi del suo raggio, e la più utile velocità è di 4^m per 1″ si avrà

$$4^m = n.\,{}^2/_3.\,\pi d,$$

da dove rilevasi il numero dei giri della macina in un minuto

$$n' = \frac{3.\,4.\,60''}{2\,\pi d} = 1{,}91.\,60 = 114{,}60$$

Questo stesso numero di giri dovrà esser fatto dalla lanterna, e poichè i giri devono stare in ragione inversa dei raggi per determinare il raggio della lanterna faremo la proporzione

$$114{,}60 : 4{,}91 :: 2{,}59 : x = 0^m{,}11$$

allora la lanterna avendo 6 fusi dovrà la ruota avere 138 denti.

2.° Passiamo ora a stabilire l'equazione d'equilibrio per rapporto all'asse ab. I momenti delle forze saranno, quello della potenza P cioè

$$60.\,3{,}89 = 233{,}40;$$

quello dall'attrito del pernio che posto $f = 0{,}2$, e il raggio del pernio $= 0{,}02$ e il peso della ruota col suo albero $= 734.^k$ si riduce

$$0{,}2.\,734.\,{}^2/_3.\,0{,}02 = 19{,}52;$$

e il momento della resistenza q che oppone l'una ruota all'altra compreso quello dell'attrito de' denti il quale si calcola coll'espressione

$$fq.\,\frac{m+m'}{mm'}\,\pi\,.\,2{,}59$$

ma poichè non conosciamo il valore di q, prenderemo questo per adesso dall'equazione

$$233{,}40 = q.\,2{,}59 + 19{,}52$$

che è $q = 83{,}22$. Ora nella precedente espressione dell'attrito de' denti fatto $f = 0{,}2$; $m = 138$; $m' = 6$ si ha

$$0{,}2.\,82{,}22.\,\frac{144}{828}\,.\,\frac{7}{22}\,.\,2{,}59 = 23.^k$$

Dunque la prima equazione è

$$233{,}40 = q.\,2{,}59 + 19{,}52 + 23$$

e serve a trovare il valore di $q = 73{,}71$

3.° Una seconda equazione si ha per l'equilibrio dell'albero cd data dal momento della resistenza del grano da macinarsi il quale è Q. ${}^2/_3$. 0,50 dal momento dell'attrito dell'asse dell'albero della lanterna che è

$$0{,}2.\,765.\,{}^2/_3.\,0{,}0045 = 0{,}459$$

essendo il raggio di quell'asse $= 0{,}0045$, e il peso della macina dell'asse e della lanterna 765^k: e il momento della q che è $73{,}71.\,0{,}11 = 8{,}10$; perciò quell'equazione sarà

$$8{,}10 = {}^2/_3\,0{,}50\,Q + 0{,}459,$$

e da essa rileveremo $Q = 23{,}15$ per la resistenza del grano. La celerità ai due terzi del raggio della macina è

$$\frac{114{,}60.\,2\,\pi\,.\,{}^2/_3\,.\,0^m{,}5}{60} = 3^m{,}98$$

ed il lavoro utile

$$23^k{,}15.\,3^m{,}98 = 92^{km}{,}60.$$

Dunque il lavoro perduto sarà

$$120 - 92{,}60 = 27^{km}{,}40$$

un quinto circa del lavoro trasmesso.

4.° Per ottenere il prodotto di questo mulino faremo la proporzione (*Int. pag.* 184).

$$419000^{km} : 75^k :: 92 : x = 0^k{,}016$$

e questo essendo il grano macinato in 1″, si dedurrà quello che si macinerebbe in un ora per

$$0{,}016.\,60.\,60 = 57{,}60 \text{ più di un sacco.}$$

II. Si abbia a calcolare l'effetto di un mulino da farina mosso da una ruota idraulica orizzontale che dia per lavoro motore $PV = 662^{km}60$ in 1″ ed abbia per velocità $V = 6^m{,}97$. Questi mulini sono i più semplici: la ruota AB mossa dall'urto dell'acqua contro le pale per mezzo dell'albero bc comunica il suo moto di rotazione alla macina.

1.° Cercheremo l'equazione de' momenti rapporto all'asse ab (Tav. XX. fig. 4) della ruota e della macina, la quale resulta dal momento della forza P che essendo il raggio medio della ruota $0{,}^m74$ si ha

$$\frac{662,60}{6,97} f. 0,74 = 70,30;$$

dal momento della resistenza Q, il quale può dirsi $^2/_3$0,85. Q perchè il diametro della macina è $1^m,70$ e ai due terzi del raggio accade la macinazione; dal momento dell' attrito dell' asse contro il ceppo che è

$$\frac{662,6}{6,97}, 0,17. 0,02 = 0,32$$

ponendo $f = 0,17$ e il raggio dell' asse $= 0,02$; dal momento dell' attrito del pernio dell' albero che appartiene al peso della macina e del suo corredo $= 1941$ ed alla componente verticale della potenza P la quale possiamo trascurare, e perciò dato al pernio il raggio 0,0135 resulta $^2/_3$. 0,0135. 0,24. 1911 = 3,72 ponendo per coefficente d' attrito 0,24. Onde l' equazione di stato prossimo al moto è

$$70,30 = {}^2/_3 .\ 0,85.\ Q + 0,32 + 3,72$$

e da questa si ha $Q = 116^k 92$ per la resistenza opposta dal grano.

2.° Poichè la macina fa 90 giri in un minuto avremo per la velocità di essa nel punto d' applicazione della resistenza

$$\frac{90.\ 2\pi.\ {}^2/_3 .\ 0,85}{60} = 5^m,32$$

Onde il lavoro utile sarà

$$116,92{:}\ 532 = 622^{km},$$

e il lavoro perduto per gli attriti

$$662 - 622 = 40^{km},$$

e circa il sedicesimo del lavoro utile.

3.° Questo mulino macina $480.^k$ di grano l' ora e perciò $0^k,133$ in $1''$, e giacchè $622.^{km}$ di lavoro utile corrispondano a $0^k,133$ di grano macinato e perciò $75.^k$ di grano macinato corrisponderanno ad un lavoro valutato sulla macina di 350752^{km}. Se avessimo voluto valutare il lavoro sulla ruota idraulica si sarebbe dovuto mettere nel calcolo in luogo di 622 il 662, e si sarebbe ottenuto 367669. Quindi comprendesi come anche ad un numero maggiore di kilogrammetri possa un' ettolitro di grano macinato corrispondere quando si usino mulini più complicati o si voglia la macinazione più esatta (*Int. pag.* 184).

III. Per terzo esempio proponghiamoci di calcolare l' effetto utile di un mulino da olio d' uliva, mosso ancora questo da una ruota idraulica orizzontale. Cercheremo l'equazione rapporto all' asse verticale *ab* (Tav. XIX. fig, 8) che porta la ruota la quale si avrà eguagliando il momento della potenza motrice, al momento dell' attrito del pernio, al momento dell' asse contro la pila, e al momento della resistenza utile. Sia il diametro medio della ruota idraulica $D = 1^m,50$, e sia la potenza P avremo per il primo momento P. $0^m,75$. Per il secondo si abbia il peso della ruota motrice e del suo albero in 570^k, il raggio del pernio $0^m,0215$, il coefficente d' attrito 0,24 otterremo

$$570.\ 0,24.\ {}^2/_3 .\ 0,0215 = 1,961$$

Per il terzo momento facendo $f{=}0,17$, e il raggio dell' asse $= 0,1$ abbiamo P. 0,17. 0,1. L' ultimo momento si troverà rappresentando con x lo sforzo contro l' occhio *e* della macina, e moltiplicando questo per la distanza del piano medio della macina e dall' asse della ruota che io suppongo $= 0^m,13$. Quindi ponendo il diametro dell' occhio della macina $= 0^m,05$, e il coefficiente d' attrito $f = 0,17$, sarà x. 0,17. $0^m,025$, il momento dell' attrito nell' occhio della macina, ma questo con più il momento della resistenza utile Q deve eguagliare il momento dello sforzo x, ed essendo il raggio della macina $= 0,8$ avremo

$$x.\ 0^m,025 = x.\ 0,17.\ 0^m,025 + Q.\ 0,8$$

cioè $x = 38,5.\ Q$. Quindi il cercato

momento sarà Q. 58,5. 0,15. Per conseguenza avremo l'equazione cercata P.0,75=1,961+P.0,17.01+Q.58.5.0,15 Ora l'esperienza ha fatto riconoscere che la resistenza Q per l'ulive è l'undicesima parte del peso della macina, e sostituito questo nell'equazione si avrà il valore della potenza P. Conosciuta la velocità che potrà prendere la ruota si dedurrà la velocità delle macine, e per conseguenza si avrà il lavoro della potenza e della resistenza ed il loro rapporto.

324. *Esempi di calcolo per dedurre il lavoro utile dei pestoni e dei magli*: — 1. Le macchine dei pestoni (*bocard*) si compongono di una ruota verticale AB (Tav. XX. fig. 5) che imprime moto di rotazione ad un'albero orizzontale M il quale per mezzo di chiavelli solleva in ciascun giro un certo numero di pestoni che ricadendo tritano il minerale. Si abbiano cinque pestoni; quattro dei quali stiano continuamente sospesi. Ciascuno si solleva verticalmente di $0^m,32$ è alto $2^m,27$ ed ha per lato della sua sezione quadrata $0^m,135$; è terminato da un parallelepipedo di ferro fuso alto $0^m,108$ e con lato nella sua sezione quadrata di $0,^m135$. Il dente come anche il chiavello sono di ferro. Il peso totale del pestone è di 86^k: il peso della ruota e dell'albero 1552^k. Il diametro degli assi della ruota è $0^m,06$; i chiavelli hanno $0^m,162$ in lunghezza; il diametro dell'albero è di $0^m,54$, quello della ruota è $2^m,52$. Stabiliamo l'equazione rapporto all'asse di quest'albero. I momenti delle forze che vi agiscono sono 1.° il momento della forza motrice P. 1,16.

2.° Il momento del peso dei pestoni: si chiami s il numero de' gradi che corrisponde all'arco per il quale il chiavello conduce il pestone ed R il raggio, il braccio medio di leva si avrà per il ragionamento usato nella manovella $= R \frac{sen\ S}{S}$

Ma R *sen* S è il sollevamento 0,32 del pestone ed R $= 0,27 + 0,162 = 0,43$ e perciò s è di 48° ed $= 0^m,84$. Quindi trovasi il braccio medio di leva $= 0^m,38$. Al peso $86.^k$ del pestone deve aggiungersi l'attrito contro la staffa che ritiene il pestone, e per calcolar questo convien determinare la pressione sovra di essa. Il pestone tende a girare attorno al centro di gravità e fa una pressione contro la staffa che sta al peso del pestone come la lunghezza del dente sta all'intervallo che rimane fra le due staffe. Onde nel caso nostro sarà questa pressione

$$\frac{86.\ 0,162}{1,62} = 8,6;$$

e per le due staffe l'attrito sarà $2.\ 8,6.\ 0,28 = 4^k,82$. Il peso da sollevarsi è dunque $86 + 4,82 = 90,82$, e il momento $90,82.\ 0,38 = 34,51$. Siccome si han sempre quattro piloni sospesi il momento totale sarà

$$4.\ 34,51 = 138,04$$

3.° Il momento dell'attrito tra il chiavello ed il dente sarà

$$90,82.\ 0,1.\ 0,16 = 1,45$$

essendo 0,16 il braccio di leva medio di questa resistenza che agisce orizzontalmente e per i quattro pestoni $4.\ 1,45 = 5,8$.

4.° Il momento della forza perduta per l'urto. La forza perduta è (206)

$$\frac{m'm}{m+m'} V^2 \text{ ed } m' = \frac{86}{9,8} = 8,76.$$

Il momento d'inerzia dell'albero è (182. II.) $\frac{Pr^2}{2g} = m$

e postovi $P = 882$, $r = 0,27$; si ha

$$m = \frac{882.\ (0,27)^2}{19,62} = 3,14,$$

e la celerità angolare è

$$\omega = \frac{25.\ 2\,\pi}{60} = 2{,}62$$

onde la forza viva dell' albero sarà $m\omega^2 = 3{,}14.\ (2{,}62)^2 = 21{,}38$. Quella perduta per l'urto è

$$\frac{8{,}76.\ 21{,}38}{3{,}14+8{,}76} = 15{,}73$$

che corrisponde ad un lavoro $= 7{,}86$; la celerità dell' estremità del chiavello è

$$\frac{25.\ 2\pi.\ 0{,}43}{60} = 1'',12$$

per cui la forza perduta nell'urto sarà

$$\frac{7{,}86}{1{,}12} = 7^k{,}01.$$

Ogni volta che l'albero fa un giro ciascun pestone è sollevato tre volte, e perciò in un secondo si avranno per ciascun pestone urti

$\frac{25}{60}.\ 3 = 1{,}25$, e $5.\ 7{,}01.\ 1{,}25 = 43{,}15$

sarà la forza perduta per gli urti in 1'' per i 5 pestoni. Il braccio di leva di questa forza è $0^m{,}43$ e per conseguenza il suo momento

$$43{,}15.\ 0{,}43 = 18{,}55$$

5.° Il momento dell'attrito degli assi dell'albero sarà

$$0{,}155.\ 0{,}05\ \sqrt{P^2 + (1758)^2} = 8^k$$

Quindi l'equazione d'equilibrio è

$P.1{,}16 = 138{,}04 + 5{,}80 + 18{,}55 + 8 = 170{,}39$

da dove rilevasi $P = 146^k$. La celerità della ruota

$$V = \frac{25.\ \pi.\ 2{,}52}{60} = 3{,}05$$

e il lavoro motore $146.\ 3{,}05 = 442^{km}$.

La celerità media del chiavello

$$\frac{25.\ 2\pi.\ 0{,}35}{60} = 0^m{,}91.$$

e dei quattro pestoni che sono sempre sospesi il lavoro utile

$$86.\ 4.\ 0{,}91 = 313^{km}.$$

il lavoro perduto negli attriti e per l'urto $442 - 313 = 129^{km}$, o i due quinti del lavoro utile.

II. Nei magli si ha una disposizione eguale a quella de' *bocard* in quanto all'albero ma differente per il pezzo mosso, poichè in questi il manico del maglio smosso dal chiavello gira attorno all'asse (Tav. XIII. fig. 3). Nelle officine il moto dello strumento è più o meno celere a seconda del bisogno che l'operante trova nella lavorazione, perciò nel seguente calcolo si ritiene che un martinetto o piccolo maglio vada colla massima velocità che acquista quando è data alla ruota idraulica tutta l' acqua. Prendiamo a determinare l' equazione nello stato prossimo al moto relativamente all'asse del maglio.

1.° Porti l'albero 6 chiavelli, e il raggio medio di leva col quale agisce il peso di 40^k della testa del maglio sia $1^m{,}75$ sarà il momento di questa forza $40.\ 1{,}75 = 70$.

2.° Il peso del manico 100^k considerato come una forza che agisce al suo centro di gravità, e la distanza di questo centro dall' asse di rotazione essendo 0,64, il braccio di leva medio viene $0^m{,}63$, e il momento della forza $100.\ 0{,}63 = 63$.

3.° La forza che agisce all' estremità del manico che io chiamo q ha per braccio di leva 0,76, e per momento $q.\ 0{,}76$.

4.° L' attrito dell' asse è prodotto dalla pressione $40 + 100 + q$, il suo coefficiente può farsi $f = 0{,}155$, il raggio dell' asse è $0{,}^m02$. Il momento di questa resistenza si esprime con $(40 + 100 + q).\ 0{,}02.\ 0{,}155$. Onde l' equazione cercata è

$70 + 63 + (40+100+q).\ 0{,}031 = q.\ 0{,}76$

dalla quale deducesi $q = 176$.

Determiniamo adesso l' equazione dello stato prossimo al moto per l'asse della ruota motrice, e del suo albero. Qui si ha

1.° La forza motrice il cui momento è $P.\ 0{,}93$ essendo questo numero il raggio della ruota.

2.° la forza q il cui momento è 176. 0,37 = 65,12 essendo 0,37 il raggio medio di leva

3.° L'attrito del chiavello che fatto $f = 0,28$, dà per momento

176. 0,28. 0,05 = 2,46

4.° Il momento della forza perduta per l'urto. La forza viva perduta per l'urto $\frac{mm'}{m+m'}\omega^2$

ove per m, m' devono mettersi i momenti d'inerzia dell'albero, e del martinetto. Il momento d'inerzia di questo preso rapporto all'asse di rotazione, è (123) rappresentate co' numeri le respettive dimensioni della macchina

$$\frac{40}{9,8}(1,78)^2 + \frac{100}{9,8}\left\{(0,64)^2 + \frac{(0,16)^2+(2,80)^2}{12}\right\} = m' = 23,70$$

L'albero componesi di un cilindro di legno che pesa 586^k, e di un'anello di ferro fuso che porta i chiavelli di peso 200^k. Il momento d'inerzia del cilindro è (182. II)

$$\frac{586.\ (0,22)^2}{2.\quad 9,8.} = 1,44$$

quello dell'anello (182. III)

$$\frac{200}{9,8}\left\{(0,27)^2 + \frac{(0,10)^2}{4}\right\} = 1$$

dunque il momento d'inerzia totale dell'albero $m = 1,44 + 1 = 2,44$. La celerità angolare dell'albero perchè fa 36 giri in un minuto è

$$\omega = \frac{36.\ 2\pi}{60} = 3^m,76$$

e la forza viva perduta per l'urto

$$\frac{23,70.\ 2,44}{2,44 + 23,70}(3,76)^2 = 31,70$$

la quale corrisponde ad un lavoro perduto 15^{km},85. Si hanno sei urti in un giro dell'albero, e 0,6 di giro in un secondo, cioè in questo tempo urti 0,6. 6 = 3,6. La quantità di lavoro perduto nell'urto è dunque 3,6. 15,85 = 57. 06. Questa quantità di lavoro è consumato all'estremità di una leva la di cui velocità è

$$\frac{36.\ 2\pi.\ 0,37}{60} = 1,39$$

onde lo sforzo perduto per l'urto è dato da $\frac{57,06}{1,39} = 41^k,05$

e il momento della forza

41,05. 0,37 = 15,19

5.° L'attrito degli assi della ruota è $0,3.\ 0,155.\ \sqrt{\left[(P+49,28)^2) + (1156 + 41,05 + 176)^2\right]} = 6^k,32$ essendo calcolato P = 70 senza far conto di quest' attrito. Dunque la seconda equazione cercata sarà

$$P.\ 0,93 = q.0,37 + 2,46 + 15,19 + 6,32 = 89,09$$

da dove si rileva P = 95^k.

Per ottenere il maggiore effetto da un martinetto conviene avere due lavoranti ed un' aiuto, e far battere il più gran numero di colpi in un dato tempo, compatibilmente al lavoro che si vuole eseguire perchè il lavorante deve ogni volta cangiare la posizione del pezzo. Soglion ritenere i lavoranti che un martinetto la cui testa pesi da 40 a 50^k dovrebbe battere tra 200 e 250 colpi per minuto; uno di 100^k dovrebbe battere 150 a 200 colpi, ed un maglio di 200^k dovrebbe battere tra 60, e 90 colpi nel medesimo tempo. La testa dei rammentati martinetti si eleva ordinariamente tra 9 e 10 pollici, e quella del maglio di 200^k si eleva due piedi parigini circa.

325. *Macchine e strumenti che si usano per l'escavazione dei pozzi artesiani.* — Si fanno trafori molto profondi nella terra i quali rivestiti da un sistema di tubi danno alle sotterranee sorgenti di acqua accesso fino alla superficie. Con tal mezzo si ottengono più facilmente sorgenti anche ove ne è scarsità, e di acqua buona che talvolta è lanciata al-

la superficie terrestre con forza da inalzarsi a guisa di fonte. Le operazioni che si han da eseguire sono 1.° tritare le materie solide che esistono nel fondo del traforo sia con urti per mezzo di picconi, o con pressioni per mezzo di trivelle o ferri taglienti, 2.° impedire le smotte nella superficie convessa del il traforo con il tabulamento, 3.° levare le materie tritate con adattati strumenti. Tutte queste operazioni facilissime quando è piccola la profondità divengono ingombre di infinite cautele quando il traforo comincia ad esser profondo oltre cento metri: le sabbie fluide tendono a riserrare il foro, le sporgenti parti dei massi impediscono la discesa dei tubi, la verga metallica che porta lo strumento quando è molto lunga si incurva negli urti e perquotendo le pareti del traforo le guasta. Questo ultimo effetto ha portato i costruttori a studiare una disposizione particolare della verga allorquando lo strumento, che cogli urti deve produrre l'affondamento, non è sostenuto da una fune. L'esperienza mostra che le località ove si può impiegare la fune sono assai rare, e che la verga rigida offre maggiori risorse per ovviare alle difficoltà impreviste. Ma la verga rigida che fino ad un certo limite di lunghezza è utile perchè aumentando la massa dello strumento accresce l'effetto nell'urto, oltre quel limite non fa che render dannosi contro le pareti gli urti che provengono dalle sue flessioni e oscillazioni, ed aumenta la rigidità e friabilità del ferro istesso. Queste difficoltà, secondo quello che ne ha detto l'ingegnere F. Le Play, si sono presentate gravi nell'affondamento eseguito a Neusalzwerk ove gli strati successivamente si alternavano durissimi, ed estremamente teneri. Allorchè lo strumento alla profondità di 200 metri batteva sugli strati durissimi, le curvature e le oscillazioni laterali delle verghe corrodevano talmente gli strati teneri già traversati che il diametro del foro fatto primitivamente di 0m,10 fu trovato aumentato fino a 0m,30 e più, e la rottura della verga fu frequentissima. Colla seguente costruzione l'ingegner Prussiano Oeynhausen ha ottenuto che accaduto l'urto dello strumento, la massima parte della verga cessasse tutt'ad un tratto di essere in connessione con quello, e restasse sospesa nel foro in posizione verticale. Consiste essa nel comporre di due parti distinte A, B (Tav. XX fig. 6) la verga: la superiore A si allunga a misura che il foro progredisce e si unisce a vite, o ad incastro fisso alla testa *a* della parte inferiore: questa è traversata da un'apertura rettangolare *c* nella quale scorre liberamente nella direzione verticale *deb* che porta lo strumento. Quando si solleva la verga per cagione della capocchia *d* che è al pezzo *eb* viene anche questo ad inalzarsi, e quando si lascia cadere la verga vanno uniti i due pezzi finchè lo strumento non batte nel fondo; allora seguita a scorrere la verga A con la testa *a* ancora per poco tratto e riman sospesa, mentre batte solamente *deb*, percorrendo la capocchia una porzione della fessura longitudinale. Siccome abbiam detto che tal fessura è rettangolare, come è anche l'asse *de* non è impedito che al girare della verga si imprima moto rotatorio anche allo strumento. Per far comprendere il vantaggio di questa disposizione rammenterò quello che il Play riferisce sulla costruzione del rammenta-

to traforo ivi fu usata dopochè giunti alla profondità di 263.m non potevano continuare l'operazione, e per mezzo di quella potè esser proseguito fino a 405.m senza alcun' inconveniente. Sulle prime fu fatta la verga superiore di 93.m e di 170.m quella inferiore, e la grossezza di questa fu lasciata di 0m,052 come era per avanti, ma fu ridotta quella della superiore a 0m,026. Quindi fu conosciuto che la verga inferiore poteva farsi più piccola senza diminuire il lavoro, e la profondità essendo giunta a 310m era stata realmente ridotta a soli 96m, e a soli 37m verso il fine dell'operazione. Onde mentre nel sistema di una verga del tutto fissa il peso totale sarebbe stato 10144k, con la nuova costruzione era di soli 3405k.

Si manovra la verga sovradescritta per mezzo della seguente combinazione di leve. Una leva A B (Tav. XX. fig. 7) lunga tra 8 a 10m sostenuta dall'asse C può girare in un piano verticale porta infilata e fissa ad un'estremità D la verga, e verso l'altra estremità sostiene un barile pieno d'acqua che a guisa di romano serve di adattato contrappeso per equilibrare la parte superiore P della verga. Un'argano M pone in moto i chiavelli N N' N" e con essi la seconda leva A' B' acquista moto alternativo la quale sostenendo all'estremità la verga la fa montare e alternativamente la lascia cadere. La verga nel suo moto porta seco la leva A B, e nel mentre lo strumento perforatore urta il fondo del pozzo il contrappeso della leva A B sostiene la parte superiore P della verga, come anche toglie lo sforzo che farebbe sull'argano questa parte della verga nell'atto del suo sollevamento. Si diminuisce ancora il peso della verga che ha da rimanér sospesa alla leva A B col farla di legno con armature di ferro, ovvero col farle di ferro vuote perchè nell'uno e nell'altro caso aumentando le loro dimensioni si rende più difficile la flessione, si dà con egual peso maggior resistenza, e si ha una maggior diminuzione di peso nel caso che peschino nell'acqua come ordinariamente suole accadere.

Per slargare il foro e per lavorare anche sotto ai tubi si usano dei trapani a molla A, i quali (Tav. XX. fig. 8) dilatano le lor parti taglienti per effetto di due molle contrapposte: arrivato il trapano alla base dei tubi non avendo più ritenute le sue lame taglienti o appuntate si apre per la forza delle molle: allora vien battuto e ad ogni colpo vien girata la leva direttrice della verga, e nel foro slargato discende la colonna dei tubi finchè la pressione orizzontale non è troppo forte. Avanti di discendere una colonna di tubi fa duopo assicurarsi che il foro è perfettamente verticale e cilindrico, e che non son restate nelle pareti delle rocce sporgenti, per il che si fa uso di una specie di rocca B, o cilindro rigonfiato nel mezzo, lungo due metri, composto di verghe di ferro ritenute all' estremità equidistanti e attorno all'asse principale da forti fasciature di ferro. Quando nell'operare si rompono gli strumenti, o la verga per trarli fuori dal pozzo si usa il caracollo C, che è un ferro a spirale che nell'esser girato raccoglie nelle spire lo strumento rotto, ovvero si usa la campana cuneiforme, o ad uncini; la prima delle quali raccolto nella sua bocca che è slargata a guisa d'imbuto lo strumento lo fa passare nel suo collo ove è tenuto stretto; l'altra D si slarga cedendo due molle per ricevere lo strumento e quando vi è

ricevuto alcune rotelle ellittiche dentate tanto più lo stringono quanto esso fa più forza per escire. Si levano le materie, con trivelle fatte a cucchiaje, o anche terminate in cilindro cavo F: questo ha un apertura che si chiude con valvula a globo metallico pressato da una molla, e si apre quando la trivella girata si affonda nella terra, o quando viene urtata contro il fondo del pozzo. Chi bramasse conoscere maggiori particolarità sulla costruzione di tali strumenti potrà consultare *Annales des Mines T. XIV. pag.* 315. *T. XV. pag.* 447. *T. XIX. pag.* 593.

326. ***Dei veri vantaggi, e della più vantaggiosa disposizione delle macchine.*** — Abbiamo più volte avvertito come falsa è l'idea, che alcuni imperiti nella scienza meccanica si fanno, di potere per mezzo di una macchina aumentare l'effetto della potenza. Tanto nelle macchine in equilibrio quanto in quelle che han moto uniforme si perde in potenza quanto si acquista in velocità e viceversa colla differenza che nell'equilibrio le velocità sono virtuali, e nel moto sono attuali. Onde l'effetto o il lavoro della potenza, il quale resulta dalla potenza stessa moltiplicata per la velocità, non si accresce per fatto della macchina, poichè in quel prodotto quanto cresce un fattore di altrettanto scema l'altro. E ciò asseriamo non tenendo conto dell'attrito o resistenze passive che si hanno nell'uso delle macchine, perchè se vuolsi far conto anche di queste scema il lavoro della potenza di quanto è il lavoro delle resistenze passive. Sebbene adunque una macchina non riproduca mai tutto il lavoro della potenza per le resistenze passive, e non sia possibile per qualunque disposizione si dia alla macchina far crescere il lavoro della potenza; contuttociò possono ottenersi significantissimi vantaggi reali dalle macchine, e si può determinare la più vantaggiosa disposizione delle medesime.

Sono reali vantaggi nell'uso delle macchine

I. Una azione non interrotta e continuata da cui ne viene la più grande economia di forza e di tempo. Per non aversi interruzioni si ottiene il più gran lavoro possibile in un tempo determinato. Devesi ordinariamente a questa cagione il gran prodotto che si ha dalle macchine, ed anche da quelle che hanno moto assai lento, e che a prima vista ripromettono piccolo lavoro: un' esempio può aversene nelle macchine da filare. Perchè poi si ha continuata l'azione della macchina potrà comunicarsi in un tempo breve la forza motrice che ha da servire in lunghissimo tempo. E quando si impiegano pochi secondi a caricare un' orologio che seguita poi ad andare per più giorni, non si è fatta massima economia di tempo?

II. Mentre è dato di avere aumento di potenza diminuendo la velocità, può con piccola potenza porsi in movimento una grandissima resistenza. Il medesimo resultato otterrebbesi senza macchina quando si potesse dividere in parti la resistenza, e agire sovra una parte alla volta, ma la macchina oltre a non dare azione interrotta o a riprese permette di agire in un sol tempo sù tutta la resistenza non ridotta in parti. Di qui la possibilità per gli architetti di fare grandiosissime operazioni di forza che sorprendono l'umana imaginazione.

III. Viceversa se più ne tornasse conto, può colla macchina scemando

lo sforzo sulla resistenza accrescersi la velocità, e ciò per alcune operazioni è interessantissimo. Col denaro è più facile comprare la potenza che il tempo, e se le macchine facendo agire velocemente risparmiano il tempo come vedesi accadere nell'uso dei battelli a vapore e delle locomotive, può dirsi che esse moltiplicano la vita dell'uomo.

IV. A misura che si introduce l'uso delle macchine si rendono attive delle potenze che in natura altrimenti sarebbero perdute, si usano quelle potenze che non hanno alcun prezzo, e lo hanno piccolissimo, e si risparmia la forza muscolare dell'uomo. Dirò anche una volta, che avrà una nazione acquistato il massimo grado di civiltà quando gli uomini tutti si impieghino in operazioni intellettuali, e quando l'esercizio della lor forza si faccia soltanto dove maggiore richiedesi l'applicazione del loro intelletto.

V. È solo per mezzo delle macchine che possono assoggettarsi a leggi determinate di azione le grandissime potenze della natura, come il vento, l'acqua, e il fuoco o il vapore. Senza le macchine non rimane in balìa dell'uomo che l'uso delle potenze le più moderate. Che se si ingigantiscono i nostri concetti allorchè disponiamo di potenze immense, possiam dire che col perfezionamento delle macchine si ha anche lo sviluppo della nostra mente.

VI. Non vi è operazione meccanica sebbene complicata che non possa risolversi in determinate leggi di movimenti, di pressioni, o di urti. E poichè quella operazione non viene eseguita esattamente che quando continuamente han luogo le medesime leggi, quindi un meccanismo è più conveniente a produr opera perfetta che il braccio dell'uomo, il quale guidato da una mente immaginativa ben di rado ritorna precisamente per i medesimi periodi d'azione. Quindi comprendesi come ad una macchina possano affidarsi le lavorazioni più complicate, ed ottenersi con esattezza eseguite.

VII. Due grandi differenze si hanno tra le macchine in equilibrio, e quelle in movimento. La prima cade sulla potenza perchè nell'equilibrio con la macchina una piccola potenza potendo tenere equilibrata grandissima resistenza apparisce accresciuto l'effetto della potenza. Facile è riconoscere in una macchina particolare che realmente si è riunito il suo effetto a quello del punto fisso, e perciò ne apparisce un'aumento; così nella leva di primo genere quando piccola potenza tiene equilibrata una grandissima resistenza, trovasi che la resultante delle due forze passa per il punto fisso: esso colla sua reazione le distrugge amendue. Nelle macchine in movimento l'effetto della potenza vedesi sempre diminuito, essendo il lavoro della potenza eguale a quello della resistenza utile accresciuto del lavoro prodotto dalle resistenze nocive. Quindi ne viene nelle macchine in equilibrio il reale vantaggio di fare colla potenza cooperare la reazione dei punti fissi ai quali si appoggiano le macchine.

VIII. La seconda delle notate differenze cade sugli attriti: nelle macchine in equilibrio, questi giovano alla potenza perchè si ha equilibrio anche quando il momento della potenza unito al momento degli attriti è eguale al momento della resistenza: nelle macchine in moto il lavoro degli attriti come si è detto scema il lavoro utile. Dunque per le macchine equi-

librate si possono far cooperare anche gli attriti a risparmio della potenza.

A conseguir poi la disposizione più vantaggiosa della macchina, molte osservazioni potrebbero qui trattenerci, ma io intendo di accennare le principali.

I. Il luogo ove la macchina vien collocata ha da esser quello nel quale con minore spesa possibile possono aversi le materie gregge, e possono esitarsi più agevolmente al mercato i prodotti. Ha da presentare il massimo risparmio di spesa per il canone del locale, e per l'opera dei lavoranti. Ha da offrire comodità per la potenza colla quale si pensa di mandare la macchina. Un calcolo su tutte queste ed altre consimili spese porta a decidere sulla località che si ha da preferire per una fabbrica.

II. La costruzione delle macchine non deve avere parti di lusso, ma deve esser ben solida. Deve essere in quelle dimensioni che posson meglio permettere la lavorazione, e la sua convenienza in rapporto allo smercio che si avrà del genere lavorato ed in rapporto alla potenza che è dato di applicare alla macchina. Il capitale di prima costruzione della macchina, e le spese di mantenimento o il retratto del genere lavorato determineranno la più vantaggiosa costruzione della macchina.

III. Il modo di applicar la potenza interessa che sia bene studiato acciocchè tutta si eserciti nell' opera, e non se ne consumi in altri effetti non utili. Trattandosi di fare agire la potenza sovra una leva si direbbe che deve dirigersi nel piano di movimento della leva perchè altrimenti si ha un consumo di forza che tende a flettere la leva; e che deve essere diretto perpendicolarmente al braccio di leva onde non si produca una nociva pressione sul suo pernio.

IV. Nelle macchine in movimento giova ridurre al minimo possibile gli attriti, e le altre resistenze, ed il contrario si farà in quelle destinate a sostenere delle spinte, o dei pesi. Quindi nel primo caso si procurerà di rendere il più semplice possibile la macchina, di non farla eccessivamente pesante, di usarvi l' unto continuamente rinnuovato su' perni, e di adottarvi tutte le particolari costruzioni che diminuiscono gli attriti.

V. Si eviteranno gli urti, i quali guastano la macchina, alterano la regolarità del movimento, e danno un' enorme perdita di forza motrice.

VI. La velocità da assegnarsi alla macchina dovrà essere non solo quella che conviene alla buona lavorazione, ma se questa permette diversi gradi di velocità, quella ancora sotto la quale può aversi dal motore il massimo effetto. Tutti i motori sogliono avere un certo rapporto tra la loro forza e la loro velocità, così noi abbiamo mostrato essere nei motori animati, e particolarmente per l' uomo si è anche riportata (272) una ipotesi secondo la quale si avrebbe tal rapporto espresso con la formula

$$P = p\left(1 - \frac{V}{v}\right)$$

Per far comprendere questo calcolo supponiamo che voglia disporsi un'asse nella ruota da muoversi con tal velocità che ne resulti massimo l'effetto della potenza P, a tale oggetto vogliasi determinare il rapporto del raggio R′ del cilindro a quello R della ruota. Presa la derivata della quantità PV dopo avere espresso P per V e nella supposizione di V variabile, si cercherà il valore di V e per conse-

guenza di P, e si sostituirà esso nella equazione PR = QR′, e così dato il peso Q che deve sollevarsi troveremo il rapporto tra i due raggi della ruota e del cilindro. Facciamone nella riferita ipotesi l' applicazione al caso che il motore sia un'uomo, avremo

$$PV = pV - p\frac{V^2}{v}$$

onde la derivata di questa quantità eguagliata a zero dà $V = \frac{1}{2}v$, e per conseguenza avremo

$$P = \frac{1}{2}p, \quad e \quad \frac{1}{2}\frac{p}{Q} = \frac{R'}{R}$$

Sia $p = 21^k$, e Q = 3000 avremo

$$\frac{21}{6000} = \frac{R'}{R} \text{ cioè } R = 285,7R'$$

Che se non un solo uomo ma più e un numero n se ne volevano usare nella operazione, si sarebbe sostituito il valore di P nell' equazione dell' equilibrio della macchina

$$nPR = QR',$$

e si sarebbe ottenuto

$$R = \frac{285,7}{n}R'$$

Ora posto che il raggio della ruota non dovesse essere che 8 volte, quello del cilindro si avrà

$$n = \frac{285,7}{8} = 35,7$$

cioè si dovrebbero usare 36 uomini.

FINE

INDICE ANALITICO DELLE MATERIE

CAPITOLO I.
Della resistenza assoluta dei Solidi.

§. 1. *Bisogno di conoscere i materiali* . . . . pag. 3
« 2. *Struttura particolare di alcuni solidi* . . . . « ivi
« 3. *Forze dalle quali proviene la resistenza*. . . . . « 4
« 4. *Leggi fondamentali dell'elasticità* . . . . « 5
« 5. *Leggi della mollezza e duttilità dei corpi* . . . . « 8
« 6. *Diversi generi della resistenza che può aversi dai solidi* . « 10

Resistenza alla distensione e alla compressione.

« 7. *Resistenza elastica* . . . . « ivi
« 8. *Determinazione del coefficente d'elasticità per mezzo della resistenza elastica all'allungamento*. . . . . « 11
« 9. *Resultati d'esperienze* . . . . « 13
Tavola dei coefficenti d'elasticità . . . . « ivi
Osservazione . . . . « 14
Tavola de' coefficenti di elasticità a differenti temperature . « 15
« 10. *Variazioni di figura prodotte dalla compressione, e dalla distensione* . . . . « ivi
Tavola delle gravità specifiche di alcuni metalli avanti e dopo l'allungamento . . . . « 17
« 11. *Resistenza alla rottura per distensione* . . . . « ivi
« 12. *Resultati d'esperienza sulla resistenza alla distensione* . « 18
Tavola della resistenza alla rottura per stiramento . . . « ivi
« 13. *Osservazioni* . . . . « 21
Tavola dell'effetto della temperatura nella resistenza de' metalli . . . . « ivi
« 14. *Resistenza delle corde*. . . . . « ivi
« 15. *Resistenza alla rottura per compressione* . . . . « 23
« 16. *Resultati d'esperienze sulla resistenza alla rottura per compressione* . . . . « ivi
Tavola della resistenza alla rottura per compressione . . « 24
« 17. *Osservazioni* . . . . « 26
« 18. *Resistenza dei massicci di pietra* . . . . « ivi
« 19. *Resistenza permanente* . . . . « ivi
« 20. *Limite dell'elasticità naturale, e allungamento maximum dei metalli* . . . . « 27
Tavola del limite d'elasticità, e dell'allungamento massimo dei metalli . . . . « 28

§. 21. *Modo di determinare la resistenza permanente* . . . . pag. 29
« 22. *Regole e formule per la pratica sulla resistenza allo stiramento ed alla compressione* . . . . « 31
« 23. *Applicazioni* . . . . « 32
« 24. *Osservazioni sopra la forma di alcuni oggetti naturali, e sulle forme da preferirsi in alcune parti degli edifizj* . . « 33
« 25. *Gli ordini architettonici non sono modellati sulle sole regole della resistenza.* . . . . « ivi
« 26. *Le regole della resistenza devono rispettarsi nell'uso degli ordini architettonici.* . . . . « 35

CAPITOLO II.

Della resistenza alla flessione, alla torsione, all'incurvamento per compressione, e agli urti.

Resistenza alla flessione.

« 27. *Principj da' quali si desume la resistenza alla flessione.* . « 37
« 28. *Formule ed esperienze sulla resistenza alla flessione ne solidi incastrati ad un' estremità ed aggravati da un peso che agisce perpendicolarmente alla loro lunghezza* . . . « 38
« 29. *Caso nel quale siano più i pesi aggravanti, o si consideri il peso del solido* . . . . « 39
« 30. *Formule ed esperienze sulla resistenza alla rottura ne solidi incastrati ad un' estremità ed aggravati da uno o più pesi che agiscono perpendicolarmente alla loro lunghezza* « 40
« 31. *Resultati d' esperienze* . . . . « 41
Tavola pel coefficente della resistenza alla rottura per flessione . . . . « 42
« 32. *Osservazioni* . . . . « 43
« 33. *Formule per la pratica* . . . . « ivi
« 34. *Resistenza de' solidi sorretti alle due estremità* . . . . . « ivi
« 35. *Resultati d' esperienze.* . . . . « 45
« 36. *Formule per la pratica* . . . . « ivi
« 37. *Solido d' egual resistenza* . . . . « 46

Resistenza all' incurvamento per compressione.

« 38. *Resistenza de' solidi caricati per di sopra o verticalmente.* « ivi
Tavola del coefficente h *della rottura per incurvamento prodotto da compressione* . . . . « 47
« 39. *Stabilità delle fabbriche dedotta da quella de' modelli* . . « ivi
« 40. *Effetto de' punti di rottura e degli appoggi sulla resistenza de' solidi qualunque sia la direzione della forza rapporto alla loro lunghezza* . . . . « 49
« 41. *Effetto degli incavi e delle nervature o rinforzi per la resistenza de' solidi* . . . . « 50
« 42. *Forma di alcuni oggetti naturali, e artificiali dipendente da questi principj* . . . . « ivi
« 43. *Applicazioni e regole di pratica* . . . . « 53

Resistenza alla torsione.

« 44. *Principj da' quali si desume la resistenza de' solidi incastrati ad un' estremo ed all' altro sottoposti alla torsione,* « 57

§. 45. *Formule ed esperienze sulla resistenza alla torsione* . . pag. 54
Tavola dei coefficenti per la resistenza alla torsione. . . « 55
« 46. *Osservazioni* . . . . « ivi
« 47. *Formule per la pratica* . . . . « ivi
« 48. *Applicazioni* . . . . « ivi
« 49. *Diversi metodi con i quali si può determinare il coefficente d' elasticità* . . . . « 56
« 50. *Legame fra la costruzione interna de' corpi, e il coefficente d' elasticità e di resistenza* . . . . « 57

Resistenza agli urti.

« 51. *Principj dai quali si desumono le leggi della resistenza viva dei prismi* . . . . « 58
« 52. *Formule ed esperienze sulla resistenza viva* . . . . . . « 59
Tavola per la resistenza viva. . . . . « 60
« 53. *Osservazione* . . . . « 61
« 54. *Effetto degli urti sulla resistenza de' solidi* . . . . . . « ivi
« 55. *Interpetrazione geometrica dei resultati e leggi del moto che succede all' urto* . . . . « 62
« 56. *Esempio sulla determinazione del coefficente di resistenza viva elastica per mezzo di esperienze sull' urto* . . . . « 63
« 57. *Esempio sulla determinazione del coefficente di resistenza viva alla rottura per mezzo di esperienze sull' urto* . . . « ivi

CAPITOLO III.

Della resistenza de' solidi al distaccamento.

« 58. *Diverse specie d' adesione delle superfici, e principalmente nei corpi cristallizzati* . . . . « 64
« 59. *Effetto della pressione atmosferica sull' adesione* . . . . « 65
« 60. *Adesione per effetto di una sostanza liquida frapposta*. . « 66
« 61. *Dei cementi, e loro resistenza esterna* . . . . « 67
« 62. *Delle saldature e loro resistenze* . . . . « 68
« 63. *Bollitura del ferro, ed altre simili adesioni* . . . . « 71
« 64. *Effetto dell' estensione di superficie, e degli incastri nell' adesione* . . . . « ivi
« 65. *Applicazione all' impiombatura e a simili processi di collegamento* . . . . « 72
« 66. *Applicazione alle congiunzioni usate nella carpenteria* . . « 73
« 67. *Applicazione alle congiunzioni usate nell' arte muratoria* . « 74
« 68. *Adesione che si manifesta nello sfregamento*. . . . . . . « 75

CAPITOLO IV.

Della resistenza allo sfregamento, o attrito e della rigidezza delle funi.

« 69. *Resistenze passive* . . . . « ivi
« 70. *Forze che producono l' attrito e più specie del medesimo* . « 76
« 71. *Leggi generali dell' attrito* . . . . « 77

Attrito di prima specie.

« 72. *Modo di sperimentare sull' attrito di prima specie* . . . . « 80
« 73. *Resultati d' esperienze dopo un certo tempo di riposo sotto la pressione* . . . . « 81
Tavola dell' attrito di prima specie nell' atto di partenza do-

po il riposo . . . . pag. 82
§. 74. *Resultati d'esperienze nei corpi che han concepito il moto* « 83
Tavola dell' attrito di prima specie quando il moto è acquistato . . . . « 84
« 75. *Deduzioni generali dall' esperienze sull' attrito di prima specie* « 86
Tavola sull' effetto de' cementi nell' attrito delle pietre . . « ivi
Attrito di seconda specie.
« 76. *Osservazioni sull' attrito di seconda specie* . . . . . . « 87
« 77. *Modo di sperimentare l' attrito di seconda specie* . . . . « ivi
« 78. *Resultati d' esperienze.* Vedi l'aggiunta nell' errata . . . . « 88
Attrito di terza specie.
« 79. *Modo di determinare l' attrito di terza specie* . . . . . « 89
« 80. *Resultati d' esperienza* . . . . « ivi
Tavola sull' attrito degli assi in moto nelle loro canne . . « 90
« 81. *Osservazioni* . . . . « 91
Applicazioni.
« 82. *Danni e vantaggi che si ottengono per l' attrito, e lavoro del medesimo* . . . . « ivi
« 83. *Diminuzione dell' attrito* . . . . « 92
« 85. *Dei modi d' accrescere l' attrito e dei freni* . . . . « 94
« 86. *Freno di Prony, ed uso del medesimo per misurare il lavoro delle macchine* . . . . « 96
« 87. *Consumo di lavoro per l' attrito degli assi nelle ruote molto pesanti, e risparmio di lavoro nell' uso dei coltelli* . . « 97
Movimento delle vetture.
« 88. *Applicazione all' attrito delle ruote delle vetture* . . . . « 98
« 89. *Far muovere una vettura col girare l' asse di due ruote* . . « 99
« 90. *Resistenza incontrata dalle vetture nelle strade* . . . . . « 100
Tavola della resistenza incontrata dalle vetture . . . . « 101
« 91. *Del deperimento che le vetture arrecano alle strade* . . . « ivi
« 92. *Attrito de' vagoni sulle strade rotaje* . . . . « 103
Della rigidezza delle funi.
« 93. *In qual caso ha luogo la rigidezza delle funi* . . . . . . « 104
« 94. *Modo di sperimentare sulla rigidezza delle funi* . . . . « 105
« 95. *Leggi della rigidezza delle funi* . . . . « 106
« 96. *Resultati d' esperienze* . . . . « 107
Tavola della rigidezza delle corde impeciate . . . . . . « ivi
Tavola della rigidezza nelle corde bianche e in buono stato « 108
Tavola della rigidezza nelle corde bianche ed assai usate . « ivi
« 97. *Regola per l' uso delle precedenti tavole* . . . . « ivi
« 98. *Dei nodi e delle legature* . . . . « ivi
CAPITOLO V.
Della composizione delle forze, dei momenti di rotazione e del centro di gravità.
« 99. *Ridurre a numeri le funzioni circolari usate in meccanica* . « 109
Tavola dei seni e dei coseni . . . . « 110
Composizione e risoluzione delle forze.
« 100. *Composizione e risoluzione di due forze concorrenti, e for-*

mule relative . . . . pag. 111
§. 101. *Composizione e risoluzione di tre forze concorrenti non disposte nel medesimo piano, e formule relative* . . . . « 112
« 102. *Composizione e risoluzione di più forze concorrenti, e formule relative* . . . . « 114
« 103. *Composizione e risoluzione di due forze parallele, e formule relative* . . . . « 115
« 104. *Composizione, centro, e risoluzione di più forze parallele. Formule relative* . . . . « ivi

Applicazioni

« 105. *Considerazioni sulle porzioni delle componenti angolari che vengono elise, e del loro effetto entro ai corpi* . . « 117
« 106. *Considerazioni sulla differenza che passa fra l'effetto delle componenti parallele, e della loro resultante* . . . . « 118
« 107. *Dei gravi posati sù piani inclinati, ed in generale dei corpi animati da forze che han direzione obliqua ai piani resistenti sù quali questi si appoggiano* . . . . . « ivi
« 108. *Applicazione alla nautica* . . . . « 120
« 109. *Pressioni che un carico può produrre sù due o più sostegni* « ivi
« 110. *Quantità di lavoro di una forza sovra una resistenza che non le è direttamente opposta* . . . . « 123
« 111. *Relazione tra il lavoro della resultante e quello delle componenti* . . . . « ivi

Momenti di rotazione

« 112. *Momenti riferiti ad un centro, ad un asse, o ad un piano* « 124
« 113. *Il momento della resultante è eguale alla somma o alla differenza dei momenti delle componenti, secondo che esse tendono ad aggirare il sistema nel medesimo senso o in senso contrario* . . . . « ivi
« 114. *Relazione tra il momento di rotazione, e il lavoro meccanico* . . . . « 126
« 115. *Momenti di un sistema di forze riferiti a tre assi ortogonali, e formule relative* . . . . « ivi

Applicazioni

« 116. *Ruote sù piani inclinati* . . . . « 128
« 117. *Trovare colla dottrina de' momenti la posizione della resultante in un sistema di forze parallele* . . . . . . « ivi
« 118. *Trovare il centro di tre forze parallele, e eguali, applicate ai tre vertici di un triangolo* . . . . « 129
« 119. *Trovare colla dottrina dei momenti il centro di un sistema di forze parallele* . . . . « ivi
« 120. *Trovare il centro di quattro forze parallele eguali applicate ai vertici di una piramide triangolare* . . . . « ivi

Centro di gravità

« 121. *Centro di gravità delle figure simmetriche* . . . . . . « 130
« 122. *Centro di gravità dei perimetri e in genere delle linee materiali, e formule relative* . . . . « ivi
« 123. *Centro di gravità de' poligoni, e in genere delle superfici*

materiali, e formule relative . . . . pag. 131
§. 124. *Centro di gravità de' poliedri, e in genere dei solidi, e formule relative* . . . . « 133

Applicazioni

« 125. *Trovare la misura delle superfici, e de' solidi che si posson riguardare generati col moto di una linea, o di una superficie* . . . . « 136
« 126. *Spinta de' terrapieni* . . . . « 137
« 127. *Spinte e pressioni de' travi carichi* . . . . « 138

CAPITOLO IV.

Dell' equilibrio, considerato principalmente nelle fabbriche.

« 128. *Condizioni d' equilibrio* . . . . « 140

Equilibrio de' muri

« 129. *Equilibrio de' muri di rivestimento* . . . . « ivi
« 130. *Regole per la pratica* . . . . « 141
Tavola delle grossezze in frazione dell' altezza per i muri di rivestimento verticali con sopracarico di terra e senza « 142
« 131. *Considerazioni per le diverse qualità di terra, e per il caso che sia bagnata* . . . . « 143
« 132. *Trasformazione de' profili a superficie verticale in profili a superficie esterna inclinata* . . . . « ivi
« 133. *Equilibrio ne' piedritti* . . . . « 144
« 134. *Stabilità de' rinfianchi* . . . . « 145
« 135. *Stabilità de' contrafforti* . . . . « ivi

Equilibrio de' poligoni e de' ponti sospesi

« 136. *Dei sistemi di forma variabile, e condizioni del loro equilibrio* . . . . « 146
« 137. *Equilibrio nel poligono carico di pesi* . . . . « 147
« 138. *Economia de' telai, e membri ausiliari de' travi* . . . . « 148
« 139. *Equilibrio ne' sistemi di travi* . . . . « 149
« 140. *Della catenaria omogenea* . . . . « 150
« 141. *Tensioni nella catenaria o piccola saetta* . . . . . . « 151
« 142. *Applicazione a ponti sostenuti sovra catene* . . . . . . « ivi
« 143. *Ponti sospesi al di sotto delle catene* . . . . « 152

Equilibrio de' gravi sopraposti, e degli archi

« 144. *Dei gravi equilibrati sopra un piano inclinato* . . . . « 153
« 145. *Dei gravi sopraposti, ed equilibrati fra più piani inclinati* « 154
« 147. *Equilibrio degli archi formati da cunei sopraposti* . . . « 155
« 148. *Formule per l' equilibrio di un'arco, e deduzioni tratte dalle medesime* . . . . « 157
« 149. *Applicazione alla piattabanda* . . . . « 158
« 150. *Spinta degli archi* . . . . « ivi
« 151. *Esperienze sovra l' equilibrio delle volte, e resultati che se ne sono ottenuti* . . . . « 159
« 152. *Punti di rottura in un arco* . . . . « 160
« 153. *Equilibrio degli archi avuto riguardo alla tenacità de' cementi* . . . . « 161
« 154. *Regola pratica per la grossezza della volta alla chiave* . « 163

§. 155. *Regole per calcolare l'angolo di rottura, le spinte delle volte, e la grossezza limite de' piedritti* . . . . . . pag. 163
Tavola degli angoli di rottura, delle spinte, e delle grossezze limiti de' piedritti nelle volte in pieno centro, in quelle a tutto sesto estradossate fino a 45°, in quelle a tutto sesto estradossate orizzontalmente, e delle spinte nelle volte a sesto scemo . . . . « 164
« 156. *Osservazioni* . . . . « 169
« 157. *Regola per la grossezza de' piedritti* . . . . « ivi
« 158. *Regola pratica per evitare il moto progressivo de' cunei su pulvinari* . . . . « 171

CAPITOLO VII.

Sulle leggi de' differenti movimenti.

« 159. *Classazione de' moti* . . . . « 172

Moto uniforme, e vario

« 160. *Come si generi il moto uniforme* . . . . « ivi
« 161. *Leggi del moto uniforme* . . . . « ivi
« 162. *Come si genera il moto vario* . . . . « 173
« 163. *Modo di rappresentare i differenti moti colla geometria* . « ivi
« 164. *I moti tendono all'uniformità* . . . . « ivi
« 165. *Vantaggi ed usi del moto uniforme. Regolatori* . . . . « 174
« 166. *Applicazioni del moto vario* . . . . « 175
« 167. *Misura della velocità* . . . . « ivi

Moto uniformemente accelerato, e ritardato

« 168. *Moto uniformemente accelerato e sue leggi* . . . . . . « ivi
« 169. *Macchina d' Attwood* . . . . « 176
« 170. *Esperienze sul moto dei gravi che cadono per la verticale.* « 177
« 171. *Applicazioni delle leggi del moto verticale dei gravi* . . « 179
« 172. *Moto uniformemente ritardato. Esperienza* . . . . . . « 180
« 173. *Moto verticale de' gravi ne' mezzi resistenti* . . . . . « 184
« 174. *Applicazione* . . . . « 182
« 175. *Lavoro relativo alla velocità della caduta de' corpi* . . . « ivi
« 176. *Relazione tra la forza viva ed il lavoro meccanico* . . . « ivi

Moto de' gravi per i piani inclinati e per le curve resistenti.

« 177. *Moto de' gravi per i piani inclinati* . . . . « 183
« 178. *Discesa de' gravi per le curve resistenti, e particolarmente per gli archi circolari, e per la cicloide* . . . . . . « 184

Moto rotatorio, e per le trajettorie

« 179. *Velocità tangenziale ed angolare* . . . . « 186
« 180. *Formule della velocità angolare, della forza acceleratrice angolare, e della forza viva ne' corpi che ruotano* . . . « ivi
« 181. *Momenti d' inerzia* . . . . « 187
« 182. *Esempi, e formule per i momenti d' inerzia dei differenti volumi* . . . . « 188
« 183. *Applicazioni* . . . . « 190
« 184. *Assi principali* . . . . « 191
« 185. *Applicazioni* . . . . « ivi
« 186. *Centro di rotazione* . . . . « 192

§. 187. *Della forza centrifuga* . . . . pag. 193
« 188. *Valore della forza centrifuga* . . . . « ivi
« 189. *Esperienze sulla forza centrifuga* . . . . « 194
« 190. *Applicazioni* . . . . « 195
« 191. *Precauzioni usate nelle ruote de' vagoni, e nelle strade rotaje per evitare l'inconvenienti della forza centrifuga* . « 196
« 192. *Moto de' gravi projetti* . . . . « 197
« 193. *Tiro delle armi da fuoco* . . . . « 198
Tavola sull' ampiezza del tiro . . . . « 200
« 194. *Regole per descrivere con approssimazione la traiettoria percorsa dai gravi nei mezzi resistenti* . . . . « ivi

Pendolo

« 195. *Pendolo, e durata dell' oscillazione* . . . . « 202
« 196. *Applicazioni della formula che dà la durata di un' oscillazione* . . . . « 203
Tavola delle lunghezze de' pendoli in diversi paesi . . . « 204
« 197. *Pendolo composto* . . . . « 205
« 198. *Determinazione del centro d' oscillazione* . . . . . . « 206
« 199. *Modo per determinare sperimentalmente la lunghezza di un pendolo* . . . . « 207
« 200. *Come si determini il centro d' oscillazione di un sistema, quando si conoscono i centri di gravità, e i centri d'oscillazione delle singole parti* . . . . « 207
« 201. *Modo di determinare coll' esperienza il momento d' inerzia di un corpo* . . . . « 208
« 202. *Pendoli degli orologi* . . . . « ivi

Comunicazione del moto per mezzo dell' urto

« 203. *Considerazioni generali* . . . . « 211
« 204. *Dell' urto diretto e centrale nei corpi molli e duri* . . . « 212
« 205. *Esperienze* . . . . « ivi
« 206. *Forza viva dei corpi molli e duri dopo l' urto* . . . . « 213
« 207. *Applicazioni* . . . . « 214
« 208. *Urto diretto e centrale dei corpi elastici* . . . . . . « 215
« 209. *Esperienze* . . . . « 216
« 210. *Applicazioni* . . . . « ivi
« 211. *Trasmissione dell' urto tra più corpi elastici, e applicazioni* . . . . « 218
« 212. *Dell' urto eccentrico* . . . . « ivi
« 213. *Dell' urto obliquo* . . . . « 219
« 214. *Dell' urto in un corpo che gira attorno ad un' asse* . . . « 220
« 215. *Centro di percossa* . . . . « ivi
« 216. *Applicazioni* . . . . « 221
« 217. *Pendolo balistico* . . . . « ivi
« 218. *Della pressione confrontata coll' urto* . . . . « 223
« 219. *Della berta, e suo uso per battere i pali* . . . . « ivi

CAPITOLO VIII.

Delle Macchine semplici.

220. *Generalità* . . . . « 225

Macchina funicolare o corde

§. 221. *Equilibrio di una corda, sua tensione, e lavoro prodotto sulla medesima* . . . . pag. 125
« 222. *Equilibrio nelle corde che concorrono in un medesimo punto* . . . . « 227
« 223. *Attrito di una corda che scorre sovra un cilindro fisso.* . « 228

Della Leva

« 224. *Diversi generi di leva* . . . . « 229
« 225. *Teoria generale per l'equilibrio astratto* . . . . « 130
« 226. *Osservazioni* . . . . « ivi
« 227. *Effetto del peso della leva.* . . . . « 231
« 228. *Effetto dell'attrito del perno nella leva.* . . . . « 232
« 229. *Attrito de' pernj* . . . . « ivi
« 230. *Attrito di un cardine contro il suo dado* . . . . « 233
« 231. *Della leva in moto* . . . . « ivi
« 232. *Combinazioni di leve* . . . . « 234
« 233. *Applicazioni al ponte levatojo* . . . . « 235

Della bilancia e della stadera

« 234. *Bilancia* . . . . « 236
« 235. *Descrizione della bilancia.* . . . . « 238
« 236. *Bilancia ad altalena* (bascule) *per grandissimi e per piccoli pesi* . . . . « 239
« 237. *Romano e stadera composta* . . . . « 240

Puleggia

« 238. *Ruota sollecitata da due forze equidistanti dal centro*. . « 241
« 239. *Puleggia fissa* . . . . « 242
« 240. *Puleggia mobile* . . . . « 244
« 241. *Puleggia a ruota* . . . . « 245
« 242. *Puleggia in movimento.* . . . . « ivi
« 243. *Osservazioni sulla costruzione della puleggia* . . . . . « 246
« 244. *Combinazioni di più pulegge ne' tre notati generi* . . . « ivi
« 245. *Taglie* . . . . « 247
« 246. *Taglia nello stato prossimo al moto.* . . . . « 249

Dell'asse nella ruota

« 247. *Asse nella ruota* . . . . « 250
« 248. *Costruzione della macchina* . . . . « 251
« 249. *Combinazioni di argani* . . . . « 253
« 250. *Ruote dentate* . . . . « 254
« 251. *Ruote dentate nello stato prossimo al moto* . . . . . . « 255
« 252. *Argani e ruote dentate in moto* . . . . « ivi
« 253. *Altre combinazioni di argani* . . . . « 256

Del Piano inclinato

« 254. *Piano inclinato.* . . . . « 257
« 255. *Lavoro sopra il piano inclinato* . . . . « 258
» 256. *Uso delle ruote sul piano inclinato* . . . . « ivi
« 257. *Nuova macchina chiamata ginocchio.* . . . . « 259

Del Cuneo

« 258. *Cuneo* . . . . « ivi

§. 259. *Equilibrio del cuneo* . . . . pag. 259
« 260. *Effetto dell'attrito sull'azione del cuneo* . . . . « 260
« 261. *Pressa a cuneo*. . . . . « 261
« 262. *Diverse forme, e combinazioni di cunei* . . . . « 262
Della Vite
« 263. *Modo di descrivere la vite* . . . . « 263
» 264. *Relazione tra la potenza e la resistenza nell'equilibrio della vite fatta astrazione dall'attrito*. . . . . « ivi
« 265. *Equilibrio della vite a verme quadrato e di grossezza trascurabile rapporto al diametro della vite tenendo conto dell'attrito* . . . . « 264
« 266. *Equilibrio della vite a verme quadrato di grossezza considerabile avuto riguardo all'attrito* . . . . « 265
« 267. *Vite a verme triangolare* . . . . « 266
« 268. *Dimensioni che si usano nelle costruzioni delle diverse parti della vite*. . . . . » 267
« 269. *Pressa a vite*. « 268
« 270. *Combinazioni di viti*. . . . . « 269
« 270. bis *Combinazioni della vite con altre macchine*. *Vite perpetua* . . . . « 269
CAPITOLO IX.
Composizione delle macchine.
« 271. *Parti che compongono le macchine e classazione degli organi meccanici* . . . . » 270
« 272. *Dei motori animati* . . . . « 271
« 273. *Degli organi che si usano per impiegare la forza dei motori animati* . . . . « 272
Organi comunicatori di moto.
« 274. *Cricchetto, denti a molla, e denti mobili ec.* . . . . . . « 274
« 275. *Manicotti, ruota libera e folle, connessione con ruote dentate, a dischi con aggetti o incavi, a dischi con denti a sega* . . . . « ivi
« 276. *Coni di fregamento, e connessione ad asse mobile*. . . . « 275
« 277. *Ruota a scatto* . . . . « 276
« 278. *Corda senza fine, cigne, catene, ingranamenti* . . . . « ivi
Organi commutatori di moto
« 279. *Diversi modi di trasformazioni di moto* . . . . « 277
« 280. *Moto rettilineo continuo in moto rettilineo continuo* . . « 278
« 281. *Moto rettilineo continuo in moto rettilineo alternativo* . « 279
« 282. *Moto rettilineo continuo in moto circolare alternativo*. . « ivi
« 283. *Moto rettilineo continuo in moto continuo secondo una data curva* . . . . « ivi
« 284. *Moto rettilineo continuo in moto alternativo secondo una data curva* . . . . « 280
« 285. *Moto circolare continuo in moto rettilineo alternativo*. . « ivi
« 287. *Manovelle ed eccentrici* . . . . « 282
« 288. *Moto circolare continuo in moto circolare continuo* . . . « 285
« 289. *Moto circolare continuo in moto circolare alternativo* . . « ivi

§. 290. *Scappamenti dell' orologio.* . . . . pag. 286
« 291. *Moto circolare continuo in moto continuo secondo una data curva* . . . . « 288
« 292. *Moto circolare continuo in moto alternativo secondo una data curva* . . . . « 290
« 293. *Moto continuo secondo una data curva in moto rettilineo alternativo* . . . . « ivi
« 294. *Moto continuo secondo una data curva in moto circolare alternativo* . . . . « ivi
« 295. *Moto continuo secondo una data curva in moto continuo secondo una data curva* . . . . « ivi
« 296. *Moto rettilineo alternativo, in moto rettilineo alternativo* . . . . « ivi
« 297. *Moto rettilineo alternativo in moto circolare alternativo* . « 291
« 298. *Parallelogrammo di Watt, ed altri analoghi organi meccanici* . . . . « ivi
« 299. *Moto rettilineo alternativo in moto alternativo secondo una data curva — Moto circolare alternativo in moto circolare alternativo — Moto circolare alternativo in moto alternativo secondo una data curva — Moto alternativo secondo una data curva in moto alternativo secondo un' altra curva data* . . . . « 293

Degli organi repartitori di moto e principalmente degli ingranamenti.

« 300. *Mezzi per regolare la velocità del moto* . . . . « 294
« 301. *Organi per cangiare istantaneamente la velocità*. . . . « ivi
« 302. *Modo di determinare i raggi, e i numeri dei denti delle ruote* . . . . « 295
« 303. *Condizioni alle quali devono sodisfare gli ingranamenti.* « 296
« 304. *Differente forma che suol darsi alle ruote dentate*. . . . « ivi
« 305. *Metodo generale per tracciare la curva dei denti qualunque sia la curva generatrice* . . . . « 297
« 306. *Traccia della curva de' denti per ingranare in una lanterna a fusi cilindrici* . . . . « 298
« 307. *Traccia della curva de' denti per ingranamento a sviluppanti* . . . . « 299
« 308. *Traccia della curva de' denti per l' ingranamento in una ruota a pignone, cioè coi denti terminati da rette che convergono al centro* . . . . « 300
» 309. *Traccia della curva de' denti per l' ingranamento epicicloidale* . . . . » ivi
» 310. *Traccia de' chiavelli per i magli, per i pestoni ec.* . . . » 302
» 311. *Della piattaforma* . . . . « ivi

Organi regolatori di movimento

» 312. *Distinzione tra gli organi moderatori e i regolatori* . . « 303
» 313. *Tamburi regolatori e tamburo a spirale* . . . . « ivi
« 314. *Regolatori a molla.* . . . . « 305
« 315. *Regolatore a forza centrifuga* . . . . « ivi

§. 316. *Uso dei volanti* . . . . pag. 307
» 317. *Considerazioni sullo stabilimento dei volanti* . . . . . . „ 308

CAPITOLO X.

Sul calcolo delle macchine composte.

« 318. *Differente scopo che può avere il calcolo sulle macchine* . „ 310
« 319. *Descrizione del castello dell'orologio a calcolo sulla velocità delle sue ruote* . . . . „ 311
« 320. *Descrizione e calcolo di un verricello portatile, e di una grù* . . . . „ 312
« 321. *Osservazioni sul modo di calcolare l'attrito negli ingranamenti e calcolo per una combinazione di ruote dentate* . „ 315
« 322. *Calcolo del lavoro utile ottenuto in diverse cartafe* . . . „ 318
« 323. *Calcolo del lavoro assorbito dall'attrito in diversi mulini* „ 321
« 324. *Esempi di calcolo per dedurre il lavoro utile dei pestoni e dei magli* . . . . „ 324
« 325. *Macchine e strumenti che si usano per l'escavazione dei pozzi artesiani* . . . . „ 326
» 326. *Dei veri vantaggi, e della più vantaggiosa disposizione delle macchine* . . . . „ 329

pag.	colon.	verso	ERRORI	CORREZIONI E AGGIUNTE
8.	2.	47.	alterazione	alterazione proporzionale
12.	2.	16.	2,962418	1,962418
31.	2.	25.	P. = 25 A	P = 2,5 A
40.	1.	4.	:: 3 : 8	:: 3 : 8 (trascurando α e β)
„	2.	6.	$P = R\frac{a^2}{6a}$	$P = R\frac{c^3}{6a}$
„	„	19.	$P = R\,\pi\frac{(r'^2 - r''^2)}{4r'a}$	$P = R\pi\frac{r'^4 - r''^4}{4r'a}$
44.	1.	28.	Amendue le reazioni o tutto il peso aggravato alla metà del solido sostenuto produrrà effetto eguale alla metà di quello che si avrebbe sul solido incastrato.	(Si intenda soppresso il dicontro periodo)
„	1.	38.	$^1/_2$P, $^1/_2p$	$^1/_4$ P, $^1/_4 p$
„	2.	7.	$\varepsilon y = P\left(\frac{a x^2}{4} - \frac{x^3}{12}\right); f = \frac{P}{\varepsilon}\cdot\frac{a^3}{6}$	$\varepsilon y = P\left(\frac{a x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right); f = \frac{P}{\varepsilon}\frac{a^3}{3}$
„	„	37.	reazione	azione
46.	2.	43.	lunghezza	larghezza
64.	1.	13.	dell' urto	dell' urto, o la metà della forza viva perduta nell' urto
„	2.	5.	adattando	adottando
81.	1.	30.	Servirà	Servirà al moto che acquista il corpo applicare la seguente formula, ed anche
88.	2.	41.	Queste regole non si possono stabilire (con tuttociò che segue fino al verso 30 della prima colonna nella pagina successiva)	Ho creduto interessante di ricercare per mezzo di accurate e moltiplici esperienze (*Cimento pag.* 117. *an.* 1846) quale delle due ipotesi avesse a ritenersi e ne è resultata manifestamente confermata la dottrina del Dupuit. Quindi non potendo aversi come esatti i resultati sperimentali che furono stampati nel corso ne aggiungo qui alcuni da sostituirsi a quelli, e prima per maggior chiarezza, sebbene io mi sia deciso dietro le esperienze, espongo brevemente il ragionamento pel quale si comprende essere l' attrito di seconda specie in ragione inversa del-

ERRORI			CORREZIONI E AGGIUNTE
pag.	colon.	verso	

la radice quadrata del raggio del cilindro. Rappresentiamo il cilindro col circolo (Tav. III. fig. 17) che ha per raggio CA $= r$, e finghiamoci sulla superficie convessa in M una scabrosità prodotta da una particella che riposi sul piano di contatto ed abbia per altezza MO $= m$. Per effetto del peso R che è attaccato alla circonferenza del cilindro dovrà decidersi la rotazione in esso che gravita sul piano colla pressione P; e perchè esiste la particella M roterà il cilindro attorno questa e potrà ritenersi che si abbia una leva R′MP′ coll' ipomoclio in M e posta in stato prossimo al moto dalle due forze R, P, onde sarà R.R′M $=$ P.P′M, ma R′P′ è eguale al raggio del cilindro, ed in confronto a questo raggio possono trascurarsi le due quantità piccolissime pA $=$ MB $= m$ ed Mp, perciò sarà R.$r =$ P. $\sqrt{2rm}$ cioè

$$R = \frac{P\sqrt{2m}}{\sqrt{r}} = \frac{fP}{\sqrt{r}}$$

posto il coefficiente d' attrito f in luogo della quantità $\sqrt{2m}$ che deve moltiplicare la pressione P, o anche

$$f = \frac{R}{P}\sqrt{r}$$

il coefficiente d' attrito di seconda specie è il rapporto tra la resistenza e la potenza moltiplicato per la radice del raggio del cilindro. In questo significato i valori sperimentali di f sono

Cilindri di abete su regoli dello stesso legno	0,001532
Cilindri di pietra sù regoli ruvidi di pietra	0,000564
Cilindri di ferro sù lastre d' ottone................	0,000144
Cilindri di abete sù lastre	

pag.	colon.	verso	ERRORI	CORREZIONI E AGGIUNTE
				d'ottone 0,001198
				Cilindri di pietra sù lastre d'ottone 0,000579
				Ruote ordinarie cerchiate di ferro sovra strato di rena umida alto $0^m,013$ 0,034270
				idem sovra strato di rena asciutta alto $0^m,013$ 0,064541
				,, alto $0^m,027$ 0,110401
				,, alto $0^m,040$ 0,136898
				idem sopra terra calcata.. 0,022582
				idem sopra smalto 0,021056
				idem sopra ghiaia sottile.. 0,080695
				idem sopra lastrico buono. 0,019417
				idem sopra mattonato arrotato 0,012111
97.	2.	35.	$1080^k \times 0^m,628 = 678^{km}$	$50 \times 1080 \times 0^m,628 = 33900^{km}$
103.	1.	36.	609389	609380000
105.	1.	38.	trave AA'	trave (Tav. III. fig. 16) AA'
106.	2.	39.	partenza	potenza
112.	2.	19.	*sen* $\widehat{Ry}$	R *sen* $\widehat{Ry}$
113.	1.	21.	*cos* $\widehat{PP''}$	*cos* $\widehat{PP'}$
114.	2.	38.	*cos* $\widehat{P''x}$	*cos* $\widehat{P''x}$
120.	1.	21.	*tang mf*	*tang* $m + f$
,,	,,	26.	Sia AB	Sia (Tav. IV. fig. 9) AB
121.	2.	34.	$^1/_2$ *sen* B A'C	$^1/_2$ *sen* AA'C
123.	1.	26.	AC	AB
,,	2.	40.	$Rr \cdot Cc$	$Cr \cdot Cc$
,,	2.	41.	$Q'q \cdot Cc$, $Pp \cdot Cc$	$B'q \cdot Cc$, $A'p \cdot Cc$
124.	1.	1.	$Rr = Q'q \pm Pp$	$Cr = B'q + A'p$
,,	,,	6.	$Rr.Cc = Q'q.Cc + P'p.Cc$	$Cr.\,Cc = B'q.\,Cc \pm A'p.\,Cc$
,,	2.	47.	respettimente	respettivamente
125.	1.	22.	$R \times OD$	$R \times OD'$
,,	2.	21.	in C	in C'
127.	1.	47.	coineida	coincida
128.	1.	38.	$f''r - f''$	$f''r + f''$
,,	2.	45.	(Tav. V. fig. 3)	(Tav. IV. fig. 3)
130.	2.	24.	BC	BA
132.	1.	11, 18.	SGM 3p	SGN 3p
135.	2.	6.	S	D
135.	2.	23.	moltiplicato	moltiplicata
136.	1.	12.	$\alpha = {}^1/_6 (p + u)(3n - 4)$ $\alpha' = {}^1/_6 (p' + u')(3n - 4)$	$\alpha = {}^1/_6 \left[p + u (3n - 4) \right]$ $\alpha' = {}^1/_6 \left[p' + u' (3n - 4) \right]$

pag.	colon.	verso	ERRORI	CORREZIONI E AGGIUNTE
158.	1.	30.	$(a-{}^{2}/_{5}\,y)$	$(a-{}^{2}/_{6}\,y)$
,,	2.	7.	acarpa	scarpa
139.	2.	14.	DR	DP′
141.	1.	22.	del muro	del terrapieno
,,	,,	43.	= 0,2	= 0,4
147.	2.	7, 19, 22.	S *a*	S *u*
148.	2.	35. 36.	P	P′
155.	1.	36.	5*kl*	6*kl*
154.	2.	17.	$F=\frac{cosm}{cosn}$	$E=P\,\frac{cosm}{cosn}$
157.	2.	32.	orizzontale e verticale	verticale e orizzontale
,,	,,	37, 38.	< >	> <
161.	2.	7.	noti	notate
,,	,,	12, 14.	B*b*, D B*b*, C*c*	B*bd*D B*b*C*c*
162.	1.	19.	nell'	coll'
,,	,,	23. 30. 32.	BM BC DC U	BI BV DV U,D
172.	2.	7.	e formato	è formato
,,	2.	23.	camunemente	comunemente
177.	2.	11.	fa forza	la forza
179.	2.	2.	$^1/_2\,.9^m,8\,.\,492=40^m,1$	$^1/_2\,.9^m,8\,.\,49=240^m,1$
182.	1.	31. 32.	*s*	S
183.	1.	12.	retta *aa‴*	retta (Tav. VII. fig. 5.) *aa‴*
187.	2.	14, 15.	*a* *ma*	*m* *md*
191.	1.	4.	de' giri	de' minuti secondi
192.	2.	31.	ahe	che
197.	2.	11.	P*g*	P*y*
200.	1	40, 43.	Si fa *trajettoja*	Si sa, *trajettoria*
201.	2.	1.	V*s*	+ V
213.	2.	28. 31.	*mv′* $mv+mv'^2$	*m′v′* $mv^2+m'v'^2$
220.	1.	11.	Q	Q (Tav. VII. fig. 7)
,,	2.	8.	(si aggiunga)	Che se anche il corpo P (il quale supporrò che abbia per momento d'inerzia I′) girasse attorno al centro A con una velocità angolare ω′ si avrebbe M. V. AC = I′ω′, M. GA. AC = I′ e perciò $\omega=\frac{I'\omega'}{I'+I}$ cioè la stessa formula che si era stabilita per l'urto dei corpi molli messi in moto progressivo, ove però è mutata la massa nel momento d'inerzia, e la velocità effettiva in quella angolare.

ERRORI				CORREZIONI E AGGIUNTE
pag.	*colon.*	*verso*		
235.	2.	9.	uno	una
260.	2.	44.	$Q\frac{AB}{NF}$	$Q\frac{AB}{AF}$
261.	1.	3.	$AB = \frac{1}{10} NF$	$AB = \frac{1}{10} AF$
277.	1.	34.	fig. 13	fig. 14
279.	2.	10, 39.	281 282	282 283
280.	1.	23, 46.	283 284	284 285
293.	1.	11, 20.	fig. 10 fig. 7	fig. 9 fig. 8
312.	2.	41.	*grua*	*grù*

F. 1.
F. 2.
F. 4.
F. 5.
F. 6.
F. 7.
F. 8.
F. 9.
F. 10
F. 11.
F. 12.
Tom. Santini inc.

Tom. Santini inc.

Tom. Santoni inc.

Mec. Tav. IV.
F. 1.
F. 2.
F. 3.
F. 4.
F. 5.
F. 6.
F. 7.
F. 8.
F. 9.
F. 10.
F. 11.
F. 12.
F. 13.
F. 14.
F. 15.
Tom. Santoni inc.

Mecc Tav. V.

Tom. Santoni inc.

Mecc. Tav VI.
F. 1.
F. 2.
F. 3.
F. 4.
F. 5.
F. 6.
F. 7.
F. 8.
F. 9.
F 10
F. 11.
F. 12.
F. 13.
Tom: Pantoni inc.

Tom. Santini dis. e inc.

Mecc. Tav. VIII.

Tom. Santoni inc.

Tomm. Santoni dis. e inc.

Tom. Santini inc.

F. 1.
F. 2.
F. 3.
F. 4.
F. 5.
F. 6.
F. 7.
F. 8.
F. 9.
F. 10.
F. 11.
F. 12.
F. 13.
F. 14.
F. 15.
F. 16.
F. 17.
F. 18.
F. 19.
Tom. Santoni inc.

Mecc. Tav. XII.
F. 1.
F. 3.
F. 8.
F. 2.
F. 4.
F. 9.
F. 5.
F. 10.
F. 6.
F. 11.
F. 7.

Mecc. Tav. XIII.
F. 1.
F. 2.
F. 3.
F. 4.
F. 5.
F. 6.
F. 7.
F. 8.
F. 9.
F. 10.
F. 11.
F. 12.
F. 13.
F. 14.
Tom. Santoni inc.

Tom. Santoni inc.

Tom. Santoni inc.

Tom: Santoni inc.

Tom. Santoni inc.

Mecc. Tav. XVIII.
F. 1.
F. 2.
F. 3.
F. 4.
F. 5.
F. 6.
F. 7.
F. 8.
F. 9.
F. 10.

Mecc. Tav. XIX

Mecc. Tav. XX.
F. 1.
F. 2.
F. 3.
F. 4.
F. 5.
F. 6.
F. 7.
F. 8.
F. 8.
Tom. Santoni inc.